
De los Poliedros a los Conjuntos Simpliciales

José Luis Cisneros Molina
Levent Arturo Chaves Moreno

21 de julio de 2016

ÍNDICE

1	Introducción.	2
2	Complejos Simpliciales	2
2.1	Poliedros	2
2.2	Complejos simpliciales euclidianos	6
2.3	Complejos simpliciales abstractos.	10
2.4	Realización geométrica.	10
2.5	Conjuntos Simpliciales.	11
3	Teoría de Categorías.	13
3.1	Categorías	13
3.2	Funtores.	14
3.3	Transformaciones naturales	15
4	Objetos Simpliciales	16
4.1	La categoría Δ	16
4.2	Conjuntos simpliciales	23
4.3	Simplejos singulares.	23

1. INTRODUCCIÓN.

Estas notas corresponden al minicurso impartido por José Luis Cisneros durante el *Primer Verano de Investigación* de la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM que se llevó a cabo del 27 de junio al 12 de agosto de 2016. Este documento está basado en las notas manuscritas tomadas por Levent Arturo Chavez quien las digitalizó usando $\text{\LaTeX}$. El curso consistió de tres clases de hora y media cada una y más o menos corresponden a cada uno de los capítulos de estas notas.

En Topología Algebraica existen varios métodos para construir espacios topológicos a partir de piezas básicas, como si se tratara de un juego de LEGO. Si las piezas básicas son células obtenemos los Complejos CW y si las piezas básicas son simplejos obtenemos los Complejos Simpliciales. El objetivo del curso es definir los Conjuntos Simpliciales, los cuales tienen una definición abstracta en términos de categorías, motivándolos a partir de ideas y construcciones más intuitivas.

En el primer capítulo se definirán los Complejos Simpliciales. Comenzaremos dando el ejemplo de poliedros en $\mathbb{R}^3$ desarrollando el ejemplo específico del tetraedro por ser el poliedro regular con menos vértices, aristas y caras. Posteriormente se definirán los Complejos Simpliciales Euclidianos que generalizan a los poliedros en cualquier dimensión. Posteriormente veremos que la información para describir a un Complejo Simplicial Euclidiano es información puramente combinatoria, lo que da pie a la definición de los Complejos Simpliciales Abstractos. Finalmente, si relajamos la definición de Complejo Simplicial Abstracto y permitimos simplejos degenerados obtenemos a los Conjuntos Simpliciales.

El segundo capítulo es una muy breve introducción a la Teoría de Categorías dando las tres definiciones principales: categoría, funtor y transformación natural. Se dan varios ejemplos para ilustrar estos conceptos.

Finalmente en el último capítulo se define la categoría Δ y se estudian sus propiedades principales, las cuales nos permitirán dar un paso más en la abstracción de los Conjuntos Simpliciales viéndolos en términos de categorías.

Para aprender más de estos temas sugerimos consultar [1, 2, 3]

2. COMPLEJOS SIMPLICIALES

2.1. POLIEDROS

Haremos la siguiente convención: $0 \in \mathbb{N}$.

Definición 1. Consideremos a $\mathbb{R}^3$ y $x \in \mathbb{R}^3$.

- Llamaremos a x un *vértice*.
- Dados dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$, al segmento de recta que los une lo llamaremos *arista*. Toda arista contiene dos vértices.
- Dados tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^3$, al triángulo definido por dichos puntos lo llamaremos *cara*. Toda cara contiene tres aristas y tres vértices.

Definición 2. Un *poliedro* es un conjunto finito P de vértices, aristas y caras tal que:

- Si una arista está en P , entonces sus vértices están en P .
- Si una cara está en P , entonces sus vértices y aristas están en P .
- Si dos aristas en P se intersectan, lo hacen en un vértice.
- Si dos caras en P se intersectan, lo hacen en una sola arista.

Ejemplo 3. Consideremos un tetraedro armado como el de la Figura 2.1.

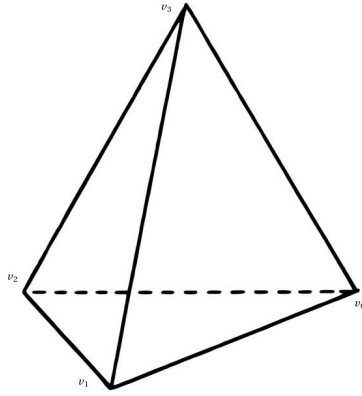


Figura 2.1: Tetraedro armado.

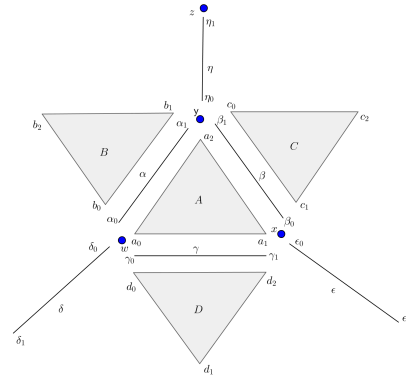


Figura 2.2: Tetraedro desarmado.

