XI Escuela de Verano en Matemáticas

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
UNIDAD CUERNAVACA

(30 de junio al 4 de julio del 2014)

¿Qué dice la conjetura de Poincaré?

José Luis Cisneros Molina

Índice general

Prefacio

Las presentes notas cubren el contenido del minicurso "¿Qué dice la conjetura de Poincaré?" impartido en la "XI Escuela de Verano en Matemáticas" que se llevó a cabo del 30 de junio al 4 de Julio de 2014 en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

El curso consistió en tres clases de hora y media cada una, las cuales corresponden a cada uno de los capítulos de las notas. El objetivo del curso es usar como pretexto el explicar que dice la conjetura de Poincaré para dar una breve introducción a la Topología Algebraica.

El objetivo del primer capítulo es plantear el problema de clasificar espacios topológicos, mediante homeomorfismo o equivalencia homotópica. Para ello se explica el concepto de invariante topológico; como primer ejemplo de dichos invairantes se define el conjunto de componentes arco-conexas de un espacio topológico para ello se dan todas las definiciones necesarias como lo son: caminos, homotopías y homotopías relativas.

El objetivo del segundo capítulo es definir el grupo fundamental de un espacio topológico y su generalización a los grupos de homotopía superiores.

En el tercer capítulo se definen los grupos de homología simplicial y se plantea la primera versión de la Conjetura de Poincaré. Posteriormente se construye la Esfera Homológica de Poincaré y finalmente se enuncia la Conjetura de Poincaré.

Como requisitos se suponen únicamente los conocimientos de cursos básicos de Topología y Álgebra (Teoría de Grupos) de licenciatura.

Espero que estas notas sirvan como una pequeña introducción al mundo de la Topología Algebraica. Al final se da una pequeña bibliografía donde se pueden estudiar más a fondo estos temas y tópicos relacionados, por ejemplo, para resultados de Topología Básica se puede consultar [4] y para profundizar más sobre el Grupo Fundamental y otros tópicos de Topología Algebraica se recomiendan [5] y [3]. Cualquier comentario o sugerencia para mejorar estas notas será bienvenido (`jlcm@matcuer.unam.mx`).

José Luis Cisneros Molina

Capítulo 1

Componentes arco-conexas

En matemáticas, uno de los problemas principales consiste en clasificar los objetos de estudio. Para ello, generalmente se define una noción de equivalencia —dependiendo de las propiedades que nos interesen— entre dichos objetos. Un problema fundamental consiste en, dados dos objetos, determinar si éstos son equivalentes o no. Por ejemplo, en geometría plana, si las propiedades que nos interesan son el tamaño y la forma, la noción de equivalencia estaría dada por el concepto de *congruencia*, así dos objetos (polígonos por ejemplo) serán equivalentes si y sólo si éstos son congruentes, es decir, si tienen la misma forma y tamaño (Figura 1.1).

Figura 1.1: Triángulos congruentes

Si lo que nos interesa es únicamente la forma, la noción de equivalencia será la de *semejanza* y de esta manera, dos objetos serán equivalentes, si son proporcionales, no importando así su tamaño (Figura 1.2).

En el caso de la topología, la noción de equivalencia es la de *homeomorfismo*:

Dos espacios topológicos son **homeomorfos** (o equivalentes) si existe entre ellos una aplicación invertible, donde ella y su inversa sean continuas. Dichas aplicaciones son llamadas **homeomorfismos**. Intuitivamente, esto quiere decir que podemos "deformar continuamente" uno de los espacios hasta obtener el otro.

El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no, utilizando directamente la definición de homeomorfismo, puede ser muy difícil:

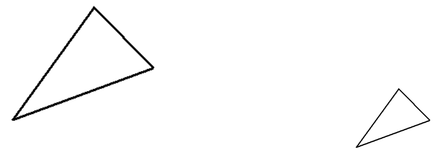


Figura 1.2: Triángulos semejantes

- Para probar que son homeomorfos, tenemos que dar un homeomorfismo entre ellos, lo cual puede ser nada fácil.
- Para probar que no lo son tenemos que demostrar que no existe *ningún* homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede ser aún más difícil.

Otra forma más fácil de atacar el problema, consiste en buscar propiedades de los espacios topológicos que se preserven bajo homeomorfismo, de esta manera, si uno de los espacios posee dicha propiedad y el otro no, entonces **no** pueden ser homeomorfos.

Ejemplos de dichas propiedades son la *compacidad* y la *conexidad*. Veamos algunos ejemplos de esta técnica.

Recordemos que por el Teorema de Heine-Borel, dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son **compactos** si y sólo si son cerrados y acotados. Usando el concepto de compacidad podemos ver que la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo unitario S^1 *no* son homeomorfos, ya que S^1 es un espacio compacto, lo que equivale a decir que como subconjunto del plano euclideano es cerrado y acotado, mientras que $\mathbb{R}$ no es compacto por no ser acotado.

Ahora usemos el concepto de conexidad. Intuitivamente, el que un espacio sea conexo significa que conste de un sólo "pedazo". Denotemos por $\mathbb{R}^n$ al espacio euclideano n-dimensional. Veamos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, no son homeomorfos. A primera vista, parece que la conexidad no nos ayuda a probar nuestra afirmación, ya que ambos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son conexos, pero nos valemos del siguiente truco: supongamos que existe un homeomorfismo ϕ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, si quitamos un punto p de $\mathbb{R}$ y su imagen bajo ϕ en $\mathbb{R}^n$ entonces seguiremos teniendo un homeomorfismo entre $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(p)\}$. Esto es imposible, ya que al quitarle un punto a $\mathbb{R}$ éste se separa en dos "pedazos", es decir, deja de ser conexo, mientras que $\mathbb{R}^n$ menos un punto no se separa. Por lo tanto, concluimos que no puede existir un homeomorfismo entre dichos espacios. Sin embargo, ésta técnica no sirve para ver en general que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$ y $n, m \geq 2$, *no* son homeomorfos, ya que $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es siempre conexo para $n \geq 2$. Para ello fueron necesarias nuevas técnicas. La búsqueda de dichas técnicas dio origen a la topología algebraica.

La idea principal en topología algebraica es la de *invariante topológico*, la cual consiste en que a cada espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico $h(X)$ (número, conjunto, grupo, espacio vectorial, módulo, etc.) y a cada función continua f entre dos espacios topológicos X e Y, se le asocia una función $h(f) : h(X) \to h(Y)$ que preserva la estructura algebraica en cuestión (*isomorfismo*), de tal manera que si X e Y son homeomorfos, entonces $h(X)$ y $h(Y)$ son isomorfos, es decir, equivalentes como objetos algebraicos. Por lo tanto, si dos espacios X e Y son tales que $h(X) \neq h(Y)$, es decir, sus invariantes topológicos son distintos, entonces X e Y *no* pueden ser homeomorfos. Ejemplos de invariantes topológicos son los grupos de homotopía y los grupos de homología, los cuales definiremos más adelante.

1.1. Homotopía y equivalencia homotópica

El problema de clasificar espacios topológicos mediante homeomorfismo es muy difícil. Lo que podemos hacer, y que generalmente es suficiente para muchas aplicaciones, es debilitar la relación de equivalencia con la cual queremos clasificar los espacios topológicos, mediante un concepto que generalice la noción de homeomorfismo, de manera análoga a como se generalizó la noción de *polígonos congruentes* a *polígonos semejantes*. Para ello, necesitamos el concepto central de la teoría de homotopía:

Denotaremos por I al intervalo $[0,1]$. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que dos aplicaciones continuas de X a Y, $f_0, f_1 \colon X \to Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua

$$F \colon X \times I \to Y,$$

tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f_0(x) \\ F(x,1) &= f_1(x). \end{aligned}$$

La aplicación F se llama una **homotopía** entre f_0 y f_1 y la denotaremos por $f_0 \simeq f_1$ o $F \colon f_0 \simeq f_1$.

Para cada $t \in I$ definimos $f_t \colon X \to Y$ por

$$f_t(x) = F(x,t),$$

la cual es una aplicación continua. De esta forma, podemos pensar al parámetro t como al tiempo. Entonces, al tiempo $t = 0$ tenemos la aplicación f_0 y cuando t varía, la aplicación f_t varía continuamente de tal forma que al tiempo $t = 1$ obtenemos la aplicación f_1. Por esta razón se dice que una homotopía es una deformación continua de una aplicación.

Una aplicación $f \colon X \to Y$ que es homotópica a la aplicación constante se dice que es **nulhomotópica** y la homotopía entre ambas se dice que es una **nulhomotopía**.

1.1.1. Homotopía relativa

Dos aplicaciones $f_0, f_1 \colon X \to Y$ son **homotópicas relativamente** a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía

$$F \colon X \times I \to Y$$

entre f_0 y f_1 tal que

$$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a), \qquad \forall a \in A, \quad \forall t \in I,$$

es decir, para todo $a \in A$, $F(a,t)$ no depende de $t \in I$. Denotaremos esto por $f_0 \simeq f_1(\operatorname{rel} A)$ o $f_0 \simeq_{\operatorname{rel} A} f_1$.

