XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE SONORA

(2-6 de Marzo 2009)

Grupos de Homotopía

José Luis Cisneros Molina

Prefacio

Las presentes notas cubren el contenido del minicurso “Grupos de Homotopía” impartido en la XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas que se llevó a cabo del 2 al 6 de Marzo de 2009 en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Son una versión corregida y aumentada de las notas del mismo curso impartido en la IV Escuela de Verano en Matemáticas para Licenciatura que se realizó del 26 al 30 de Junio de 2006 en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

El objetivo del primer capítulo es ver a las homotopías entre dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 \colon X \to Y$ como caminos que unen a f_0 y f_1 en el espacio de aplicaciones continuas $M(X, Y)$ de X a Y.

En el segundo capítulo se estudian las clases de homotopía de aplicaciones continuas entre X y X, denotadas por $[X, Y]$ y se estudian las propiedades que deben tener X o Y para que a $[X, Y]$ se le pueda dar una estructura de grupo. Esto nos lleva a los conceptos de H-espacio y H-coespacio.

En el tercer capítulo está dedicado a la definición y principales propiedades de los grupos de homotopía, que son unos invariantes muy importantes de los espacios topológicos.

Como requisitos se suponen únicamente los conocimientos de cursos básicos de Topología y Teoría de Grupos. Espero que estas notas sirvan como una pequeña introducción al mundo de la Topología Algebraica.

Al final se da una pequeña bibliografía donde se pueden estudiar más a fondo estos temas y tópicos relacionados. Cualquier comentario o sugerencia para mejorar estas notas será bienvenido (`jlcm@matcuer.unam.mx`).

José Luis Cisneros Molina

Índice general

Capítulo 1

Homotopía y Espacios de Funciones

En matemáticas, uno de los problemas principales consiste en clasificar los objetos de estudio. Para ello, generalmente se define una noción de equivalencia —dependiendo de las propiedades que nos interesen— entre dichos objetos. Un problema fundamental consiste en, dados dos objetos, determinar si éstos son equivalentes o no. Por ejemplo, en geometría plana, si las propiedades que nos interesan son el tamaño y la forma, la noción de equivalencia estaría dada por el concepto de *congruencia*, así dos objetos (polígonos por ejemplo) serán equivalentes si y sólo si éstos son congruentes, es decir, si tienen la misma forma y tamaño (Figura 1.1).

Figura 1.1: Triángulos congruentes

Si lo que nos interesa es únicamente la forma, la noción de equivalencia será la de *semejanza* y de esta manera, dos objetos serán equivalentes, si son proporcionales, no importando así su tamaño (Figura 1.2).

En el caso de la topología, la noción de equivalencia es la de *homeomorfismo*:

Dos espacios topológicos son **homeomorfos** (o equivalentes) si existe entre ellos una aplicación invertible, donde ella y su inversa sean continuas. Dichas aplicaciones son llamadas **homeomorfismos**. Intuitivamente, esto quiere decir que podemos "deformar continuamente" uno de los espacios hasta obtener el otro.

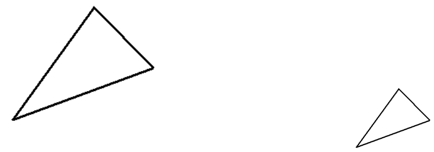

Figura 1.2: Triángulos semejantes

El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no, utilizando directamente la definición de homeomorfismo, puede ser muy difícil:

- Para probar que son homeomorfos, tenemos que dar un homeomorfismo entre ellos, lo cual puede ser nada fácil.
- Para probar que no lo son tenemos que demostrar que no existe *ningún* homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede ser aún más difícil.

Otra forma más fácil de atacar el problema, consiste en buscar propiedades de los espacios topológicos que se preserven bajo homeomorfismo, de esta manera, si uno de los espacios posee dicha propiedad y el otro no, entonces **no** pueden ser homeomorfos.

Ejemplos de dichas propiedades son la *compacidad* y la *conexidad.* Veamos algunos ejemplos de esta técnica.