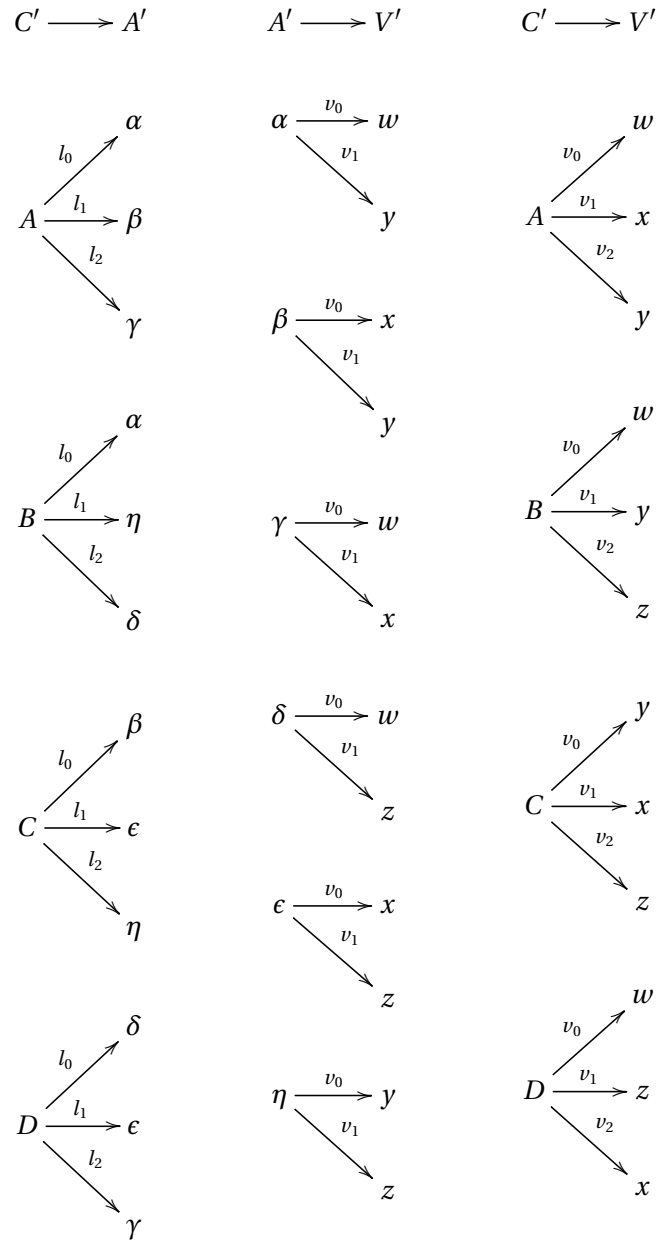
- Piezas. Mostramos las piezas del tetraedro en la Figura 2.2.
- Instrucciones de pegado. Damos el conjunto de vértices V , aristas A y caras C de la siguiente manera:

$$V' = \{w, x, y, z\}$$

$$A' = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta\}$$

$$C' = \{A, B, C, D\}.$$

Mostramos las instrucciones de pegado en el siguiente diagrama.



En el diagrama anterior, a cada cara de C' le asociamos tres aristas vía, l_0, l_1, l_2 , a cada arista de A' le asociamos dos vértices vía v_0, v_1 y también a cada cara de C' le asociamos tres vértices vía v_0, v_1, v_2 .

Este diagrama también se puede ver como funciones que asocian a cada cara tres aristas, a

cada arista dos vértices, etc. Esto se muestra a continuación.

$$C' \xrightarrow{L_0} A' \quad C' \xrightarrow{L_1} A' \quad C' \xrightarrow{L_3} A'$$

$$A \longrightarrow \gamma \quad A \longrightarrow \beta \quad A \longrightarrow \alpha$$

$$B \longrightarrow \alpha \quad B \longrightarrow \eta \quad B \longrightarrow \delta$$

$$C \longrightarrow \beta \quad C \longrightarrow \epsilon \quad C \longrightarrow \eta$$

$$D \longrightarrow \delta \quad D \longrightarrow \epsilon \quad D \longrightarrow \gamma$$

$$A' \xrightarrow{V_0} V' \quad A' \xrightarrow{V_1} V'$$

$$\alpha \longrightarrow w \quad \alpha \longrightarrow y$$

$$\beta \longrightarrow x \quad \beta \longrightarrow y$$

$$\gamma \longrightarrow w \quad \gamma \longrightarrow x$$

$$\delta \longrightarrow w \quad \delta \longrightarrow z$$

$$\epsilon \longrightarrow x \quad \epsilon \longrightarrow z$$

$$\eta \longrightarrow y \quad \eta \longrightarrow z$$

$$C' \xrightarrow{V_0} A' \quad C' \xrightarrow{V_1} A' \quad C' \xrightarrow{V_3} A'$$

$$A \longrightarrow w \quad A \longrightarrow x \quad A \longrightarrow y$$

$$B \longrightarrow w \quad B \longrightarrow y \quad B \longrightarrow z$$

$$C \longrightarrow y \quad C \longrightarrow x \quad C \longrightarrow z$$

$$D \longrightarrow w \quad D \longrightarrow z \quad D \longrightarrow x$$

2.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES EUCLIDIANOS

Empezamos dando algunas definiciones.

Definición 4. Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para todo $x, y \in C$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple que $L(t) = tx + (1 - t)y \in C$.

Definición 5. La *envolvente convexa* E_x de un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es el menor convexo que contiene a X , i.e., si A es un conjunto convexo tal que contiene a X , entonces $E_x \subset A$.

Definición 6. Si $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, decimos que están en posición general (o afinmente independientes) si los vectores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ son linealmente independientes.

Definición 7. Dados $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ en posición general, llamamos a su envolvente convexa un simplejo de dimensión k o un k -simplejo. Los puntos $v_0, v_1, \dots, v_k$ son llamados los vértices del simplejo.

Se tiene además el siguiente teorema.

Teorema 8. Un punto x está en la envolvente convexa de $V = v_0, v_1, \dots, v_k$ si y sólo si puede escribirse como combinación lineal de los elementos de V , i.e.,

$$x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$.

Los coeficientes λ_i se llaman coordenadas baricéntricas.

Definición 9. Definimos el n -simplejo estándar como

$$\Delta_n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \left| \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right. \right\}.$$

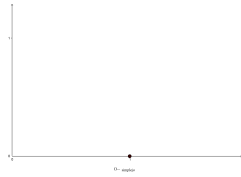


Figura 2.3: El 0-simplejo estándar

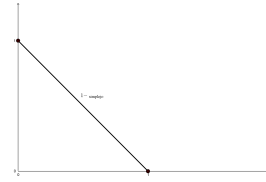


Figura 2.4: El 1-simplejo estándar

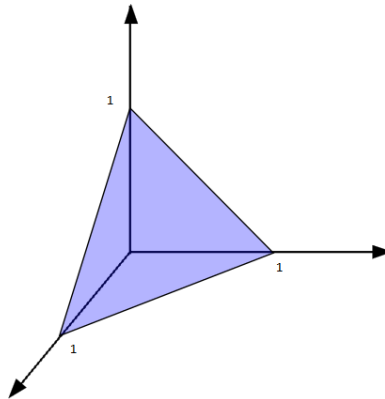


Figura 2.5: El 2-simplejo estándar

Note que las caras de un simplejo en $\mathbb{R}^n$ son las envolventes convexas de subconjuntos de su conjunto de vértices.