1.1 Nota. Si $A = \emptyset$ entonces una homotopía relativa a A no es otra cosa que una homotopía.

1.2 Ejemplo. Sean X y Y espacios topológicos. Denotemos por $M(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones continuas de X a Y. Demuestra que $\simeq_{\operatorname{rel} A}$ es una relación de equivalencia en $M(X,Y)$.

1.1.2. Equivalencia Homotópica

Utilizando el concepto de aplicaciones homotópicas definimos la relación de equivalencia entre espacios topológicos que es más débil que la relación de equivalencia dada por homeomorfismos llamada **equivalencia homotópica**.

Se dice que dos espacios X y Y son **del mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas $f \colon X \to Y$ y $g \colon Y \to X$ tales que

$$gf \simeq 1 \colon X \to X,$$
$$fg \simeq 1 \colon Y \to Y.$$

Las aplicaciones f y g son llamadas **equivalencias homotópicas**. Diremos también que X y Y son **homotópicamente equivalentes** y lo denotaremos por $X \simeq Y$. Intuitivamente, dos espacios son homotópicamente equivalentes si uno puede ser deformado en el otro contrayendo o encogiendo.

1.3 Ejemplo. Demuestra que $\simeq$ es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.

1.4 Ejemplo. La esfera de dimensión $n-1$, $S^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \,\}$ y el espacio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ son homotópicamente equivalentes.

Sea $f \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la inclusión y $g \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Tenemos que $g \circ f = 1 \colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ y $F \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $F(x,t) = \frac{x}{t(\|x\|-1)+1}$ es una homotopía entre la identidad de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $f \circ g$.

Se dice que un espacio X es **contraíble** si es homotópicamente equivalente a un punto. Intuitivamente un espacio es contraíble si puede deformarse en sí mismo a un punto.

1.5 Ejemplo. Ejemplos de espacios contraíbles son los siguientes:

- El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$.
- El n-disco cerrado $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$.
- En n-disco abierto $E^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$.
- Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

1.6 Ejemplo. Otro ejemplo de espacios homotópicamente equivalentes son el cilindro C y la circunferencia S^1:

$$\begin{aligned} C &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1 \}, \\ S^1 &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 0 \}. \end{aligned}$$

Sea $i\colon S^1 \to C$ la inclusión y $r\colon C \to S^1$ dada por $r(x,y,z) = (x,y,0)$. Obviamente $ri = 1\colon S^1 \to S^1$, mientras que la aplicación $F\colon C \times I \to C$ definida por $F((x,y,z),t) = (x,y,tz)$ es una homotopía entre ir y $1\colon C \to C$.

Los Ejemplos 1.4 y 1.6 nos llevan a la siguientes definiciones.

Un subconjunto de un espacio X se llama un **retracto** de X si existe una aplicación continua $r\colon X \to A$ tal que $ri = 1\colon A \to A$ (o equivalentemente si $r|_A = 1$), donde $i\colon A \to X$ es la inclusión. La aplicación r se llama **retracción**.

Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación** de X si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $ir \simeq 1\colon X \to X$, donde $i\colon A \to X$ es la inclusión.

Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación fuerte** de X si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $ir \simeq_{\mathrm{rel}\,A} 1\colon X \to X$. La diferencia con la definición anterior es que en este caso, todos los elementos de A quedan fijos bajo la homotopía.

1.7 Nota. Las retracciones en los retractos por deformación, ya sean fuertes o no, son equivalencias homotópicas.

Los Ejemplos 1.4 y 1.6 son retractos por deformación fuertes.

1.2. Conexidad por caminos

La conexidad por caminos es un concepto más fuerte que la conexidad topológica y es más apropiada para el estudio de propiedades homotópicas. Está basada en el concepto de camino en un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$. Un **camino de** x_0 **a** x_1 es una aplicación continua $\alpha\colon I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$.

1.8 Nota. El camino α es la aplicación y no la imagen $\alpha(I)$. En general pensaremos al parámetro t como el tiempo, con lo que $\alpha(t)$ será la posición en X en el instante t.

1.9 Ejemplo. El ejemplo más sencillo de camino es el **camino constante** $\epsilon_{x_0}\colon I \to X$ definido por $\epsilon_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in I$.

El siguiente lema nos da dos métodos para obtener nuevos caminos a partir de caminos dados. En el primero, dado un camino α, nos proporciona un nuevo camino $\bar{\alpha}$, que esencialmente recorre a α en sentido contrario. En el segundo, dados dos caminos tales que el punto final del primero coincide con el punto inicial del segundo, nos da un nuevo camino que consiste en unir los caminos dados.

1.10 Lema. *Sean α y β caminos en X. Entonces*

1. *La aplicación $\bar{\alpha}$ definida por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, es también un camino en X.*
2. *Si $\alpha(1) = \beta(0)$, es decir, el punto final de α coincide con el punto inicial de β, la aplicación $(\alpha * \beta)\colon I \to X$ definida por*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si\ 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1) & si\ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   es un camino en X.

La demostración del lema anterior se sigue del siguiente resultado básico de topología, conocido como el Lema del Pegado, el cual usaremos constantemente más adelante.

1.11 Lema. *Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B son ambos subconjuntos cerrados de X. Si $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ son aplicaciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A \cap B$, entonces la aplicación $h\colon X \to Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A, \\ g(x) & si\ x \in B. \end{cases}$$

es continua.

1.12 Ejemplo. Demostrar el Lema 1.11.

Definimos una relación en X de la siguiente manera: $x \simeq y$ en X si existe un camino α en X de x a y. Decimos que x esta **conectado** con y mediante el camino α. El espacio X es **conexo por caminos** o también **0-conexo**, si $x \simeq y$ para todo par de puntos $x, y \in X$.

1.13 Ejemplo. Prueba que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia, denotadas por $[x]$, dividen a X en subconjuntos disjuntos llamadas **componentes por caminos** de X. Denotemos por $\pi_0(X)$ al conjunto de clases de equivalencia.

1.14 Nota. X es conexo por caminos si y sólo si $\pi_0(X)$ consta de un sólo elemento.

Sea $f\colon X \to Y$ continua. Entonces f induce una función

$$f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$
$$f_*([x]) = [f(x)].$$

1.15 Ejemplo. Demuestra que f_* está bien definida.

La construcción π_0 tiene las siguientes propiedades *funtoriales*.

1.16 Proposición. *La construcción π_0 es funtorial, es decir, satisface las siguientes propiedades*

1. *Si $f\colon X \to X$ es la identidad, entonces*

   $$f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(X)$$

   es también la identidad.

2. *Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son continuas, entonces*

   $$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Z).$$

   En particular, si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es una equivalencia de conjuntos (isomorfismo), es decir, una biyección.

1.17 Ejemplo. Demuestra la Proposición 1.16.

De la última afirmación de la Proposición 1.16 tenemos que la conexidad por caminos es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismo. De hecho podríamos haber usado conexidad por caminos en vez de conexidad en nuestra demostración de que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ no son homeomorfos.

Por la Proposición 1.16 tenemos que π_0 es nuestro primer ejemplo de *invariante topológico*, el cual asocia a cada espacio topológico X el conjunto $\pi_0(X)$ y a cada aplicación continua $f\colon X \to Y$ la función $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.

Si X y Y son homeomorfos, entonces $\pi_0(X)$ y $\pi_0(Y)$ tienen la misma cardinalidad. Por lo tanto la cardinalidad $|\pi_0(X)|$ de $\pi_0(X)$ es un invariante topológico numérico, es decir, dos espacios con *distinto* número de componentes por caminos *no* pueden ser homeomorfos.

1.18 Proposición. *Sean f_0 y f_1 dos aplicaciónes homotópicas de X a Y. Entonces $(f_0)_* = (f_1)_*$.*

Demostración. Sea $[x] \in \pi_0(X)$, entonces tenemos que $(f_0)_*([x]) = [f_0(x)]$ y $(f_1)_*([x]) = [f_1(x)]$, por lo tanto es suficiente con probar que existe un camino en Y de $f_0(x)$ a $f_1(x)$.

Sea $F\colon X \times I \to Y$ la homotopía entre f_0 y f_1. Definimos el camino $\alpha_x\colon I \to Y$ en Y mediante

$$\alpha_x(t) = F(x,t).$$

Entonces tenemos que $\alpha_x(0) = F(x,0) = f_0(x)$ y $\alpha_x(1) = F(x,1) = f_1(x)$, por lo tanto es un camino en Y de $f_0(x)$ a $f_1(x)$. $\square$

1.19 Corolario. *Si* $f\colon X \to Y$ *es una equivalencia homotópica, entonces* $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ *es una equivalencia de conjuntos (isomorfismo), es decir, una biyección.*

Capítulo 2

Grupo fundamental y Grupos de homología

En esta sección definiremos un nuevo invariante topológico comocido como grupo fundamental y su generalización a los llamados grupos de homotopía.

2.0.1. Equivalencia de caminos

Se dice que dos caminos α y β en X son **equivalentes** si α y β son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$. En este caso escribiremos $\alpha \sim \beta$.