Recordemos que por el Teorema de Heine-Borel, dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son **compactos** si y sólo si son cerrados y acotados. Usando el concepto de compacidad podemos ver que la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo unitario S^1 *no* son homeomorfos, ya que S^1 es un espacio compacto, lo que equivale a decir que como subconjunto del plano euclideano es cerrado y acotado, mientras que $\mathbb{R}$ no es compacto por no ser acotado.

Ahora usemos el concepto de conexidad. Intuitivamente, el que un espacio sea conexo significa que conste de un sólo "pedazo". Denotemos por $\mathbb{R}^n$ al espacio euclideano n-dimensional. Veamos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, no son homeomorfos. A primera vista, parece que la conexidad no nos ayuda a probar nuestra afirmación, ya que ambos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son conexos, pero nos valemos del siguiente truco: supongamos que existe un homeomorfismo ϕ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, si quitamos un punto p de $\mathbb{R}$ y su imagen bajo ϕ en $\mathbb{R}^n$ entonces seguiremos teniendo un homeomorfismo entre $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(p)\}$. Esto es imposible, ya que al quitarle un punto a $\mathbb{R}$ éste se separa en dos "pedazos", es decir, deja de ser conexo, mientras que $\mathbb{R}^n$ menos un punto no se separa. Por lo tanto, concluimos que no puede existir un homeomorfismo entre dichos espacios. Sin embargo, ésta técnica no sirve para ver en general que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$ y $n, m \geq 2$, *no* son homeomorfos, ya que $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es siempre conexo para $n \geq 2$. Para ello fueron necesarias nuevas técnicas. La búsqueda de dichas técnicas dio origen a la topología algebraica.

La idea principal en topología algebraica es la de *invariante topológico*, la cual consiste en que a cada espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico $h(X)$ (número, conjunto, grupo, espacio vectorial, módulo, etc.) y a cada función continua f entre dos espacios topológicos X e Y, se le asocia una función $h(f) : h(X) \to h(Y)$ que preserva la estructura algebraica en cuestión (*isomorfismo*), de tal manera que si X e Y son homeomorfos, entonces $h(X)$ y $h(Y)$ son isomorfos, es decir, equivalentes como objetos algebraicos. Por lo tanto, si dos espacios X e Y son tales que $h(X) \neq h(Y)$, es decir, sus invariantes topológicos son distintos, entonces X e Y *no* pueden ser homeomorfos. Ejemplos de invariantes topológicos son los grupos de homotopía, los cuales definiremos más adelante.

1.1. Homotopía y equivalencia homotópica

El problema de clasificar espacios topológicos mediante homeomorfismo es muy difícil. Lo que podemos hacer, y que generalmente es suficiente para muchas aplicaciones, es debilitar la relación de equivalencia con la cual queremos clasificar los espacios topológicos, mediante un concepto que generalice la noción de homeomorfismo, de manera análoga a como se generalizó la noción de *polígonos congruentes* a *polígonos semejantes*. Para ello, necesitamos el concepto central de la teoría de homotopía:

Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que dos aplicaciones continuas de X a Y, $f_0, f_1 \colon X \to Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua

$$F\colon X \times I \to Y,$$

tal que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f_0(x) \\ F(x, 1) &= f_1(x). \end{aligned}$$

La aplicación F se llama una **homotopía** entre f_0 y f_1 y la denotaremos por $f_0 \simeq f_1$ o $F\colon f_0 \simeq f_1$.

Para cada $t \in I$ definimos $f_t\colon X \to Y$ por

$$f_t(x) = F(x, t),$$

la cual es una aplicación continua. De esta forma, podemos pensar al parámetro t como al tiempo. Entonces, al tiempo $t = 0$ tenemos la aplicación f_0 y cuando t varía, la aplicación f_t varía continuamente de tal forma que al tiempo $t = 1$ obtenemos la aplicación f_1. Por esta razón se dice que una homotopía es una deformación continua de una aplicación.