Las caras que no coinciden en el simplejo se llaman caras propias. Decimos que una cara es una r -cara si es un r -simplejo.

Ejemplo 10. Mostramos algunos simplejos y escribimos sus caras asociadas.



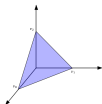
■

Un 0-simplejo tiene una 0-cara, él mismo.



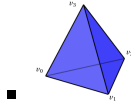
■

Un 1-simplejo digamos $\{v_0, v_1\}$ tiene dos caras propias (0-simplejos), a saber, $\{v_0\}$ y $\{v_1\}$ y una cara no propia $\{v_0, v_1\}$ que es un 1-simplejo.



■

Un 2-simplejo digamos $\{v_0, v_1, v_2\}$ tiene tres 0-caras (propias) a saber, $\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}$; también tiene tres 1-caras (propias) $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}$ y una 2-cara (no propia) que es $\{v_0, v_1, v_2\}$.



Un 3-simplejo digamos $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ tiene cuatro 0-caras a saber $\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$; tiene seis 1-caras $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}$; también tiene cuatro 2-caras que son $\{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_0, v_1, v_3\}$ y una 3-cara, a saber $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$.

Definición 11. Un complejo simplicial euclidiano es un conjunto finito K de simplejos de $\mathbb{R}^n$ tales que:

- Si un simplejo $A \in K$, entonces todas sus caras están en K .
- Si dos simplejos en K se intersectan, lo hacen en una cara común.

La dimensión de K es la máxima dimensión de sus simplejos.

Sea $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$.

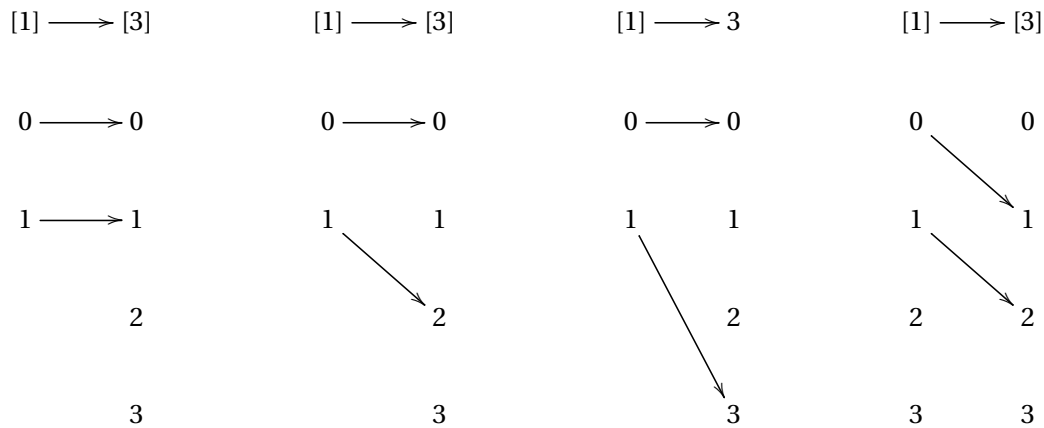
Sea A el n -simplejo generado por los $(n+1)$ puntos en $\mathbb{R}^N$, $v_0, v_1, \dots, v_n$. A cada subconjunto $I \subseteq [n]$ con $|I| = k + 1$ asociamos la i -ésima cara de A dada por la envolvente convexa de $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k} : i_j \in I\}$.

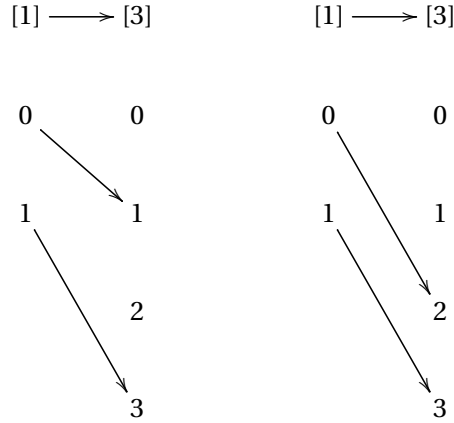
A veces conviene reemplazar a $I \subseteq [n]$ por una función monótona creciente

$$f : [k] \rightarrow [n]$$

con imagen I .

Ejemplo 12. Las 1-caras del 3-simplejo generado por v_0, v_1, v_2, v_3 .





Sea S un complejo simplicial euclidiano. Sea X_k el conjunto de k -simplejos de S . Entonces S se obtiene pegando simplejos de la siguiente manera:

- Para cada par $(n, I \subset [n])$ con $|I| = k+1$ se tiene una función $X_n \rightarrow X_k$ que especifica cual k -simplejo debe ser identificado con la I -ésima cara del correspondiente n -simplejo.
- Más precisamente: Sea $f: [k] \rightarrow [n]$ la función monótona creciente que corresponde a I , (i.e., $f([k])=I$) y sea $X(f): X_n \rightarrow X_k$ la correspondiente función de pegado. La familia $\{X(f)\}$ debe cumplir que :

$$X(id) = id$$

$$X(g \circ f) = X(f) \circ X(g).$$

Esto significa que a diferentes elementos de X_n les corresponden diferentes simplejos y que 'la cara de una cara es una cara'.

Ejemplo 13. (Complejos Simpliciales Euclidianos)

- Todo simplejo en $\mathbb{R}^n$ junto con todas sus caras
- El conjunto de todas las caras propias de un k -simplejo en $\mathbb{R}^n$ es un complejo simplicial euclidiano de dimensión $k-1$. (Es la frontera del k -simplejo.)
- El polígono regular contenido en $\mathbb{R}^2$ con vértices en las n -ésimas raíces de la unidad.
- Los sólidos platónicos.

Definición 14. Una función $f: K \rightarrow L$ entre complejos simpliciales euclidianos es llamada simplicial si la imagen de cada simplejo en K es un simplejo en L y la restricción de f a cualquier simplejo de K es lineal.

2.3. COMPLEJOS SIMPLICIALES ABSTRACTOS.

Definición 15. Un complejo simplicial abstracto es una pareja $K = (X, \Phi)$ dada por un conjunto finito X y una colección de subconjuntos no vacíos de X que denotamos por Φ tales que:

- Para todo $x \in X$, $\{x\} \in \Phi$
- Para todo $\sigma \in \Phi$ y para todo $\sigma' \subseteq \sigma$ con $\sigma' \neq \emptyset$, se cumple que $\sigma' \in \Phi$.

