Notas del minicurso Espacios con núcleo reproductor

Marcos López García

22 de junio de 2012

1. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

1.1. Preliminares

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Un producto interior en V es una función $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisface

1. $\langle u + \alpha v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \alpha \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
2. $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$ para todo $u, w \in V$.
3. $\langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la barra en el punto 2 denota a la conjugación compleja, y en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tal barra no aparece. Notamos que para v fijo la función $\langle \cdot, v \rangle$ es lineal y para u fijo la función $\langle u, \cdot \rangle$ es aditiva y "saca" los escalares pero conjugados, a las funciones de dos variables que tienen ambas propiedades se les llama sesquilineales.

Es bien sabido que todo producto interior induce una norma en V dada por

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}, \quad u \in V.$$

En cualquier espacio vectorial con producto interno se satisface la llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, u \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

La norma mencionada a su vez define una métrica en V dada por

$$d(u, v) = \|u - v\|, \quad u, v \in V.$$

Definition 1 *Un espacio de Hilbert H es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ con un producto interior $\langle , \rangle$ tal que (H, d) es un espacio métrico completo, donde d es la métrica antes mencionada.*

Definition 2 *Sea H un espacio de Hilbert sobre un campo $\mathbb{K}$. Un funcional lineal continuo $\Lambda : H \to \mathbb{K}$ es una función que satisface:*

1. $\Lambda(u + \alpha v) = \Lambda u + \alpha \Lambda v$, para todo $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$, i.e. Λ es lineal.
2. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\Lambda x| \leq C \|x\| \text{ para todo } x \in H.$$

En este caso, definimos además la norma del funcional Λ como sigue

$$\begin{aligned} \|\Lambda\| \quad : & = \text{ínf}\left\{C>0 : |\Lambda x| \leq C\|x\| \ \ \forall x \in H\right\} \\ = & \ \sup\left\{|\Lambda x| : \|x\| \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se puede consultar en .

Resulta que el conjunto de todos los funcionales lineales continuos definidos en un espacio de Hilbert H, es un espacio vectorial respecto a las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función. Aún más, tal espacio es normado (con la norma de un funcional dada antes) y completo.

Example 3 *Sea* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *. El conjunto de sucesiones de números complejos (indexadas por* $\mathbb{N}_0$*) que son cuadrado sumables es un espacio vectorial con un producto interior, en concreto*

$$\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N}_0) = \left\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\},$$

las operaciones vectoriales están dadas por

$$\begin{aligned} (x_n)_{n=0}^{\infty} + (y_n)_{n=0}^{\infty} &= (x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}, \\ \lambda (x_n)_{n=0}^{\infty} &= (\lambda x_n)_{n=0}^{\infty}, \ \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

y el producto interior es

$$\left\langle (x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

De hecho se puede probar que $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N}_0)$ *es un espacio de Hilbert.*

Example 4 *Sea* $H^2(\mathbb{D})$ *el conjunto de series de potencias formales (i.e. que en este punto no nos interesa la convergencia de las series) con coeficientes complejos que son cuadrado sumables, i.e.*

$$H^2(\mathbb{D}) : \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : a_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}.$$

Las operaciones vectoriales en $H^2(\mathbb{D})$ *están dadas como sigue*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n, \qquad (1) \\ \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n, \ \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \qquad (2)$$

define un producto interior en $H^2(\mathbb{D})$*. De hecho, el lector puede notar que los espacios* $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N}_0)$ *y* $H^2(\mathbb{D})$ *son isométricamente isomorfos. En concreto, el mapeo*

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es un isomorfismo isométrico entre los espacios mencionados. Como $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N}_0)$ *es un espacio de Hilbert se sigue que* $H^2(\mathbb{D})$ *también lo es.*

Un resultado fundamental en la teoría de los espacios de Hilbert es el llamado Teorema de Representación de Riesz, el cual caracteriza a los funcionales lineales continuos definidos en un espacio de Hilbert (consultar [6, Teorema 12.5]).