Por lo tanto, los caminos $\alpha, \beta \colon I \to X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F \colon I \times I \to X$$

tal que

$$\begin{gathered} F(t,0) = f_0(t), \quad F(t,1) = f_1(t), \quad \text{para } t \in I \\ F(0,s) = f_0(0) = f_1(0), \quad F(1,s) = f_0(1) = f_1(1), \quad \text{para } s \in I \end{gathered}$$

Por el Ejercicio 1.2 tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Denotemos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia del camino α. Definimos ahora un producto de clases de equivalencia de caminos por

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

El siguiente lema muestra que el producto de clases de equivalencia está bien definido.

2.1 Lema. *Si $\alpha_0 \sim \alpha_1$, $\beta_0 \sim \beta_1$, tales que $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$ y $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$, entonces $\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1$.*

2.2 Ejemplo. Demuestra el Lema 2.1.

La proposición siguiente nos muestra las principales propiedades de este producto.

2.3 Proposición. *Sean α, β y γ caminos en X. Entonces*

(a) El producto de sus clases de equivalencia es asociativo, es decir

$$\big([\alpha][\beta]\big)[\gamma] = [\alpha]\big([\beta][\gamma]\big),$$

siempre y cuando este producto tenga sentido, es decir, si $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$.

(b) Si $x \in X$, la clase de equivalencia del camino constante ϵ_x definido en el Ejemplo 1.9 se comporta como un elemento identidad (por la izquierda o por la derecha), esto es,

$$[\epsilon_a][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][\epsilon_b],$$

si α es un camino de a a b en X.

(c) La clase del camino $\bar{\alpha}$ definido en el Lema 1.10 actúa como inverso de la clase de equivalencia de α, es decir

$$[\alpha][\bar{\alpha}] = [\epsilon_a] \qquad [\bar{\alpha}][\alpha] = [\epsilon_b],$$

para todo camino α de a a b en X.

Demostración. Solamente demostraremos (a), los otros incisos se dejan como ejercicios.

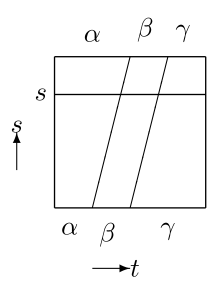
Usando la fórmula del Lema 1.10 para el producto de caminos tenemos

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Queremos encontrar una homotopía entre (2.1) y (2.2), para ello nos auxiliamos del siguiente diagrama:

ya que para $s = 0$ se aplica α cuando $t \in [0, \frac{1}{4}]$,
β cuando $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,
γ cuando $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,
y para $s = 1$ se aplica α cuando $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
β cuando $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$,
γ cuando $t \in [\frac{3}{4}, 1]$.



En el diagrama la recta que une al punto $(\frac{1}{4},0)$ con el punto $(\frac{1}{2},1)$ es la recta $t=\frac{s+1}{4}$ y la que une el punto $(\frac{1}{2},0)$ con $(\frac{3}{4},1)$ es la recta $t=\frac{s+2}{4}$ por lo que para un valor arbitrario de s:

$$\text{se aplica } \begin{array}{l} \alpha \text{ cuando } t\in[0,\frac{s+1}{4}], \\ \beta \text{ cuando } t\in[\frac{s+1}{4},\frac{s+2}{4}], \\ \gamma \text{ cuando } t\in[\frac{s+2}{4},1]. \end{array}$$

Para encontrar la homotopía, tenemos que encontrar homeomorfismos lineales que manden a los intervalos $[0,\frac{s+1}{4}]$, $[\frac{s+1}{4},\frac{s+2}{4}]$ y $[\frac{s+2}{4},1]$ al $[0,1]$ y componerlos con α, β y γ respectivamente, así

$$r_1\colon [0,\frac{s+1}{4}]\to[0,1] \qquad r_1=\frac{4t}{s+1} \tag{2.3}$$

$$r_2\colon [\frac{s+1}{4},\frac{s+2}{4}]\to[0,1] \qquad r_2=4t-s-1 \tag{2.4}$$

$$r_3\colon [\frac{s+2}{4},1]\to[0,1] \qquad r_3=1-\frac{4(t-1)}{s-2}, \tag{2.5}$$

así tenemos

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha(\frac{4t}{s+1}) & 0\le t\le\frac{s+1}{4}\\ \beta(4t-s-1) & \frac{s+1}{4}\le t\le\frac{s+2}{4}\\ \gamma(1-\frac{4(t-1)}{s-2}) & \frac{s+2}{4}\le t\le 1.\end{cases}$$

Como

$$F(t,0)=\begin{cases}\alpha(4t) & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$F(t,1)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$$

$$F(0,s)=\alpha(0)$$

$$F(1,s)=\gamma(1),$$

por lo tanto $((\alpha*\beta)*\gamma)(t)\sim(\alpha*(\beta*\gamma))(t)$. Entonces el producto de clases de equivalencia es asociativo. □

2.4 Nota. Con el producto definido y las propiedades que hemos demostrado, el conjunto de clases de equivalencia de caminos en X tiene estructura de **grupoide**.

2.0.2. Grupo Fundamental

Hemos visto que el conjunto de clases equivalencia de caminos de X satisface prácticamente los axiomas de grupo. Pero tenemos dos problemas que impiden que sea un grupo:

- La multiplicación no siempre está definida para cualesquiera dos clases.
- La identidad no es única.

Para evitar estos problemas usamos el concepto de camino cerrado.

Se dice que un camino α es **cerrado** o que es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(1)$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ decimos que α es un camino cerrado con **punto base** x.

Si tomamos un punto $x \in X$ y consideramos ahora el conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base x podemos ver que el producto de dos de esos caminos esta siempre definido y tiene una única identidad, el camino constante ϵ_x.

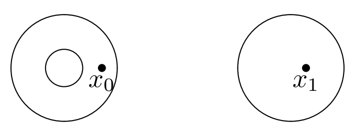
Denotemos por $\pi_1(X, x)$ al conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base $x \in X$. Por las propiedades demostradas anteriormente tenemos el siguiente teorema.

2.5 Teorema. *El conjunto $\pi_1(X, x)$ es un grupo bajo el producto de clases de equivalencia de lazos con punto base $x \in X$.*

A $\pi_1(X, x)$ se le llama el **grupo fundamental** de X con punto base x. También se le conoce como **grupo de Poincaré**.

Veamos ahora como depende $\pi_1(X, x)$ del punto base x.

2.6 Ejemplo. Sea X la unión disjunta de un anillo y un disco en el plano como se muestra en la figura. Tenemos que $\pi_1(X, x_1) = \{1\}$ mientras que $\pi_1(X, x_0)$ es cíclico infinito como veremos más adelante.



Sin embargo, tenemos el siguiente teorema que relaciona los grupos fundamentales con distinto punto base.

2.7 Teorema. *Sean $x, y \in X$. Si existe un camino en X de x a y, entonces los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea γ un camino de x a y. Si α es un camino cerrado con punto base x, entonces $(\bar{\gamma} * \alpha) * \gamma$ es un camino cerrado con punto base y. Definamos

$$\begin{aligned} U_\gamma \colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(X, y) \\ U_\gamma([\alpha]) &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]. \end{aligned}$$

Esta función es un homomorfismo de grupos, ya que

$$\begin{aligned} U_\gamma([\alpha][\beta]) &= U_\gamma([\alpha * \beta]) \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma}\beta * \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma][\bar{\gamma}\beta * \gamma] \\ &= U_\gamma([\alpha])U_\gamma([\beta]). \end{aligned}$$

Usando el camino $\bar{\gamma}$ de y a x podemos definir

$$U_{\bar{\gamma}} \colon \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$$
$$U_{\bar{\gamma}}([\alpha]) = [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}].$$

Es fácil ver que U_γ y $U_{\bar{\gamma}}$ son inversos y por lo tanto biyectivas, lo que nos da un isomorfismo. □

2.8 Corolario. *Si X es un espacio arco-conexo, $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son grupos isomorfos para todo par de puntos $x, y \in X$.*

Debido a este corolario es tentador eliminar la x de $\pi_1(X, x)$ cuando X es arco-conexo. Hay que tener cuidado con ello por que no existe un isomorfismo canónico entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$, puesto que caminos diferentes de x a y pueden inducir diferentes isomorfismos.

2.0.3. Homomorfismo inducido por una aplicación continua

Sea $\phi \colon X \to Y$ una aplicación continua. Entonces tenemos los siguientes hechos:

(I) Si α y β son caminos en X, entonces $\phi\alpha$ y $\phi\beta$ son caminos en Y.

(II) Si $\alpha \sim \beta$, entonces $\phi\alpha \sim \phi\beta$.

(III) Si α es un lazo en X con punto base $x \in X$, $\phi\alpha$ es un lazo en Y con punto base $\phi(x)$.

Así pues, si $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, $[\phi\alpha]$ es un elemento bien definido de $\pi_1(Y, \phi(x))$. Definimos por lo tanto

$$\phi_* \colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \phi(x))$$
$$\phi_*([\alpha]) = [\phi\alpha].$$

2.9 Lema. *La aplicación ϕ_* es un homomorfismo de grupos.*

Demostración.

$$\phi_*([\alpha][\beta]) = \phi_*([\alpha * \beta]) = [\phi(\alpha * \beta)] = [\phi\alpha * \phi\beta] = [\phi\alpha][\phi\beta] = \phi_*([\alpha])\phi_*([\beta]).$$

□

El homomorfismo $\phi_* \colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \phi(x))$ definido por $\phi_*([\alpha]) = [\phi\alpha]$, donde $\phi \colon X \to Y$ es una aplicación continua, se llama el **homomorfismo inducido** por ϕ.