Los elementos de X son los vértices de K y los elementos de Φ son los simplejos de K . Note además que si σ es un simplejo de K , todo subconjunto no vacío de σ es una cara de σ . Por el segundo inciso de la definición, tenemos que todas las caras de simplejos en K son simplejos de K . Definimos la dimensión de K como la dimensión máxima de sus simplejos.

Ejemplo 16. El tetraedro $T = (X, \Phi)$.

Tenemos que

$$X = \{w, x, y, z\}$$

$$\Phi = \{\{w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}, \{w, y, z\}, \{w, x, z\}, \{w, x, y\}\}.$$

Note que 'ordenamos' al conjunto Φ de tal manera que primero aparecen los 0-simplejos, después los 1-simplejos y finalmente los 2-simplejos. Y se observa que $T = (X, \Phi)$ cumple con la definición de ser un complejo simplicial abstracto.

Definición 17. Un morfismo de complejos simpliciales

$$f: K = (X, \Phi) \rightarrow L = (Y, \Psi)$$

es una función de conjuntos $f: X \rightarrow Y$ tal que para todo $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \Phi$ se cumple que

$$f(\sigma) = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\} \in \Psi.$$

2.4. REALIZACIÓN GEOMÉTRICA.

Como K tiene un número finito de vértices, digamos n , podemos hacerlos corresponder con los vectores de la base estándar de $\mathbb{R}^n$. Entonces tomamos las envolventes convexas en $\mathbb{R}^n$ de los vectores que corresponden a simplejos de K para obtener un complejo simplicial euclidiano $K' \subseteq \mathbb{R}^n$ asociado a K .

Ejemplo 18. Pongamos $K = (X, \Phi)$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, y definamos a $\Phi \subseteq 2^X$ como

$$\Phi = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}.$$

Entonces la realización geométrica de K se muestra en la figura 2.1.

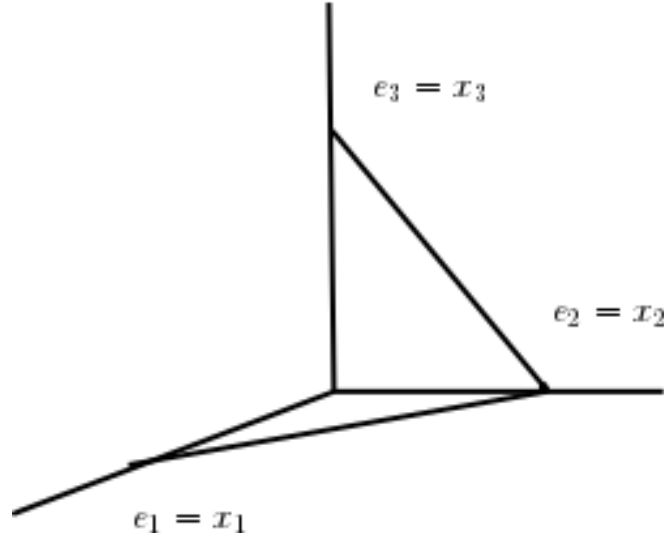


Figura 2.6: Realización geométrica.

2.5. CONJUNTOS SIMPLICIALES.

Definición 19. Un conjunto simplicial es una familia de conjuntos $X_\bullet = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y funciones $X(f) : X_n \rightarrow X_m$, una para cada función $f : [m] \rightarrow [n]$ no decreciente tales que las siguientes condiciones se satisfacen

$$X(id) = id,$$

$$X(g \circ f) = X(f) \circ X(g).$$

Aquí hay que notar que la única diferencia con la información de pegado de un complejo simplicial euclidiano es que f no es necesariamente una función estrictamente creciente.

Los elementos de X_n para cada $n \in \mathbb{N}$ son llamados n -simplejos.

Para cualquier función no decreciente $f : [m] \rightarrow [n]$ definimos la “ f -ésima cara” Δ_f como la aplicación lineal entre los simplejos estándar $\Delta_f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ que manda cualquier vértice $e_i \in \Delta_m$ en el vértice $e_{f(i)} \in \Delta_n$.

Aquí, los Δ_n son n -simplejos estándar.

Contrario a la situación de los complejos simpliciales euclidianos, Δ_f no necesariamente es un encaje; si f no es estrictamente creciente, entonces Δ_f decrece la dimensión al identificar algunos vértices de Δ_m .

Ejemplo 20. Considere $f : [2] \rightarrow [3]$ dada por

$$f(0) = f(1) = 0$$

y

$$f(2) = 1.$$

Definición 21. La realización geométrica $|X_\bullet|$ de un conjunto simplicial $\{X_n\}$ es el espacio topológico con conjunto subyacente

$$\bigsqcup_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_n) / R$$

donde R es la relación de equivalencia más débil que identifica los puntos $(s, x) \in \Delta_n \times X_n$ y $(t, y) \in \Delta_m \times X_m$ si

$$y = X(f)x, \quad s = \Delta_f(t)$$

para alguna función no decreciente $f : [m] \rightarrow [n]$. Escribiremos esta condición como

$$(t, y) \mapsto (s, x).$$

La topología en $|X_\bullet|$ es la más débil para la cual la factorización por R es continua.

Ahora mostraremos los morfismos de conjuntos simpliciales.

Sean X, X' conjuntos simpliciales. Una aplicación simplicial $F : X \rightarrow X'$ es una familia de aplicaciones $F_n : X_n \rightarrow X'_n$ para $n = 0, 1, \dots$ que satisfacen la siguiente condición: para cada función no decreciente $f : [m] \rightarrow [n]$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{F_n} & X'_n \\ X(f) \downarrow & & \downarrow X'(f) \\ X_m & \xrightarrow{F_m} & X'_m \end{array}$$

es conmutativo.