Theorem 5 *Sea H un espacio de Hilbert sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\Lambda : H \to \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe un único vector $w \in H$ tal que*

$$\Lambda u = \langle u, w \rangle \quad \textit{para todo } u \in H,$$

además $\|\Lambda\| = \|w\|$.

A continuación mencionamos un resultado que nos será útil, para probarlo se usa el Teorema de Representación de Riesz.

Corollary 6 *Sea M un subespacio vectorial cerrado propio del espacio de Hilbert H. Entonces existe un vector $u \in H \setminus \{0\}$ tal que $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in M$.*

1.2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Tenemos los elementos necesarios para introducir los llamados Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductor.

Definition 7 *Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\mathcal{H}$ es un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor (EHNR) definido en X y con valores en $\mathbb{K}$ si satisface:*

1. $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $V = \{f : X \to \mathbb{K} | \ f \text{ es función}\}$ sobre $\mathbb{K}$. (En V se consideran las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función).

2. $\mathcal{H}$ está dotado de un producto interior $\langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ respecto al cual es un espacio de Hilbert.

3. Para cada $y \in \mathcal{H}$ el funcional lineal $E_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ dado por

$$E_y (f) = f (y), \quad f \in \mathcal{H},$$

   es continuo. (i.e. existe una constante $C_y > 0$ tal que $|f (y)| \leq C_y \|f\|$ para todo $f \in \mathcal{H}$).

Al funcional E_y se le llama funcional evaluación en el punto y.

1. **Example 8** *Sea $f (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, se sigue que $f \in H^2 (\mathbb{D})$ y*

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Para $m \geq n \geq 0$ la estimación

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{m} |a_j| |z|^j &\leq \left(\sum_{j=n}^{m} |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=n}^{m} |z|^{2j} \right) \\ &\leq \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} \left(\sum_{j=n}^{m} |z|^{2j} \right) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \textit{si } |z| < 1, \end{aligned}$$

implica que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente en $|z| < 1$, y uniformemente en $|z| \leq r < 1$. Así, f es una función bien definida en el disco unitario abierto $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$; por lo tanto $H^2 (\mathbb{D})$ es un subespacio vectorial del espacio V de funciones definidas en $\mathbb{D}$ y con valores en $\mathbb{C}$. Afortunadamente *las operaciones vectoriales en V restringidas a $H^2(\mathbb{D})$ coinciden con las operaciones definidas en (1), de donde se sigue que $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de funciones que es de Hilbert y es conocido como Espacio de Hardy. Finalmente para $z \in \mathbb{D}$ y $f \in H^2(\mathbb{D})$ usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener*

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \\ &\leq \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^{1/2}}, \end{aligned}$$

lo que implica que el funcional lineal E_z evaluación en z, es continuo y $\|E_z\| \leq \left(1 - |z|^2\right)^{-1/2}$. En conclusión, $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

1.3. Propiedades del núcleo reproductor

Consideramos un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor $\mathcal{H}$ definido en X y con valores en $\mathbb{K}$. Sea $y \in X$ fijo pero arbitrario. Dado que el funcional evaluación en y, denotado como E_y, es continuo en $\mathcal{H}$, por el Teorema de Representación de Riesz se sigue que existe una única función $k_y \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(y) = \langle f, k_y \rangle \text{ para todo } f \in \mathcal{H}, \tag{3}$$

y además

$$\|E_y\| = \|k_y\|.$$

A la función k_y se le conoce como el núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ para el punto y.

El núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ es la función $K : X \times X \to \mathbb{K}$ dada por

$$K(x, y) = k_y(x), \quad x, y \in X.$$

Aplicamos (3) a la función $f = k_x$ para obtener

$$K(y, x) = k_x(y) = \langle k_x, k_y \rangle,$$

es decir,

$$K(x, y) = \langle k_y, k_x \rangle.$$

La igualdad anterior tiene las siguientes consecuencias:

1. $\overline{K(x, y)} = \overline{\langle k_y, k_x \rangle} = \langle k_x, k_y \rangle = K(y, x)$, $x, y \in X$.
2. $\|E_x\|^2 = \|k_x\|^2 = \langle k_x, k_x \rangle = K(x, x)$, $x \in X$.
3. $|K(x, y)| = |\langle k_y, k_x \rangle| \leq K(x, x)^{1/2} K(y, y)^{1/2}$, $x, y \in X$.