2.10 Teorema. *Los homomorfismos inducidos satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) *Supongamos que* $\phi\colon X \to Y$ *y* $\psi\colon Y \to Z$ *son aplicaciones continuas, entonces*

$$(\psi\phi)_* = \psi_*\phi_*.$$

(b) *Si* $1\colon X \to X$ *es la identidad, entonces* 1_* *es el homomorfismo identidad en* $\pi_1(X,x)$.

Demostración. Sea $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$, entonces,

(a) $(\psi\phi)_*([\alpha]) = [(\psi\phi)\alpha] = [\psi(\phi\alpha)] = \psi_*([\phi\alpha]) = \psi_*\phi_*([\alpha])$.

(b) $1_*([\alpha]) = [1\alpha] = [\alpha]$.

$\square$

2.11 Corolario. *Si* $\phi\colon X \to Y$ *es un homeomorfismo, entonces el homomorfismo inducido* $\phi_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,\phi(x))$ *es un isomorfismo.*

El significado del teorema anterior es que el grupo fundamental es un **funtor** de la **categoría** de espacios topológicos con punto base y aplicaciónes continuas que preservan el punto base, a la categoría de grupos y homomorfismos de grupos.

Las características de que sea un funtor son las siguientes:

1. Para cada espacio topológico (con algún punto base), obtenemos un grupo, (el grupo fundamental).

2. Para cada aplicación continua, entre espacios topológicos obtenemos un homomorfismo entre los grupos correspondientes (el homomorfismo inducido).

3. La composición de dos aplicaciones continuas induce la composición de los homomorfismos inducidos.

4. La identidad, induce el homomorfismo identidad.

5. Todo homeomorfismo induce un isomorfismo.

El siguiente Teorema es resultado directo de las definiciones de homotopía relativa y del homomorfismo inducido.

2.12 Teorema. *Sean* $\phi_0, \phi_1\colon X \to Y$ *aplicaciones continuas que son homotópicas relativas al subconjunto* $\{x\}$. *Entonces*

$$\phi_{0*} = \phi_{1*}\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,\phi_0(x)).$$

Las propiedades de funtor del grupo fundamental nos permiten encontrar relaciones entre los grupos fundamentales de espacios que están relacionados por aplicaciones especiales como por ejemplo las retracciones.

Sea A un retracto de X con retracción $r\colon X \to A$. Si $i\colon A \to X$ es la inclusión, entonces tenemos que $ri = 1\colon A \to A$. Tomando los homomorfismos inducidos de r e i tenemos que $r_* i_*$ es el homomorfismo identidad del grupo fundamental de A. Entonces podemos concluir que el i_* es un monomorfismo, es decir, es inyectivo y r_* es un epimorfismo, es decir, suprayectivo.

Además, si A es un retracto por deformación fuerte de X, tenemos que $ir \simeq_{\mathrm{rel}\, A} 1\colon X \to X$. En particular, la homotopía es relativa al punto base y por el Teorema 2.12 ir tiene el mismo homomorfismo inducido, que la identidad en X, que es precisamente el homomorfismo identidad en el grupo fundamental de X. Por lo tanto tenemos en este caso que r_* es un monomorfismo y que i_* es epimorfismo, por lo tanto ambos son isomorfismos. En resumen, tenemos el siguiente teorema.

2.13 Teorema. *Sea A un retracto por deformación fuerte de X con retracción $r\colon X \to A$. Entonces r induce un isomorfismo*

$$r_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0).$$

De hecho tenemos un resultado mas fuerte, espacios arco-conexos homotópicamente equivalentes tienen grupos fundamentales isomorfos.

2.14 Teorema. *Si X y Y son espacios arco-conexos y $\phi\colon X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $\phi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \phi(x_0))$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $y_0 = \phi(x_0)$. El único problema para probar este resultado es que no podemos suponer que el inverso homotópico manda a y_0 a x_0, y no podemos suponer que las homotopías preserven los puntos base. Sea $\psi\colon Y \to X$ el inverso homotópico de ϕ y sea $x_1 = \psi(y_0)$. Entonces tenemos los homomorfismos

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\phi_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, x_1),$$

cuya composición es $(\psi \circ \phi)_*$. Por hipótesis $\psi \circ \phi \simeq 1$. Durante la homotopía, las imágenes del punto x_0 recorren algún camino, digamos γ, de x_1 a x_0. Componiendo por la derecha con un lazo α obtenemos que $\psi \circ \phi\alpha \simeq \alpha$, donde el punto base del lazo a lo largo de la homotopía recorre el camino γ. Si consideramos $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que $(\psi \circ \phi)_*([\alpha]) = U_\gamma([\alpha])$ para toda $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, donde U_γ es el isomorfismo del Teorema 2.7. Por lo tanto, $(\psi \circ \phi)_*$ es un isomorfismo y se sigue que ϕ_* es un monomorfismo y ψ_* es un epimorfismo. Aplicando la misma discusión pero empezando con ψ muestra que ψ_* es también un monomorfismo y por ende un isomorfismo. Entonces $\phi_* = \psi_*^{-1} \circ (\psi \circ \phi)_*$ es un isomorfismo. □

2.15 Corolario. *Todo espacio contraíble tiene grupo fundamental trivial.*

Un espacio topológico se dice que es **simplemente conexo** si es arco-conexo y si $\pi_1(X, x) = \{1\}$ para algún (y por lo tanto, para todo) $x \in X$.

2.16 Proposición. *Un espacio X es simplemente conexo si y sólo si existe una única clase de homotopía de caminos que conectan cualesquiera dos puntos.*

Demostración. Supongamos que $\pi_1(X) = \{1\}$. Si α y β son dos caminos de x_0 a x_1, entonces $\alpha \sim \alpha * \bar{\beta} * \beta \sim \beta$ vía nulhomotopías de los lazos $\bar{\beta} * \beta$ y $\alpha * \bar{\beta}$, usando la suposición de que $\pi_1(X) = \{1\}$ en el segundo caso.

Recíprocamente, si hay únicamente una clase de homotopía de caminos que conectan al punto base x_0 con el mismo, es decir, de caminos cerrados basados en x_0, entonces $\pi_1(X) = \{1\}$. $\square$

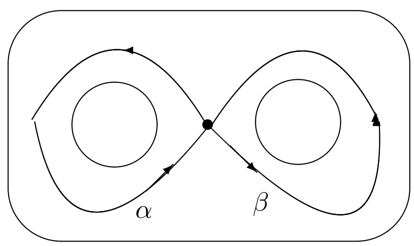
2.0.4. Ejemplos

El Corolario 2.15 nos da ejemplos de grupos fundamentales, a saber:

- $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{1\}$.
- $\pi_1(D^n) = \{1\}$.
- $\pi_1(E^n) = \{1\}$.

Veamos ahora algunos ejemplos de grupos fundamentales no triviales:

1. El grupo fundamental en general no es abeliano, como lo muestra el siguiente ejemplo conocido como el "antifaz".



   Si fuera abeliano, tendríamos que $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$, pero intuitivamente se puede ver que dicho lazo no es trivial ya que rodea a ambos agujeros. De hecho el grupo fundamental del "antifaz" es el grupo libre en dos generadores.

2. Para S^1, intuitivamente podemos ver que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, donde a cada clase de lazos en S^1 está caracterizada por el número de vueltas que le da a la circunferencia. (Ver [5] para la demostración).

3. En el caso del **toro** $S^1 \times S^1$, tenemos que $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Este último ejemplo es consecuencia de un resultado más general sobre el grupo fundamental de un espacio producto.

2.17 Teorema. *Sean X y Y dos espacios arco-conexos. Entonces tenemos que $\pi_1(X \times Y)$ es isomorfo a $\pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$. Si $p\colon X \times Y \to X$ y $q\colon X \times Y \to Y$ son las proyecciones, el isomorfismo está dado por:*

$$\phi\colon \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$$
$$\phi([\alpha]) = (p_*([\alpha]), q_*([\alpha])).$$

Una demostración se puede encontrar en [5].

2.0.5. Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones del grupo fundamental suponiendo que ya sabemos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

En primer lugar, tenemos que la circunferencia S^1 no es contraíble por el contrarecíproco del Corolario 2.15.