Una aplicación $f\colon X \to Y$ que es homotópica a la aplicación constante se dice que es **nulhomotópica** y la homotopía entre ambas se dice que es una **nulhomotopía**.

1.1.1. Homotopía relativa

Dos aplicaciones $f_0, f_1 \colon X \to Y$ son **homotópicas relativamente** a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía

$$F \colon X \times I \to Y$$

entre f_0 y f_1 tal que

$$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a), \qquad \forall a \in A, \quad \forall t \in I,$$

es decir, para todo $a \in A$, $F(a,t)$ no depende de $t \in I$. Denotaremos esto por $f_0 \simeq f_1(\operatorname{rel} A)$ o $f_0 \simeq_{\operatorname{rel} A} f_1$.

1.1 Nota. Si $A = \emptyset$ entonces una homotopía relativa a A no es otra cosa que una homotopía.

1.2 Ejercicio. Sean X y Y espacios topológicos. Denotemos por $M(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones continuas de X a Y. Demuestra que $\simeq_{\operatorname{rel} A}$ es una relación de equivalencia en $M(X,Y)$.

1.1.2. Equivalencia Homotópica

Utilizando el concepto de aplicaciones homotópicas definimos la relación de equivalencia entre espacios topológicos que es más débil que la relación de equivalencia dada por homeomorfismos llamada **equivalencia homotópica**.

Se dice que dos espacios X y Y son **del mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas $f \colon X \to Y$ y $g \colon Y \to X$ tales que

$$gf \simeq 1 \colon X \to X,$$
$$fg \simeq 1 \colon Y \to Y.$$

Las aplicaciones f y g son llamadas **equivalencias homotópicas**. Diremos también que X y Y son **homotópicamente equivalentes** y lo denotaremos por $X \simeq Y$. Intuitivamente, dos espacios son homotópicamente equivalentes si uno puede ser deformado en el otro contrayendo o encogiendo.

1.3 Ejercicio. Demuestra que $\simeq$ es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.

1.4 Ejemplo. La esfera de dimensión $n-1$, $S^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \,\}$ y el espacio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ son homotópicamente equivalentes.

Sea $f \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la inclusión y $g \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Tenemos que $g \circ f = 1 \colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ y $F \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $F(x,t) = \frac{x}{t(\|x\|-1)+1}$ es una homotopía entre la identidad de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $f \circ g$.

Se dice que un espacio X es **contraíble** si es homotópicamente equivalente a un punto. Intuitivamente un espacio es contraíble si puede deformarse en sí mismo a un punto.

1.5 Ejemplo. Ejemplos de espacios contraíbles son los siguientes:

- El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$.
- El n-disco cerrado $D^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \,\}$.
- En n-disco abierto $E^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \,\}$.
- Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

1.6 Ejemplo. Otro ejemplo de espacios homotópicamente equivalentes son el cilindro C y la circunferencia S^1:

$$\begin{aligned} C &= \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1 \,\}, \\ S^1 &= \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Sea $i\colon S^1 \to C$ la inclusión y $r\colon C \to S^1$ dada por $r(x, y, z) = (x, y, 0)$. Obviamente $ri = 1\colon S^1 \to S^1$, mientras que la aplicación $F\colon C \times I \to C$ definida por $F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$ es una homotopía entre ir y $1\colon C \to C$.

Los Ejemplos 1.4 y 1.6 nos llevan a la siguientes definiciones.

Un subconjunto de un espacio X se llama un **retracto** de X si existe una aplicación continua $r\colon X \to A$ tal que $ri = 1\colon A \to A$ (o equivalentemente si $r|_A = 1$), donde $i\colon A \to X$ es la inclusión. La aplicación r se llama **retracción**.

Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación** de X si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $ir \simeq 1\colon X \to X$, donde $i\colon A \to X$ es la inclusión.

Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación fuerte** de X si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $ir \simeq_{\mathrm{rel}\, A} 1\colon X \to X$. La diferencia con la definición anterior es que en este caso, todos los elementos de A quedan fijos bajo la homotopía.