La última propiedad se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz del núcleo reproductor y es una condición que se suele usar para ver si cierta función puede ser núcleo reproductor (i.e. es una condición necesaria).

También queremos hacer notar que el núcleo reproductor determina al espacio total $\mathcal{H}$, esto se comprende mejor a la luz del siguiente resultado.

Proposition 9 *Sea K el núcleo reproductor de un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{H} = \overline{span}\{k_x : x \in X\}$.*

Proof. Ponemos $M = span\{k_x : x \in X\}$. Como M es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$, se puede ver que $\overline{M}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$ (ver [6, Teorema 1.13]). Supongamos que M está contenido propiamente en $\mathcal{H}$. Del Corolario 6 se sigue que existe una función $f \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$ tal que $\langle f, g\rangle = 0$ para todo $g \in \overline{M}$. En particular, $f(x) = \langle f, k_x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, lo cual contradice el hecho de que f no es la función constante cero. Así que $M = \mathcal{H}$. ■

Example 10 *Para $w \in \mathbb{D}$ fija, la función $k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n \in H^2(\mathbb{D})$ ya que $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^n < \infty$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2(\mathbb{D})$, entonces*

$$\begin{aligned} \langle f, k_w\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{\overline{w}^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = f(w) \end{aligned}$$

para todo $w \in \mathbb{D}$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} K(z,w) &= k_w(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n = \frac{1}{1-\overline{w}z} \end{aligned}$$

es el núcleo reproductor para el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ y se le conoce como el núcleo de Szego. Por la teoría general se tiene

$$\|E_z\|^2 = K(z,z) = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

En el ejemplo anterior propusimos una función K que a la postre resultó ser el núcleo reproductor para $H^2(\mathbb{D})$. El siguiente resultado proporciona un método general para calcular el núcleo reproductor de cualquier EHNR.

Proposition 11 *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR definido en X y con valores en $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{H}$ admite una base ortonormal numerable $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces*

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)\overline{e_n(y)}, \quad x, y \in X.$$

Proof. De la hipótesis se sigue que para cada $y \in X$ existe una sucesión $(\lambda_n(y))_{n=0}^{\infty} \in \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}_0)$ tal que

$$k_y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(y) e_n,$$

donde la convergencia se da en $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que la función $v \to \langle k_y, v\rangle$ es lineal y continua, por lo tanto

$$e_m(y) = \langle e_m, k_y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n(y)} \langle e_m, e_n\rangle = \overline{\lambda_m(y)}, \quad m \geq 0.$$

Finalmente, usamos que el funcional lineal evaluación E_x es continuo en $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ para obtener

$$K(x,y) = E_x(k_y) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(y)} E_x(e_n).$$

■

1.4. Funciones holomorfas

Para cada $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, denotamos por $D(a, r)$ al disco unitario abierto con centro en a y radio r, i.e. $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$.

Definition 12 *1.- Una función $f : D(a, r) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en a si existe el siguiente límite*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} := f'(a).$$

2.- Sea $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Decimos que f es holomorfa en Ω si f es holomorfa en cada punto de Ω.

Si f es una función holomorfa en Ω, se puede probar que su parte real u y su parte imaginaria v son funciones diferenciables en Ω que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω :

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Definition 13 *Integración compleja. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y $\Gamma \subset \Omega$ una curva con parametrización $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. La integral de f sobre Γ se define como sigue*

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\, dz \quad &:= \int_a^b f(\gamma(t))\,(x'(t) + iy'(t))\, dt \\ &= \int_a^b [x'(t)\, Ref(\gamma(t)) - y'(t)\, Imf(\gamma(t))]\, dt \\ &\quad + i \int_a^b [y'(t)\, Ref(\gamma(t)) + x'(t)\, Imf(\gamma(t))]\, dt. \end{aligned}$$

A continuación reproducimos la versión más simple de la fórmula integral de Cauchy, la cual es suficiente para estudiar las propiedades locales de las funciones holomorfas.