2.18 Proposición. *No existe ninguna aplicación continua $f\colon D^2 \to S^1$ tal que $f|_{S^1}$ sea la identidad.*

Demostración. Sea $i\colon S^1 \to D^2$ la inclusión. Supongamos que $f\colon D^2 \to S^1$ es una aplicación tal que $f \circ i = 1\colon S^1 \to S^1$. Entonces $(f \circ i)_*\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ es la identidad. Sin embargo, $(f \circ i)_* = f_* \circ i_*$, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \\
& \pi_1(D^2) = \{1\} \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Esto es una contradicción ya que $1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ no factoriza como en el diagrama. $\square$

2.19 Teorema (Teorema de punto fijo de Brower)**.** *Sea $f\colon D^2 \to D^2$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. Supongamos que para toda $x \in D^2$, tenemos que $f(x) \neq x$. Definimos una aplicación $h\colon D^2 \to S^1$ como sigue. Tomemos el rayo que une a $f(x)$ con x. Dicha linea intersecta a S^1 en un único punto y. Entonces hacemos $h(x) = y$. Tenemos que h es continua. Si $x \in S^1$ entonces $h(x) = x$, lo cual contradice la Proposición 2.18. $\square$

2.1. Grupos de homotopía superiores

Podemos generalizar al grupo fundamental de la siguiente manera:

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)],$$

donde S^n es el la esfera de dimensión n y $*$ es cualquier punto base en S^n.

Estos son llamados los *grupos de homotopía* de X basados en x_0. En el caso del grupo fundamental, usando el producto de lazos obteníamos la estructura de grupo en el conjunto $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, *), (X, x_0)]$. En el resto del capítulo veremos que nuevamente usando el producto de lazos, podemos definir la estructura de grupo en $\pi_n(X, x_0)$.

2.2. Topología de Espacios de Funciones

¿Que tiene que ver la conexidad por caminos con las homotopías? Sea $F\colon X\times I\to Y$ una homotopía entre $f_0\colon X\to Y$ y $f_1\colon X\to Y$. Definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_t\colon X &\to Y, \qquad t\in I\\ f_t(x) &= F(x,t) \end{aligned}$$

las cuales son continuas. Si $M(X,Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y entonces tenemos definida una función

$$\begin{aligned} \alpha\colon I &\to M(X,Y)\\ t &\mapsto f_t \end{aligned} \tag{2.6}$$

tal que $\alpha(0)=f_0$ y $\alpha(1)=f_1$. Esto es casi la definición de un camino en $M(X,Y)$ de f_0 a f_1, lo único que falta es que α sea continua y para tener esto necesitamos dar una topología adecuada al conjunto $M(X,Y)$. Esto es lo que haremos en esta sección.

Sean X y Y conjuntos, $Y\neq\emptyset$, definimos

$$Y^X=\prod_{x\in X}Y=\{f\colon X\to Y\}$$

2.20 Nota. El conjunto $Y^{\emptyset}$ es un conjunto unitario.

Si suponemos que Y es un espacio topológico, entonces una topología canónica para Y^X es la topología producto en $\prod_{x\in X}Y$.

Sean X y Y espacios topológicos, $Y\neq\emptyset$, definimos

$$M(X,Y)=\{\,f\in X^Y \mid f \text{ es continua}\,\}.$$

Definimos la aplicación **evaluación**

$$\begin{aligned} e'\colon Y^X\times X &\to Y\\ (f,x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

y su restricción

$$\begin{aligned} e\colon M(X,Y)\times X &\to Y\\ (f,x) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Diremos que una topología en $M(X,Y)$ es **admisible** si la evaluación es continua respecto a dicha topología.

Una topología en $M(X,Y)$ que toma en cuenta tanto la topología de X como la de Y y que generaliza a la topología producto es la topología compacto-abierta.

Sean X y Y espacios topológicos y $Y \neq \emptyset$. La topología **compacto-abierta** (**ca**) en $M(X,Y)$ es la generado por los subbásicos

$$\begin{aligned} U^K &= \{\, f \in M(X,Y) \mid f(K) \subset U \,\} \\ &= \Big((\prod_{k \in K} U) \times \prod_{k \notin K} Y \Big) \cap M(X,Y) \end{aligned}$$

con K compacto en X y U abierto en Y.

2.21 Proposición. *Sean X y Y espacios topológicos con $Y \neq \emptyset$. Si τ es una topología admisible en $M(X,Y)$, entonces* ***ca***$\subset \tau$

De ahora en adelante $M(X,Y)$ siempre tendrá la topología compacto-abierta.

2.22 Proposición. *Sean X y Y espacios topológicos con $Y \neq \emptyset$. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces la topología* ***ca*** *es admisible.*

2.23 Corolario. *Sean X y Y espacios topológicos con $Y \neq \emptyset$. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces la topología* ***ca*** *es la mínima (más gruesa) admisible en $M(X,Y)$.*

2.2.1. Ley exponencial

2.24 Proposición. *Sean X, Y y Z conjuntos, entonces*

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X,$$

esta equivalencia de conjuntos es llamada ***ley exponencial****.*

Demostración. Basta definir

$$\begin{aligned} \phi \colon Z^{X \times Y} &\to (Z^Y)^X \\ (f \colon X \times Y \to Z) &\mapsto (\phi(f) \colon X \to Z^Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(f)(x) \colon Y &\to Z \\ \phi(f)(x)(y) &= f(x,y) \end{aligned}$$

y como inversa

$$\begin{aligned} \psi \colon (Z^Y)^X &\to Z^{X \times Y} \\ (g \colon X \to Z^Y) &\mapsto (\psi(g) \colon X \times Y \to Z) \end{aligned}$$

$$\psi(g)(x,y) = g(x)(y)$$

Es rutina ver que ambas composiciones son las respectivas identidades. □

Deseamos tener un resultado análogo para $M(X,Y)$.

2.25 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos con Y de Hausdorff y localmente compacto. Entonces se tiene una equivalencia de conjuntos*

$$\phi\colon M(X \times Y, Z) \to M(X, M(Y, Z)).$$

Para que ϕ esté bien definida se requiere:

1. Para toda $x \in X$, $\phi(f)(x)\colon Y \to Z$ sea continua para toda $f \in M(X \times Y, Z)$.
2. $\phi(f)\colon X \to M(Y, Z)$ sea continua para toda $f \in M(X \times Y, Z)$.

Con una condición adicional, la equivalencia de conjuntos en la proposición anterior es un homeomorfismo.

2.26 Teorema (Ley exponencial para aplicaciones continuas)**.** *Si X, Y y Z son espacios topológicos tales que X y Y son Hausdorff y Y es localmente compacto, entonces*

$$\phi\colon M(X \times Y, Z) \to M(X, M(Y, Z))$$

es un homeomorfismo.

2.27 Corolario. *Si X y Y son espacios topológicos tales que X es Hausdorff y localmente compacto, entonces*

$$M(I \times X, Y) \cong M(I, M(X, Y)).$$

Es decir, una homotopía entre dos aplicaciones continuas $f_0, f_1\colon X \to Y$ es equivalente a un camino α en $M(X, Y)$ de f_0 a f_1 definido por (2.6).

2.28 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si X y Y son localmente compactos y Hausdorff, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} c\colon M(X, Y) \times M(Y, Z) &\to M(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

es continua.

En particular, si $f\colon X \to Y$ es continua, entonces induce por restricción de c una aplicación continua

$$\begin{aligned} f^{\#}\colon M(Y, Z) &\to M(X, Z) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Igualmente, si $g\colon Y \to Z$ es continua, entonces induce por restricción de c una aplicación continua

$$g_{\#}\colon M(X, Y) \to M(X, Z) \tag{2.7}$$
$$f \mapsto g \circ f. \tag{2.8}$$

2.29 Nota. Si f y g son homeomorfismos, entonces $f^{\#}$ y $g_{\#}$ son homeomorfismos.

2.30 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos con X de Hausdorff. Entonces*

$$M(X, Y \times Z) \cong M(X, Y) \times M(X, Z).$$

2.2.2. Parejas de espacios y sus espacios de funciones

Una **pareja de espacios** es una pareja (X, A) donde X es un espacio topológico y A es un subespacio de X.

Un caso particular importante de parejas de espacios son las parejas de la forma (X, x_0), con $x_0 \in X$ un punto específico llamado **punto base**. A estas parejas de espacios se les llama **espacios punteados**.

Dadas dos parejas de espacios (X, A) y (Y, B), definimos el espacio de funciones continuas entre ellas $M(X, A; Y, B)$ como el subespacio de $M(X, Y)$ que consiste en las aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(A) \subset B$.

En particular, para dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) tenemos que $M(X, x_0; Y, y_0)$ consta de las aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$, es decir, mandan el punto base de X en el punto base de Y. A estas aplicaciones se les llama **aplicaciones punteadas**.

2.31 Ejemplo. Sea $I = [0, 1]$ y $\partial I = \{0, 1\}$ su frontera. Consideremos los espacios

$$M(I, X) \supset M(I, 0; X, x_0) \supset M(I, \partial I; X, x_0) \tag{2.9}$$

para un espacio punteado $X, x_0)$.

- A $M(I, X)$ se le llama **espacio de trayectorias libres en** X.
- A $M(I, 0; X, x_0)$ se le llama **espacio de trayectorias en** X **basadas en** x_0.
- A $M(I, \partial I; X, x_0)$ se le llama **espacio de lazos en** X **basados en** x_0 y se denota por $\Omega(X, x_0)$.

Consideremos dos parejas de espacios (X, A) y (Y, B), definimos su **producto** como la pareja

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

2.32 Ejemplo. $(I, \partial I) \times (I, \partial I) = (I^2, \partial I^2)$, donde I^2 es el cuadrado unitario en el plano y ∂I^2 su frontera que es homeomorfa al círculo S^1.