Tenemos que F induce una aplicación continua en las realizaciones geométricas:

$$|F| : |X| \rightarrow |X'|.$$

Sea

$$\tilde{F} : \bigsqcup_n \Delta_n \times X_n \rightarrow \bigsqcup_n \Delta_n \times X'_n$$

dada por

$$\tilde{F}(s, x) = (s, F_n(x)).$$

Se puede ver que F manda puntos equivalentes en puntos equivalentes, por lo tanto induce la aplicación $|F|$. Se puede ver también que $|id| = id$ y $|F \circ G| = |F| \circ |G|$.

Ejemplo 22. Considere el 0-simplejo y el 1-simplejo dados respectivamente por $X_0 = \{w, x, y, z\}$ y $X_1 = \{(w, x), (w, y), (w, z)\}$, donde entendemos a, digamos, (w, x) como el simplejo ordenado $\{w, x\}$.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{X(f_{[0]})} & X_0 \\ (w, x) & \mapsto & w \\ (w, y) & \mapsto & w \\ (w, z) & \mapsto & w \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{X(f_{[1]})} & X_0 \\ (w, x) & \mapsto & x \\ (w, y) & \mapsto & y \\ (w, z) & \mapsto & z \end{array}$$

Ejercicio. Encontrar la realización geométrica del conjunto simplicial $X_0 = \{w, x, y, z\}$, $X_1 = \{(w, x), (w, y), (x, z), (y, z)\}$, $X_2 = \{(w, x, y)\}$.

3. TEORÍA DE CATEGORÍAS.

3.1. CATEGORÍAS

Definición 23. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de una clase de objetos y para cada pareja ordenada de objetos (A, B) un conjunto de morfismos $\mathcal{C}(A, B)$ con dominio A y codominio B .

Si $f \in \mathcal{C}(A, B)$, escribimos $f : A \rightarrow B$.

Para cada terna de objetos A, B, C existe una función

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$$

que asocia a cada pareja de morfismos $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ su composición:

$$g \circ f : A \rightarrow C.$$

Se satisfacen los siguientes axiomas:

- (Asociatividad.) Si $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : A \rightarrow D.$$

- (Identidad.) Para todo objeto B , existe un morfismo

$$1_B : B \rightarrow B$$

tal que si $f : A \rightarrow B$, y $g : B \rightarrow C$ entonces

$$1_B \circ f = f,$$

$$g \circ 1_B = g.$$

Ejemplo 24. Se muestran algunas categorías señalando sus objetos y morfismos.

- **Sets**;
 - Objetos: Conjuntos
 - Morfismos: $\mathbf{Sets}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \text{ funciones}\}$
- **Top**;
 - Objetos: Espacios topológicos.
 - Morfismos: $\mathbf{Top}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ aplicación continua}\}$
- **EV**;
 - Objetos: Espacios vectoriales.
 - Morfismos: $\mathbf{EV}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \text{ transformación lineal}\}$
- **Gr**;

- Objetos: Grupos.
- Morfismos: $\mathbf{Gr}(G, H) = \{\phi : G \rightarrow H \text{ homomorfismo de grupos}\}$
- **R-mod**; Sea R un anillo.
 - Objetos: Módulos izquierdos.
 - Morfismos: $\mathbf{R-mod}(X, Y) = \{\phi : X \rightarrow Y \text{ homomorfismo de R-módulos}\}$
- **Pset**;
 - Objetos: Conjuntos parcialmente ordenados.
 - Morfismos: $\mathbf{Pset}(X, Y) = \{f : A \rightarrow B \text{ aplicación monótona}\}$
- **Csimp**;
 - Objetos: Complejos Simpliciales.
 - Morfismos: $\mathbf{Csimp}(K, L) = \{f : K \rightarrow L \text{ aplicación simplicial}\}$

Definición 25. Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es pequeña si $\mathbf{obj}\mathcal{C}$ es un conjunto.

Ejemplo 26. Mostramos ejemplos de categorías pequeñas.

- Sea G un grupo. Definimos una categoría $\mathcal{G}$ por $\mathbf{obj}\mathcal{G} = \{*\}$, $\mathbf{hom}_{\mathcal{G}}\{*, *\} = G$. La composición la consideramos igual al producto de G y la identidad es $e \in G$. Decimos que $\mathcal{G}$ es la categoría asociada a G .
- Sea X un espacio topológico. Definimos una categoría $\mathcal{X}$ con $\mathbf{obj}\mathcal{X} = X$ y $\mathbf{hom}_{\mathcal{X}}(x, y)$ el conjunto de clases de homotopía de caminos continuos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. La composición se define como la concatenación usual entre caminos y la identidad es el camino constante con valor x .

Definición 27. Para una categoría $\mathcal{C}$, y $f \in \mathcal{C}(A, B)$, decimos que f es un isomorfismo si existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que

$$g \circ f = 1_A$$

$$f \circ g = 1_B.$$

3.2. FUNTORES.

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un funtor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ asocia a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ un objeto $T(A) \in \mathcal{D}$ y a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ le asocia un morfismo $T(f) : T(A) \rightarrow T(B)$ (o bien $T(f) : T(B) \rightarrow T(A)$) tal que:

- $T(1_A) = 1_{T(A)}$
- $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$, (o bien $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$).

Definición 28. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que F es

- fiel, si para cada $A, B \in \text{obj}\mathcal{C}$, el mapa $F : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(FA, FB)$ es inyectivo.
- plena, si para cada $A, B \in \text{obj}\mathcal{C}$, el mapa $F : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(FA, FB)$ es suprayectivo.

Definición 29. Una categoría concreta es un par $(\mathcal{C}, U)$ tal que

- $\mathcal{C}$ es una categoría
- $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un functor fiel.

Ejemplo 30. Mostramos algunos ejemplos de categorías concretas.

- Si $\mathcal{C}$ es una categoría concreta, existe un functor $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, que manda un objeto A en $\mathcal{C}$, que es un conjunto con estructura, a el mismo conjunto pero sin estructura. Este functor se llama functor de olvido.
- El functor que va de $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ que dota a un conjunto con la topología discreta.

Ejemplo 31. Ejemplo de categoría no concreta.

Considere la categoría **hTop** cuyos objetos son espacios topológicos y dados X, Y espacios topológicos, los morfismos de **hTop** son todas las clases de equivalencia de una función continua $f : X \rightarrow Y$ donde la equivalencia está dada por la homotopía, i.e., todas las funciones homotópicas a f . Esta categoría no es concreta, pues los morfismos no son funciones si no clases de funciones.