Theorem 14 *Sea $f : D(a, r + \delta) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en su dominio de definición, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad \text{para todo } z \in D(a, r).$$

Como es de esperarse, el lado de la derecha en la igualdad anterior se debe interpretar como una integral compleja.

Corollary 15 *Si f satisface las mismas condiciones del teorema anterior entonces*

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a,r)} f(z)\, dz.$$

Proof. Consideramos la parametrización $\xi(\theta) = a + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, de la circunferencia $|\xi - a| = r$; además hacemos $z = a$ en el teorema anterior para obtener

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{D(a,r)} f(z)\,dz &= \int_0^r t \int_0^{2\pi} f\left(a+te^{i\theta}\right) d\theta dt \\
&= \pi r^2 f(a).
\end{aligned}$$

■

Definition 16 *Sea X un conjunto no vacío. Una colección no vacía Σ de subconjuntos de X es una σ-álgebra si satisface:*

1. Si $A \in \Sigma$ entonces $X \backslash A \in \Sigma$.
2. Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Dado un conjunto no vacío X existen al menos un par de σ-álgebras de subconjuntos de X, a saber $\{\emptyset, X\}$ y el conjunto potencia de X. Además se puede verificar que la intersección arbitraria de σ-álgebras es una σ-álgebra. Por lo tanto, dada una colección no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, denotada por $\Sigma(\mathcal{A})$, es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{A}$.

Definition 17 *Sea $\mathcal{A} = \{D(a,r) : a \in \mathbb{D},\ 0 < r < 1 - |a|\}$ la colección de todos los discos abiertos contenidos en $\mathbb{D}$. A los elementos de la σ-álgebra $\Sigma(\mathcal{A})$ se les llama subconjuntos borelianos del disco.*

Definition 18 *Una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ se dice que es (Borel) medible en el disco si $f^{-1}(D(a,r))$ es un subconjunto boreliano del disco.*

Definition 19 *Dadas las funciones medibles $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ se dice que son iguales casi donde quiera si existe un conjunto de medida cero $A \subset \mathbb{D}$ tal que f y g coinciden en $X \backslash A$.*

Se puede mostrar que la relación antes mencionada es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones medibles en el disco.

Definition 20 *Sea $L^2(\mathbb{D})$ el espacio vectorial de las clases de equivalencias cuyos representantes son funciones medibles cuadrado integrables, en concreto:*

$$L^2(\mathbb{D}) = \left\{ [f] : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{D}} |f|^2 \, dxdy < \infty \right\}.$$

Lo interesante es que $L^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert (sobre el campo $\mathbb{C}$) respecto al producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(x,y) \overline{g(x,y)} dxdy.$$

Definition 21 *El espacio de Bergman en el disco unitario $A^2(\mathbb{D})$ es el espacio vectorial de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que son cuadrado integrables, es decir,*

$$A^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} |\ f \text{ es holomorfa y } \int_{\mathbb{D}} |f|^2 \, dxdy < \infty \right\}.$$

Theorem 22 *El espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D})$ es un subespacio vectorial cerrado en $L^2(\mathbb{D})$ (ver [8, Proposicin 4.1.3]). Por lo tanto, $A^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert.*

Theorem 23 *El espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $K(z,w) = \pi^{-1}(1 - \overline{w}z)^{-2}$.*

Proof. Claramente $A^2(\mathbb{D})$ es un subespacio vectorial de $V = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} |\ f \text{ es función}\}$. Del teorema previo se sigue que $A^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con el producto interior que hereda de $L^2(\mathbb{D})$. Resta probar que el funcional lineal E_z, evaluación en z, es continuo:

Sean $z \in \mathbb{D}$, $r = 1 - |z| - \delta > 0$ y $\delta > 0$ fijos. Consideramos $f \in A^2(\mathbb{D})$ arbitrario. De (15) se tiene

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}} \chi_{D(a,r)} |f(w)|\, dw \\ &\leq \frac{1}{\pi^{1/2} r} \|f\|. \end{aligned}$$

Haciendo tender δ a cero se tiene

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi^{1/2}(1-|z|)} \|f\|, \text{ para todo } f \in A^2(\mathbb{D}).$$

Por lo tanto E_z es continuo y $\|E_z\| \leq \pi^{-1/2}(1-|z|)^{-1}$.