Inductivamente, $(I^n, \partial I^n) \times (I, \partial I) = (I^{n+1}, \partial I^{n+1})$, donde I^{n+1} es el cubo unitario en $\mathbb{R}^{n+1}$ y ∂I^{n+1} su frontera que es homeomorfa a la esfera

$$S^n = \{\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \,\}$$

2.33 Proposición. *Tenemos que*

$$M((X, A) \times (Y, B), (Z, C)) \cong M(X, A; M(Y, B; Z, C), \tilde{C})$$

donde $\tilde{C} = M(Y, Y; Z, C)$.

Por la proposición anterior, tenemos que

$$M(I^{n+1}, \partial I^{n+1}; X, x_0) \cong M(I, \partial I; M(I^n, \partial I^n; X, x_0), \tilde{x}_0)$$

donde $\tilde{x}_0 \in M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ tal que $\tilde{x}_0(I^n) = x_0$.

Al espacio $M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ se le llama **n-espacio de lazos en X basados en x_0** y se le denota por $\Omega^n(X, x_0)$.

De lo anterior tenemos que

$$\Omega(\Omega^n(X, x_0), \tilde{x}_0) \cong \Omega^{n+1}(X, x_0).$$

2.34 Ejemplo. Sea (X, x_0) un espacio punteado. Demuestra que hay un homeomorfismo

$$\Omega^n(X, x_0) \cong M(S^n, *; X, x_0).$$

Sea $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ un aplicación punteada. Tenemos una aplicación inducida entre los espacios de lazos

$$\begin{aligned} \Omega f\colon \Omega^n(X, x_0) &\to \Omega^n(Y, y_0) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

2.2.3. Suspensiones

Esta construcción es en cierto sentido, dual a la construcción del espacio de lazos.

Si (X, x_0) es un espacio punteado, definimos su **suspensión reducida** ΣX como el cociente

$$\Sigma X = X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I)$$

el cual es nuevamente un espacio punteado, cuyo punto base es la imagen de $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$, despues de que ha sido colapsada a un punto en el cociente.

Denotamos por $x \wedge t$ la clase de $(x, t) \in X \times I$. Entonces, el punto base es $\bar{x}_0 = x_0 \wedge t = x \wedge 0 = x \wedge 1$. Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación punteada, entonces $f \times \mathrm{id}_I$ induce una aplicación punteada

$$\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y, \tag{2.10}$$

$$\Sigma f(x \wedge t) = f(x) \wedge t. \tag{2.11}$$

2.35 Proposición. *Tenemos el siguiente homeomorfismo.*

$$S^n \cong \Sigma S^{n-1}.$$

2.2.4. Adjunción

Existe una relación entre los conjuntos de clases de homotopía usando espacios de lazos y suspensiones expresada en la siguiente proposición.

2.36 Proposición. *Hay un homeomorfismo*

$$M_*(\Sigma X, Y) \cong M_*(X, \Omega Y)$$

por lo tanto tenemos una biyección inducida

$$[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*.$$

Demostración. El homeomorfismo y su inversa están dados por

$$
\begin{aligned}
M_*(\Sigma X, Y) &\leftrightarrow M_*(X, \Omega Y) \\
g\colon \Sigma X \to Y &\mapsto \hat{g}\colon X \to \Omega Y \\
&\qquad \hat{g}(x)(t) = g(x \wedge t) \\
\check{f}\colon \Sigma X \to Y &\leftarrow\!\shortmid f\colon X \to \Omega Y \\
\check{f}(x \wedge t) = f(x)(t) &
\end{aligned}
$$

Este homeomorfismo induce una biyección entre las componentes por caminos.

□

2.37 Proposición. *Sea X un espacio punteado, entonces*

$$\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n X).$$

Demostración. De la Proposición 2.35 tenemos que

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_* = [\Sigma^n S^0, X]_* = [S^0, \Omega^n X]_*.$$

□

Es decir, el n-ésimo grupo de homotopía de X es el conjunto de componentes arco-conexas del n-ésimo espacio de lazos en X basados en x_0, dotado de un producto. En la siguiente sección veremos como se define dicho producto.

2.3. H-espacios

Si (Y, y_0) es un espacio punteado, entonces su espacio de lazos $\Omega(Y, y_0)$ basados en y_0, es a su vez un espacio de lazos punteado, con punto base $\tilde{y}_0$, el lazo constante $\tilde{y}_0(t) = y_0$, para toda $t \in I$.

Como vimos antes, espacio de lazos $(\Omega Y, \tilde{y}_0)$ tiene un producto

$$\mu\colon \Omega(Y, y_0) \times \Omega(Y, y_0) \to \Omega(Y, y_0)$$

tal que para lazos $\alpha, \beta \in \Omega(Y, y_0)$, tenemos

$$\mu(\alpha, \beta)(t) = (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Decimos que este producto es una H-**multiplicación**.

2.38 Ejemplo. Verifica que μ es continua.

También tenemos una aplicación dada por

$$
\begin{gathered}
j\colon \Omega(Y, y_0) \to \Omega(Y, y_0) \\
j(\alpha)(t) = \bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t).
\end{gathered}
$$

Sea $e\colon \Omega Y \to \Omega Y$ la aplicación constante $e(\alpha) = \tilde{y}_0$, con $\tilde{y}_0$ el lazo constante. Entonces tenemos que e es una H**-identidad**, es decir, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \arrow[r, "{(e,1)}"] \arrow[dr, "1"'] & \Omega Y \times \Omega Y \arrow[d, "\mu"] & \Omega Y \arrow[l, "{(1,e)}"'] \arrow[dl, "1"] \\ & \Omega Y & \end{tikzcd} \qquad \text{(identidad salvo homotopía)} \tag{2.12}$$

o sea $\mu \circ (1, e) \simeq 1 \simeq \mu \circ (e, 1)$. Decimos que μ es H**-asociativa** pues el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \arrow[r, "\mu \times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & \Omega Y \times \Omega Y \arrow[d, "\mu"] \\ \Omega Y \times \Omega Y \arrow[r, "\mu"'] & \Omega Y \end{tikzcd} \qquad \text{(asociatividad salvo homotopía)} \tag{2.13}$$

es decir $\mu \circ (\mu \times 1) \simeq \mu \circ (1 \times \mu)$. La aplicación

$$j\colon (\Omega Y, \tilde{y}_0) \to (\Omega Y, \tilde{y}_0)$$

es llamada un H**-inverso**, pues el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \arrow[r, "{(j,1)}"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega Y \times \Omega Y \arrow[d, "\mu"] & \Omega Y \arrow[l, "{(1,j)}"'] \arrow[dl, "e"] \\ & \Omega Y & \end{tikzcd} \qquad \text{(inverso salvo homotopía)} \tag{2.14}$$

es decir, $\mu \circ (j, 1) \simeq e \simeq \mu \circ (1, j)$.

Entonces decimos que el espacio de lazos $(\Omega Y, \tilde{y}_0)$ es un H-**espacio**.

Sean $g\colon Y \to Y'$ una aplicación punteada y $\Omega g\colon \Omega Y \to \Omega Y'$ la aplicación inducida en los respectivos espacios de lazos. Sean μ y μ' las H-multiplicaciones de ΩY y $\Omega Y'$ respectivamente. Decimos que Ωg es un H**-homomorfismo** pues el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \times \Omega Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Omega g \times \Omega g"'] & \Omega Y \arrow[d, "\Omega g"] \\ \Omega Y' \times \Omega Y' \arrow[r, "\mu'"'] & \Omega Y' \end{tikzcd}$$

es decir, $\Omega g \circ \mu \simeq \mu' \circ \Omega g \times \Omega g$.

2.39 Teorema. *Para todo espacio punteado Y, ΩY es un H-grupo y por lo tanto, para todo espacio puntado X, al conjunto $[X, \Omega Y]_*$ se le puede dar una* *estructura de grupo si definimos el producto $[f] \cdot [g]$ como la clase de homotopía de la composición*

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} W \times W \xrightarrow{\mu} W.$$

Donde Δ es la aplicación diagonal dada por $\Delta(x) = (x, x)$. La identidad de grupo es la clase $[e]$ de la aplicación constante, y el inverso está dado por $[f]^{-1} = [j \circ f]$. Si $f\colon X \to X'$ es continua, entonces

$$f^*\colon [X', \Omega Y]_* \to [X, \Omega Y]_*$$

es un homomorfismo. Finalmente, si $g\colon Y \to Y'$ es una aplicación punteada, entonces $\Omega g\colon \Omega Y \to \Omega Y'$ dada por la restricción de $g_{\#}$ dada en (2.7), es un H-homomorfismo. Entonces

$$(\Omega g)_*\colon [X, \Omega W]_* \to [X, \Omega W']_*$$

es un homomorfismo de grupos.

En particular, si tomamos $X = S^0$ y $Y = \Omega^{n-1} Z$ por la Proposición 2.37 tenemos que $\pi_n(Z) = [S^0, \Omega^n Z]_*$ es un grupo.