3.3. TRANSFORMACIONES NATURALES

Podemos comparar funtores. Sean $T_1, T_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores de la misma varianza (variantes o covariantes).

Definición 32. Una *transformación natural* ϕ entre T_1 y T_2 , digamos $\phi : T_1 \rightarrow T_2$ asocia a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un morfismo

$$\phi(A) : T_1(A) \rightarrow T_2(A)$$

en $\mathcal{D}$ de tal manera que para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_1(A) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(B) \\ \phi(A) \downarrow & & \downarrow \phi(B) \\ T_2(A) & \xrightarrow{T_2(f)} & T_2(B) \end{array}$$

es conmutativo.

Si $\phi(A)$ es isomorfismo se llama equivalencia natural.

Ejemplo 33. Ejemplo de transformacion natural.

Considere la categoría $\mathbf{Gr}$ cuyos objetos son los grupos, y sus morfismos son los homomorfismos de grupos. Considere el funtor identidad $id_{\mathbf{Gr}}$ que manda a cada objeto $(G, *)$ en $(G, *)$ y cada morfismo $f : G \rightarrow H$ en $f : G \rightarrow H$.

Por otro lado considere el funtor op que manda a cada objeto $(G, *)$ en $(G^{op}, *^{op})$, donde $G^{op} = G$ y para cada $a, b \in G = G^{op}$ se cumple que $a *^{op} b = b * a$. Note que $(G^{op}, *^{op})$ es un grupo.

Además, a cada morfismo $f : G \rightarrow H$ lo manda a $f^{op} = f : G \rightarrow H$. Ciertamente, f^{op} es un morfismo -que en este caso es un homomorfismo de grupos- como podemos ver a continuación:

$$\begin{aligned} f^{op}(a *^{op} b) &= f^{op}(b * a) \\ &= f(b * a) \\ &= f(b) * f(a) \\ &= f(a) *^{op} f(b) \\ &= f^{op}(a) *^{op} f^{op}(b). \end{aligned}$$

Ahora proponemos a la que cumplirá el papel de transformación natural entre $id_{\mathbf{Gr}}$ y op , a saber $\eta_G : id_{\mathbf{Gr}} \rightarrow^{op}$ dada para cada $G \in \mathbf{Gr}$ y $a \in G$ por $\eta_G(a) = a^{-1}$. Es claro que η_G es un homomorfismo de grupos.

Ahora sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Tenemos que para cada $a \in G$ tenemos que $f(a) = h$ para algún $h \in H$. Luego $\eta_H(f(a)) = \eta_H(h) = h^{-1}$. Por otro lado, $\eta_G(a) = a^{-1}$ y $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} = h^{-1}$.

Así tenemos que para cada $f : G \rightarrow H$ el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \eta_G \downarrow & & \downarrow \eta_H \\ G^{op} & \xrightarrow{f^{op}} & H^{op} \end{array}$$

es conmutativo y por tanto η es una transformación natural entre $id_{\mathbf{Gr}}$ y op .

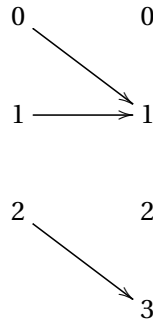
4. OBJETOS SIMPLICIALES

4.1. LA CATEGORÍA Δ

Los objetos de Δ son los objetos de la forma $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ los cuales están ordenados con el orden usual entre enteros. Un Δ -morfismo $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ es una función monótona no

decreciente. Se permiten valores iguales, por ejemplo

$$\alpha : [2] \longrightarrow [3]$$



El conjunto de Δ -morfismos de $[m]$ a $[n]$ se denota $\delta([m], [n])$ y si nos referimos a los Δ -morfismos inyectivos o sobreyectivos ponemos respectivamente $\Delta^{inj}([m], [n])$ y $\Delta^{suj}([m], [n])$.

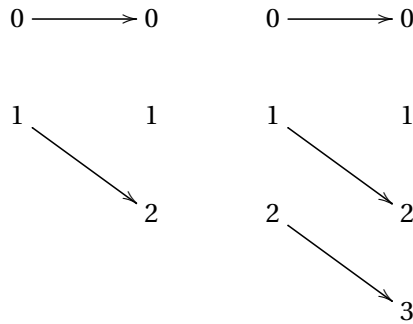
Definición 34. El morfismo cara $\delta_i^m : [m-1] \rightarrow [m]$ se define para $m \geq 1$ y $0 \leq i \leq m$ por

$$\delta_i^m = \begin{cases} j, & \text{si } j < i \\ j+1, & \text{si } j \geq i. \end{cases}$$

El morfismo cara δ_i^m es el único morfismo inyectivo de $[m-1]$ a $[m]$ tal que el número i no está en la imagen.

Ejemplo 35. Considere a las funciones $\delta_1^2 : [1] \rightarrow [2]$ y $\delta_1^3 : [2] \rightarrow [3]$ dadas por

$$\delta_1^2 : [1] \longrightarrow [2] \qquad \delta_1^3 : [2] \longrightarrow [3]$$



Los morfismos cara generan a los morfismos inyectivos, de hecho de manera única si se pide una condición.

Proposición 1. Todo Δ -morfismo inyectivo $\alpha \in \Delta^{inj}([m], [n])$ tiene una representación única

$$\alpha = \delta_{i_n}^n \circ \dots \circ \delta_{i_{m+1}}^{m+1}$$

que satisface la relación $i_n > i_{n-1} > \dots > i_{m+1}$.