Dado que $\left\{\pi^{-1/2}\sqrt{n+1} z^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $A^2(\mathbb{D})$, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \pi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z\overline{w})^n \\ &= \frac{1}{\pi(1-\overline{w}z)^2}, \quad z, w \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

De la teoría general se tiene $\|E_z\|^2 = K(z,z) = \pi^{-1/2}\left(1-|z|^2\right)^{-1}$. ■

1.5. Funciones definidas positivas

Definition 24 *Denotamos por $\mathbb{C}^{n\times n}$ al espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ de matrices cuadradas con entradas complejas de tamaño $n \times n$.*

Definition 25 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es definida positiva si $\langle Az, z\rangle_{\mathbb{C}^n} \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$.*

Definition 26 *Una función $K : X \times X \to \mathbb{C}$ es definida positiva si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier colección finita $x_1, \ldots, x_n$ de puntos en X la matriz $(K(x_i, x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ es definida positiva.*

Example 27 *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR definido en X y con valores en $\mathbb{C}$, entonces su núcleo reproductor $K(x,y)$ es una función definida positiva:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j k_{x_j} \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j k_{x_j} \sum_{i=1}^{n} a_i k_{x_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_j \overline{a_i} \left\langle k_{x_j}, k_{x_i} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_j \overline{a_i} K(x_i, x_j) \\ &= \langle (K(x_i, x_j)) z, z \rangle_{\mathbb{C}^n} \end{aligned}$$

para todo $z = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ y para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \geq 1$.

El punto a destacar es que a partir de una función definida positiva en $X \times X$ se puede construir un EHNR. El resultado es bastante importante y se le refiere como el Teorema de Moore. Se puede consultar la demostración en [7].

Theorem 28 *Sean X un conjunto no vacío y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Entonces existe un único espacio de funciones definidas en X que es de Hilbert y tiene como núcleo reproductor a K.*

La idea de la demostración es simple: Primero se considera el espacio vectorial $W := span\{k_y : y \in X\}$, donde $k_y = K(\cdot, y)$, junto con la forma sesquilineal $B : W \times W \to \mathbb{C}$ dada por

$$B\left(\sum a_j k_{x_j}, \sum b_j k_{x_j}\right) = \sum a_j \overline{b_j},$$

donde se asume que las sumas son finitas y los coeficiente son números complejos. Se muestra que B es una función bien definida y que define un producto interior en W.

Para la parte final se construye la completación correspondiente al espacio con producto interior (W, B), el espacio resultante $\left(\mathcal{H}(K), \langle,\rangle_{\mathcal{H}(K)}\right)$ es un EHNR con núcleo reproductor K. Así se establece que existe una relación unívoca entre los EHNR y las funciones definidas positivas.

Finalmente proporcionamos una pequeña bibliografía para los que deseen profundizar en temas relacionados.

Referencias

[1] Aronszajn, N. Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 68, (1950). 337–404.

[2] Bergman, Stefan The kernel function and conformal mapping. Segunda edición revisada. Mathematical Surveys, No. V. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970. x+257 págs.

[3] Duren, Peter L. Theory of Hp spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London 1970 xii+258 págs.

[4] Garnett, John B. Bounded analytic functions. Primera Edición revisada. Graduate Texts in Mathematics, 236. Springer, New York, 2007. xiv+459 pp.

[5] Hedenmalm, Haakan; Korenblum, Boris; Zhu, Kehe Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000. x+286 págs.

[6] Rudin, Walter Functional analysis. Segunda edición. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. xviii+424 pp.

[7] Saitoh, Saburou Theory of reproducing kernels and its applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublicado en los EU con John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. x+157 págs.

[8] Zhu, Kehe Operator theory in function spaces. Segunda edición. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xvi+348 págs.