Capítulo 3

Homología y cohomología

En el presente capítulo definiremos los grupos de homología, los cuales son invariantes de espacios topológicos, es decir, si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces tienen grupos de homología isomorfos. Para mas detalles sugiero consultar los siguientes libros [2, 3].

Dado un espacio topológico X, le asignaremos un conjunto de grupos denotados por $H_i(X;\mathbb{Z})$ con $i \in \mathbb{N}$, llamados *grupos de homología* de X con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Los grupos de homología tienen las siguientes propiedades:

Espacio Topológicos	Grupos
X	$H_i(X;\mathbb{Z})$
$f\colon X \to Y$	$f_*\colon H_i(X;\mathbb{Z}) \to H_i(Y;\mathbb{Z})$
$X \cong Y$	$H_i(X;\mathbb{Z}) \cong H_i(Y;\mathbb{Z})$
$Id_X\colon X \to X$	$Id_{H_i(X;\mathbb{Z})}\colon H_i(X;\mathbb{Z}) \to H_i(X;\mathbb{Z})$
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$	$H_i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_i(Y;\mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} H_i(Z;\mathbb{Z})$

De la tercera propiedad podemos ver que efectivamente son invariantes.

Antes de definir los grupos de homología necesitamos algunas nociones algebraicas.

3.1. Complejos de cadenas

Sean A, B y C grupos abelianos y consideremos la siguiente sucesión de homomorfismos

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

decimos que esta sucesión es *exacta* en B si $\operatorname{im} i = \ker j$. Si tenemos una sucesión de grupos y homomorfismos

$$A_4 \xrightarrow{h_4} A_3 \xrightarrow{h_3} A_2 \xrightarrow{h_2} A_1$$

decimos que es *exacta*, si es exacta en todas partes.

Consideremos ahora una sucesión A de grupos abelianos y homomorfismos

$$A_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} A_n \xrightarrow{h_n} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_{n-2}$$

tal que la composición de cada dos homomorfismos consecutivos es el homomorfismo cero, es decir

$$h_{i-1} \circ h_i = 0. \tag{3.1}$$

A una sucesión de este tipo le llamamos *complejo de cadenas*. Nótese que de la ecuación (3.1) se sigue que para toda i:

$$\operatorname{im} h_{i+1} \subset \ker h_i.$$

Definimos los grupos de homología del complejo de cadenas A por

$$H_n(A) = \frac{\ker h_n}{\operatorname{im} h_{n+1}}.$$

Los grupos H_i miden que tanto le falta a la sucesión para ser exacta, es decir, si $H_i = 0$ entonces la sucesión es exacta en A_i.

3.1.1. Morfismos de complejos de cadenas

Sean A y B dos complejos de cadenas. Una familia de homomorfismos $\phi = \{\, \phi_n \colon A_n \to B_n \mid -\infty < n < \infty \,\}$ es llamada un *morfismo de cadenas* si $\phi_n \circ h_{n+1} = h'_{n+1} \circ \phi_{n+1}$ para toda n. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "h_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "h'_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "h'_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Es un ejercicio verificar que si $\phi \colon A \to B$ es un morfismo de cadenas entonces $\phi_n(\ker h_n) \subset \ker h'_n$ y $\phi_n(\operatorname{im} h_{n+1}) \subset \operatorname{im} h'_{n+1}$. Por lo tanto tenemos el siguiente

3.1 Teorema. *Sea $\phi \colon A \to B$ un morfismo de cadenas. Entonces para todo entero n mandando a cada elemento $x \in \ker h_n$ a $\phi_n(x) \in B_n$ induce un homomorfismo bien definido $\phi_* \colon H_n(A) \to H_n(B)$.*

3.2. Complejos simpliciales y poliedros

Definiremos los grupos de homología para una clase especial de espacios topológicos llamados *poliedros*, que son los espacios topológicos que “se pueden triangular”.

Recordemos que el simplejo estándar Δ_i de dimensión i es la *envolvente convexa* de los vectores básicos de $\mathbb{R}^i$ y el origen (Figura 3.1). Por lo tanto, Δ_i tiene $i + 1$ vértices. Generalicemos un poco el concepto de simplejos, los cuales serán los bloques con los que construiremos a los poliedros.

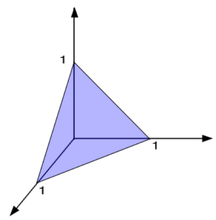


Figura 3.1: Simplejo estandard de dimensión 3

Definición. Un sistema de $i+1$ puntos en $\mathbb{R}^N$ es llamado *independiente* si dichos puntos **no** están contenidos en el mismo subespacio de dimensión $i-1$ o menor.

La envolvente convexa de $i+1$ puntos independientes $v_0, \ldots, v_i$ en $\mathbb{R}^N$ es llamado un *simplejo* de dimensión i. Los puntos $v_0, \ldots, v_i$ son llamados los *vértices* del simplejo. Una *cara* de un simplejo es la envolvente convexa de algún subconjunto del conjunto de sus vértices.

Una colección finita de simplejos K en $\mathbb{R}^N$ es llamada un *complejo simplicial* si cualesquiera dos de sus simplejos no tienen puntos comunes o se intersectan a lo largo de una cara común. La dimensión de K es la dimensión máxima de sus simplejos. Una *orientación* de un complejo simplicial es un conjunto de orientaciones de cada uno de sus simplejos incluyendo sus caras.

Desde el punto de vista formal, es necesario distinguir al complejo simplicial (colección de simplejos) de su **espacio subyacente** (la unión de dichos simplejos), pues diferentes complejos simpliciales pueden tener el mismo espacio subyacente. Al espacio topológico formado por la unión de todos los simplejos del complejo simplicial K lo denotaremos por $|K|$ y lo llamaremos la *realización geométrica de K*.

Un espacio topológico X es un *poliedro* si existe un homeomorfismo $h\colon |K| \to X$ para algún complejo simplicial K. El complejo simplicial K junto con el homeomorfismo h es llamado una *triangulación* de X (ver Fig 3.2).

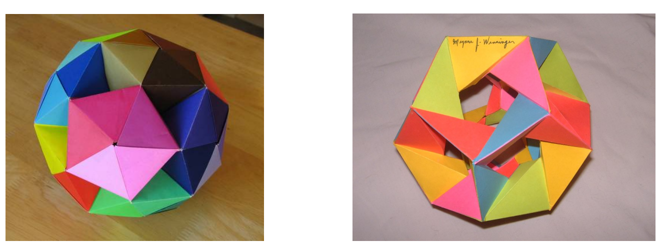


Figura 3.2: Poliedros

3.2.1. Aplicaciones simpliciales

Definición. Una aplicación $f\colon K \to L$ entre complejos simpliciales (más precisamente, una aplicación $f\colon |K| \to |L|$) es llamada *simplicial* si la imagen de cada simplejo de K es un simplejo de L y la restricción de f a cualquier simplejo de K es una aplicación lineal.

El siguiente teorema nos dice que toda aplicación continua entre poliedros se puede "ver" como una aplicación simplicial.

3.2 Teorema (de aproximación simplicial). *Para toda aplicación* ***continua*** *$f\colon |K| \to |L|$ entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales existe una aplicación simplicial $g\colon K \to L$ tal que f es homotópica a g.*

3.3. Homología simplicial

Sea K un complejo simplicial y sea σ^i un simplejo de dimensión i en K. Denotaremos a σ^i por sus vértices de tal manera que el orden determine la orientación de σ^i

$$\sigma^i = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i).$$

Por ejemplo, en la Figura 3.3 se muestra un simplejo de dimensión 2.

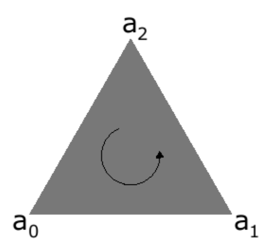


Figura 3.3: Simplejo de dimensión 2.

Definimos los grupos de *cadenas simpliciales* de dimensión i de K con coeficientes en $\mathbb{Z}$, denotados por $C_i(K;\mathbb{Z})$, como los grupos abelianos libres generados por los simplejos de dimensión i de M. Es decir, los elementos de $C_i(K;\mathbb{Z})$ son combinaciones lineales formales de simplejos de dimensión i

$$r_1\sigma_1^i + \cdots + r_k\sigma_k^i, \quad \text{con } r_i \in \mathbb{Z}.$$

llamados *i-cadenas simpliciales* o simplemente *i-cadenas.*

Definimos también, el *operador frontera*

$$\partial_i\colon C_i(K;\mathbb{Z}) \to C_{i-1}(K;\mathbb{Z}),$$

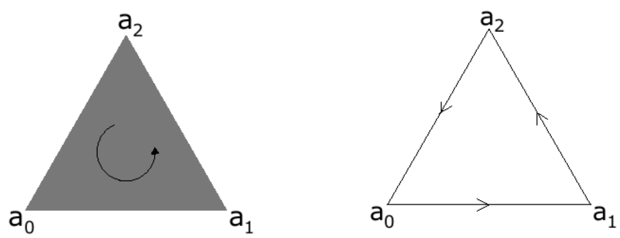
el cual esta dado en un simplejo $(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i)$ por

$$\partial_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = \sum_{l=0}^{i}(a_0, a_1, \dots, a_{l-1}, \hat{a}_l, a_{l+1}, \dots, a_i)$$

donde $\hat{a}_l$ significa quitar dicho vértice. El operador frontera se aplica a una i-cadena arbitraria extendiéndolo linealmente.