Demostración. El conjunto de índices $\{i_{m+1}, \dots, i_n\}$ es exactamente la diferencia $[n] - \alpha([m])$, es decir, el conjunto de números donde falla la suprayectividad. $\square$

Ejemplo 36. El morfismo $\alpha : [2] \rightarrow [5]$ con imagen $\{0, 2, 4\}$ se puede escribir como $\alpha = \delta_5 \delta_3 \delta_1$

$$[2] \xrightarrow{\delta_1^3} [3] \xrightarrow{\delta_3^4} [4] \xrightarrow{\delta_5^5} [5]$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 \\ & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ & & & & & & & & \\ & & & & \searrow & & & & \\ & & & & & 4 & \longrightarrow & 4 \end{array}$$

5

Tenemos además que si dos morfismos cara están compuestos en el orden equivocado se pueden intercambiar:

$$\delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i, \text{ si } j \geq i.$$

Ejemplo 37. Tenemos la siguiente igualdad entre morfismos cara

$$\delta_1^4 \circ \delta_2^3 = \delta_3^4 \circ \delta_1^3.$$

$$[2] \xrightarrow{\delta_2^3} [3] \xrightarrow{\delta_1^4} [4] \qquad [2] \xrightarrow{\delta_2^3} [3] \xrightarrow{\delta_1^4} [4]$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & 1 & & 1 & & 1 \\ & & \searrow & & \searrow & & \longrightarrow \\ 2 & & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ 3 & & 3 & & 3 & & 3 \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ & & 4 & & 4 & & 4 \end{array}$$

Iterando esto podemos calcular por ejemplo

$$\delta_0 \circ \delta_2 \circ \delta_4 \circ \delta_6 = \delta_9 \circ \delta_6 \circ \delta_3 \circ \delta_0$$

que se puede corroborar vía la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \delta_0 \circ \delta_2 \circ \delta_4 \circ \delta_6 &= \delta_3 \circ \delta_0 \circ \delta_4 \circ \delta_6 \\ &= \delta_3 \circ \delta_5 \circ \delta_0 \circ \delta_6 \\ &= \delta_3 \circ \delta_5 \circ \delta_7 \circ \delta_0 \\ &= \delta_6 \circ \delta_3 \circ \delta_7 \circ \delta_0 \\ &= \delta_6 \circ \delta_8 \circ \delta_3 \circ \delta_0 \\ &= \delta_9 \circ \delta_6 \circ \delta_3 \circ \delta_0. \end{aligned}$$

Definición 38. El morfismo degeneración $\eta_i^m : [m+1] \rightarrow [m]$ se define para $m \geq 0$ y $0 \leq i \leq m$ por:

$$\eta_i^m = \begin{cases} j, & \text{si } j \leq i \\ j+1, & \text{si } j > i. \end{cases}$$

El morfismo degeneración η_i^m es el único morfismo suprayectivo de $[m+1]$ a $[m]$ tal que el número i tiene dos preimágenes.

Ejemplo 39. Mostramos los siguientes morfismos degeneración.

$$\begin{array}{ccc} [2] & \xrightarrow{\eta_1^1} & [1] \\ \\ 0 & \longrightarrow & 0 \\ \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \nearrow & \\ \\ [3] & \xrightarrow{\eta_2^2} & [2] \\ \\ 0 & \longrightarrow & 0 \\ \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \nearrow & \end{array}$$

Los morfismos degeneración generan a los morfismos suprayectivos de manera única si se pide una condición.

Proposición 2. Todo Δ -morfismo suprayectivo $\alpha \in \Delta^{sjr}([m], [n])$ tiene una expresión única

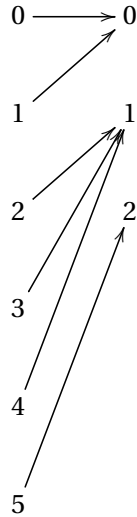
$$\alpha = \eta_{i_n}^n \circ \dots \circ \eta_{i_{m-1}}^{m-1}$$

que satisface la relación $i_n < i_{n+1} < \dots < i_{m-1}$.

Demostración. El conjunto de índices $\{i_n, \dots, i_{m-1}\}$ es exactamente el conjunto de índices j tales que $\alpha(j) = \alpha(j+1)$, es decir, los índices donde falla la inyectividad. $\square$

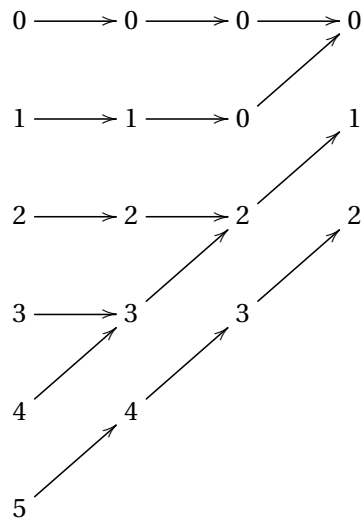
Ejemplo 40. El morfismo

$$[5] \xrightarrow{\alpha} [2]$$



se puede escribir como $\alpha = \eta_0^2 \circ \eta_2^3 \circ \eta_3^4$ como se puede observar a continuación

$$[5] \xrightarrow{\eta_3^4} [4] \xrightarrow{\eta_2^3} [3] \xrightarrow{\eta_0^2} [2]$$



Si dos morfismos degeneración están compuestos en el orden equivocado se pueden intercambiar de la siguiente manera:

$$\eta_i \circ \eta_j = \eta_j \circ \eta_{i+1}$$

si $i \geq j$.

Ejemplo 41. Los morfismos degeneración se pueden intercambiar.

$$\begin{array}{ccc}
 [4] \xrightarrow{\eta_1^3} [3] \xrightarrow{\eta_2^2} [2] & & [4] \xrightarrow{\eta_3^3} [3] \xrightarrow{\eta_1^2} [2] \\
 \\
 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 & & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\
 & \nearrow & & & \\
 2 & & 2 & \longrightarrow & 2 \\
 & \nearrow & & \nearrow & \\
 3 & & 3 & & 3 \\
 & \nearrow & & & \\
 4 & & & &
 \end{array} & & \begin{array}{ccccc}
 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\
 & & & \nearrow & \\
 2 & \longrightarrow & 2 & & 2 \\
 & & & \nearrow & \\
 3 & \longrightarrow & 3 & & 3 \\
 & \nearrow & & & \\
 4 & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

Iterando este proceso podemos calcular por ejemplo:

$$\eta_3 \circ \eta_3 \circ \eta_2 \circ \eta_2 = \eta_2 \circ \eta_3 \circ \eta_5 \circ \eta_6$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \eta_3 \circ \eta_3 \circ \eta_2 \circ \eta_2 &= \eta_3 \circ \eta_4 \circ \eta_2 \circ \eta_2 \\
 &= \eta_3 \circ \eta_2 \circ \eta_5 \circ \eta_2 \\
 &= \eta_2 \circ \eta_4 \circ \eta_5 \circ \eta_2 \\
 &= \eta_2 \circ \eta_4 \circ \eta_2 \circ \eta_6 \\
 &= \eta_2 \circ \eta_2 \circ \eta_5 \circ \eta_6 \\
 &= \eta_2 \circ \eta_3 \circ \eta_5 \circ \eta_6.
 \end{aligned}$$