En la Figura 3.4 se muestra el operador frontera aplicado a un simplejo de dimensión 2.

$$\partial(a_0, a_1, a_2) = (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1)$$



(a) 2-simplejo Δ. (b) 1-simplejo $\partial\Delta$

Figura 3.4: Operador Frontera

Es un ejercicio ver que se cumple

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0, \tag{3.2}$$

por lo que los grupos de cadenas simpliciales y los operadores frontera forman un complejo de cadenas

$$\xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1}(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2}(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i-2}} \tag{3.3}$$

llamado el *complejo de cadenas simplicial de K*.

El significado geométrico de la igualdad (3.2) es que una i-cadena que es frontera de una $i+1$-cadena no tiene frontera, como se puede ver en la Figura 3.4 (b).

A los elementos del kernel del operador ∂_i se les llama *i-ciclos* y son precisamente las i-cadenas que no tienen frontera. Por otro lado, los elementos de la imagen de ∂_{i+1} se les llama *i-fronteras* y son los i-ciclos que son frontera de alguna $i+1$-cadena.

Los grupos de *homología* de K con coeficientes en $\mathbb{Z}$, son los grupos de homología del complejo de cadenas simplicial de K (3.3)

$$H_i(K;\mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}}.$$

Como antes, los grupos de homología miden que tanto le falta al complejo simplicial para que sea exacto. Geométricamente sus elementos son representados por i-ciclos que **no** son frontera de ninguna $i+1$-cadena. En otras palabras, "miden cuantos hoyos de dimensión i" tiene $|K|$.Dos i-ciclos representan la misma clase de homología si **ambos** son frontera de una $i+1$-cadena (Fig 3.5).

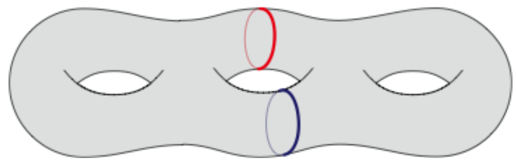


Figura 3.5: Ciclos homólogos

Toda aplicación simplicial $f\colon K \to L$ entre complejos simpliciales orientados induce un morfismo de cadenas $f_\#\colon C_\bullet(K;\mathbb{Z}) \to C_\bullet(L;\mathbb{Z})$ entre los correspondientes complejos de cadenas simpliciales, el cual está definido por las imágenes de los generadores (los simplejos) mediante la fórmula:

$$f_\#(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim \sigma > \dim f(\sigma); \\ f(\sigma) & \text{si } \dim \sigma = \dim f(\sigma) \text{ y } f|_\sigma \text{ preserva la orientación;} \\ -f(\sigma) & \text{si } \dim \sigma = \dim f(\sigma) \text{ y } f|_\sigma \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

Entonces por el Teorema 3.1 f a su vez induce un homomorfismo en los correspondientes grupos de homología

$$f_*\colon H_n(K;\mathbb{Z}) \to H_n(L;\mathbb{Z}).$$

Definición. Sea X un poliedro y sea $h\colon |K| \to X$ una triangulación de X. Definimos los grupos de *homología* de X con coeficientes en $\mathbb{Z}$ por

$$H_i(X;\mathbb{Z}) = H_i(K;\mathbb{Z}).$$

Se puede demostrar que dichos grupos no dependen de la triangulación de X, por lo tanto están bien definidos.

Dada una aplicación continua $f\colon |K| \to |L|$ entre poliedros, definimos el homomorfismo inducido en homología $f_*\colon H_n(|K|;\mathbb{Z}) \to H_n(|L|;\mathbb{Z})$ como el homomorfismo inducido en homología por una aproximación simplicial $g\colon K \to L$ de f.

3.4. Variedades topológicas

Hay un tipo especial de espacios topológicos llamados variedades topológicas. Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico tal que todo punto tiene una vecindad que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, la esfera de dimensión m es una variedad topológica de dimensión n.

Uno de los espacios topológicos más simples en cuanto a homología se refiere son precisamente las esferas, ya que sus grupos de homología están dados por:

$$H_i(S^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.4}$$

En el caso de $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, el generador es denotado por $[S^n]$ y es llamado la clase fundamental de S^n.

3.5. Relación entre π_1 y H_1

Hay un homomorfismo que relaciona los grupos de homotopía con los grupos de homología:

$$H\colon \pi_n(X) \to H_n(X;\mathbb{Z}),$$

el cual está definido como sigue. Tenemos que

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_*,$$

tomamos un elemento $[f] \in \pi_n(X)$, donde $f\colon S^n \to X$ es un representante de la clase de homotopía $[f]$. Entonces f induce un homomorfismo en homología

$$f_*\colon H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to H_n(X;\mathbb{Z}).$$

Por (3.4) tenemos que $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Sea $[S^n]$ el generador de $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, entonces definimos

$$H([f]) = f_*([S^n]) \in H_n(X;\mathbb{Z}).$$

El homomorfismo H es llamado el *Homomorfismo de Hurewicz.*

En el caso $n = 1$, si X es arco-conexo el homomorfismo

$$H\colon \pi_1(X) \to H_1(X;\mathbb{Z}),$$

es suprayectivo y el kernel está dado por el subgrupo conmutador $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ de $\pi_1(X)$. Entonces por el Primer Teorema de Isomorfismo tenemos que

$$H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)],$$

es decir, $H_1(X;\mathbb{Z})$ es el abelianizado de $\pi_1(X)$.

3.6. La Conjetura de Poincaré

Poincaré fue el primero en definir rigurosamente las clases de homología y formuló la siguiente

Conjetura de Poincaré (versión 1). Toda variedad de dimensión 3 con la homología de la 3-esfera, es homeomorfa a la 3-esfera.

Posteriormente, Poincaré mismo construyó un variedad de dimensión 3 cuya homología es la misma que la homología de la 3-esfera, pero que no es homeomorfa a la 3-esfera, pues su grupo fundamental no es trivial. Esta variedad de dimensión 3 ahora se conoce como la 3-*Esfera Homológica de Poincaré* y se construye como sigue:

Considérese a la 3-esfera como los cuaternios de norma 1, los cuales son un grupo bajo la multiplicación de cuaternios. Los cuaternios con parte real cero forman un subespacio vectorial real de dimensión 3 de los cuaternios conocido como los *cuaternios puros*, el cual identificaremos con $\mathbb{R}^3$. Dado $q \in S^3$ definamos

$$R_q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

dada por

$$R_q(p) = qpq^{-1}, \qquad \text{para toda cuaternio puro } p.$$

Como los reales es el centro de los cuaternios, es decir, los reales conmutan con cualquier cuaternio, la transformación R_q deja fijo al eje real y por lo tanto manda cuaternios puros en cuaternios puros. Además, como q es de norma 1 y la multiplicación de cuaternios multiplica normas, R_q preserva normas y por lo tanto es una isometría. Es fáćil ver que también preserva orientación y por lo tanto es una rotación. Por lo tanto tenemos un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} S^3 &\xrightarrow{\phi} SO(3) \\ q &\mapsto R_q \end{aligned}$$

donde $SO(3)$ es el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$. Sea $I \subset SO(3)$ el grupo de rotaciones que fijan a un icosaedro y consideremos al grupo $\tilde{I} = \phi^{-1}(I) \subset S^3$ el cual es llamado el *grupo binario icosaédrico*. Tenemos que el grupo $\tilde{I}$ actúa por la izquierda por multiplicación cuaterniónica en S^3 y al ser $\tilde{I}$ un grupo finito (es de orden 120) la acción es propia y discontinua. Por lo tanto la proyección $p \colon S^3 \to S^3/\tilde{I}$ es una aplicación cubriente y el cociente

$$P = S^3/\tilde{I}$$

es una variedad de dimensión 3. Como S^3 es simplemente conexo, $p \colon S^3 \to S^3/\tilde{I}$ es el cubriente universal y $\tilde{I}$ es el grupo de transformaciones cubrientes, por lo tanto

$$\pi_1(P) = \tilde{I},$$

el cual no es trivial y por lo tanto P no es homeomorfo a S^3. Por otro lado, tenemos que el grupo $\tilde{I}$ es perfecto, es decir $\tilde{I} = [\tilde{I}, \tilde{I}]$, es igual a su propio conmutador, por lo tanto $H_1(P; \mathbb{Z}) = 0$.

Entonces Poincaré re-enunció su conjetura como sigue:

Conjetura de Poincaré. Toda 3-variedad simplemente conexa, con la homología de la 3-esfera, es homeomorfa a la 3-esfera.

Esta es la ahora famosa Conjetrura de Poincaré, que resistió muchos años para ser demostrada hasta recientemente que Perelman dio una demostración.

Bibliografía

[1] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, and Carlos Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic Topology. A First Course*. Addison-Wesley, 1981.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[4] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentic-Hall, 1975.

[5] S. William Massey. *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag, 1967.