Luego tenemos la siguiente

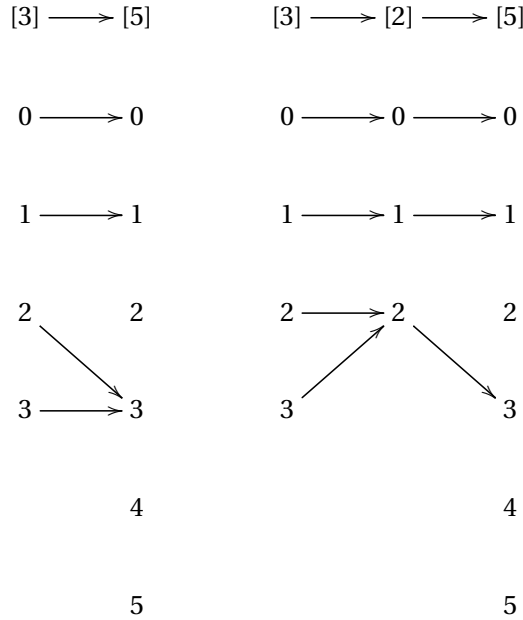
Proposición 3. *Todo Δ -morfismo α puede ser Δ -descompuesto de manera única;*

$$\alpha = \beta \circ \gamma$$

con β inyectivo y γ suprayectivo.

Demostración. El Δ -objeto intermedio $[k]$ necesariamente satisface $k+1 = |Im(\alpha)|$. Las condiciones en los índices dan la unicidad de β y γ . $\square$

Ejemplo 42. Descomposición de un Δ -morfismo.



Corolario 1. Todo Δ -morfismo $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ tiene una expresión única

$$\alpha = \delta_{i_n} \circ \dots \circ \delta_{i_{k+1}} \circ \eta_{j_k} \circ \dots \circ \eta_{j_{m-1}}$$

que satisface las condiciones $i_n > \dots > i_{k+1}$ y $j_k < \dots < j_{m-1}$.

Finalmente, si los morfismos cara y degeneración están compuestos en el orden equivocado, se pueden intercambiar de acuerdo a la forma siguiente:

$$\eta_i \circ \delta_j = \begin{cases} id, & \text{si } j = i \text{ o } j = i + 1 \\ \delta_{j-1} \circ \eta_i, & \text{si } j \geq i + 2 \\ \delta_j \circ \eta_{i-1}, & \text{si } j < i. \end{cases}$$

Estas relaciones de conmutación pueden usarse para convertir cualquier composición de morfismos cara y degeneración en las expresiones canónicas:

$$\alpha = \eta_9 \circ \delta_6 \circ \eta_3 \circ \delta_7 \circ \eta_9 \circ \delta_8 \circ \eta_6 \circ \delta_2 \circ \eta_4 \circ \delta_9 = \delta_7 \circ \delta_6 \circ \eta_2 \circ \eta_4 \circ \eta_6.$$

Esta relación significa que la imagen de α no contiene a $\{2, 6, 7\}$ y $\alpha(2) = \alpha(3)$, $\alpha(4) = \alpha(5)$ y $\alpha(6) = \alpha(7)$.

4.2. CONJUNTOS SIMPLICIALES

Definición 43. Un conjunto simplicial es un funtor contravariante $X : \Delta \rightarrow \mathbf{Sets}$, es decir, una colección $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos y colecciones de funciones $\{X(\delta_i^m) : X_m \rightarrow X_{m-1}\}_{m \geq 1, 0 \leq i < m}$ y $\{X(\eta_i^m) : X_m \rightarrow X_{m-1}\}_{m \geq 1, 0 \leq i < m}$ que satisfacen las siguientes relaciones de conmutatividad:

$$\begin{aligned} X(\delta_i) \circ X(\delta_j) &= X(\delta_j) \circ X(\delta_{i+1}), \text{ si } i \geq j \\ X(\eta_i) \circ X(\eta_j) &= X(\eta_{j+1}) \circ X(\eta_i), \text{ si } j \geq i \\ X(\delta_i) \circ X(\eta_j) &= id, \text{ si } i = j, j + 1 \\ X(\delta_i) \circ X(\eta_j) &= X(\eta_{j-1}) \circ X(\delta_i), \text{ si } j > i \\ X(\delta_i) \circ X(\eta_j) &= X(\eta_j) \circ X(\delta_{i-1}), \text{ si } i > j + 1. \end{aligned}$$

Si α es un Δ -morfismo arbitrario, es suficiente expresar a α como composición de morfismos cara y degeneración, la imagen $X(\alpha)$ es la composición de las imágenes de los correspondientes $X(\delta_i)$ y $X(\eta_i)$. Las relaciones anteriores garantizan que la definición es coherente.

4.3. SIMPLEJOS SINGULARES.

Sea Y un espacio topológico. Podemos asociar a Y un conjunto simplicial llamado el conjunto simplicial de simplejos singulares.

Definición 44. Un n -simplejo singular de Y es una aplicación continua del n -simplejo estándar a Y dado por $\rho : \Delta_n \rightarrow Y$.

Sea SX_n el conjunto de todos los n -simplejos singulares de Y para $n = 0, 1, \dots$

Dada $f : [m] \rightarrow [n]$ tenemos $\Delta_f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ definimos $X(f) : SX_n \rightarrow SX_m$ dada por

$$X(f)(\rho) = \rho \circ \Delta_f : \Delta_m \xrightarrow{\Delta_f} \Delta_n \xrightarrow{\rho} Y.$$

Este conjunto simplicial es el origen de la homología singular de espacios topológicos.

REFERENCIAS

- [1] Davide L. Ferrario and Renzo A. Piccinini. *Simplicial structures in topology*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011. Translated from the 2009 Italian original by Maria Nair Piccinini.
- [2] Rudolf Fritsch and Renzo A. Piccinini. *Cellular structures in topology*, volume 19 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [3] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992. Reprint of the 1967 original.