1.7 Nota. Las retracciones en los retractos por deformación, ya sean fuertes o no, son equivalencias homotópicas.

Los Ejemplos 1.4 y 1.6 son retractos por deformación fuertes.

1.2. Conexidad por caminos

La conexidad por caminos es un concepto más fuerte que la conexidad topológica y es más apropiada para el estudio de propiedades homotópicas. Está basada en el concepto de camino en un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$. Un **camino de** x_0 **a** x_1 es una aplicación continua $\alpha\colon I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$.

Definimos una relación en X de la siguiente manera: $x \simeq y$ en X si existe un camino α en X de x a y. Decimos que x esta **conectado** con y mediante el camino α. El espacio X es **conexo por caminos** o también **0-conexo**, si $x \simeq y$ para todo par de puntos $x, y \in X$.

1.8 Ejercicio. Prueba que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia, denotadas por $[x]$, dividen a X en subconjuntos disjuntos llamadas **componentes por caminos** de X. Denotemos por $\pi_0(X)$ al conjunto de clases de equivalencia.

1.9 Nota. X es conexo por caminos si y sólo si $\pi_0(X)$ consta de un sólo elemento.

Sea $f\colon X \to Y$ continua. Entonces f induce una función

$$f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$
$$f_*([x]) = [f(x)].$$

1.10 Ejercicio. Demuestra que f_* está bien definida.

La construcción π_0 tiene las siguientes propiedades *funtoriales*.

1.11 Proposición. *La construcción π_0 es funtorial, es decir, satisface las siguientes propiedades*

1. *Si $f\colon X \to X$ es la identidad, entonces*

$$f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(X)$$

   es también la identidad.

2. *Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son continuas, entonces*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Z).$$

   En particular, si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es una equivalencia de conjuntos (isomorfismo), es decir, una biyección.

1.12 Ejercicio. Demuestra la Proposición 1.11.

De la última afirmación de la Proposición 1.11 tenemos que la conexidad por caminos es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismo. De hecho podríamos haber usado conexidad por caminos en vez de conexidad en nuestra demostración de que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ no son homeomorfos.

Por la Proposición 1.11 tenemos que π_0 es nuestro primer ejemplo de *invariante topológico*, el cual asocia a cada espacio topológico X el conjunto $\pi_0(X)$ y a cada aplicación continua $f\colon X \to Y$ la función $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.

Si X y Y son homeomorfos, entonces $\pi_0(X)$ y $\pi_0(Y)$ tienen la misma cardinalidad. Por lo tanto la cardinalidad $|\pi_0(X)|$ de $\pi_0(X)$ es un invariante topológico numérico, es decir, dos espacios con *distinto* número de componentes por caminos *no* pueden ser homeomorfos.

1.3. Topología de Espacios de Funciones

En la sección anterior definimos nuestro primer invariante topológico usando la conexidad por caminos, pero ¿Que tiene que ver la conexidad por caminos con las homotopías? Sea $F\colon X \times I \to Y$ una homotopía entre $f_0\colon X \to Y$ y $f_1\colon X \to Y$. Recordemos que definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_t\colon X &\to Y, \qquad t \in I \\ f_t(x) &= F(x,t) \end{aligned}$$

las cuales son continuas. Si $M(X,Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y entonces tenemos definida una función

$$\begin{aligned} \alpha\colon I &\to M(X,Y) \\ t &\mapsto f_t \end{aligned} \tag{1.1}$$

tal que $\alpha(0) = f_0$ y $\alpha(1) = f_1$. Esto es casi la definición de un camino en $M(X,Y)$ de f_0 a f_1, lo único que falta es que α sea continua y para tener esto necesitamos dar una topología adecuada al conjunto $M(X,Y)$. Esto es lo que haremos en esta sección.

Sean X y Y conjuntos, $Y \neq \emptyset$, definimos

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y = \{f\colon X \to Y\}$$

1.13 Nota. El conjunto $Y^{\emptyset}$ es un conjunto unitario.

Si suponemos que Y es un espacio topológico, entonces una topología canónica para Y^X es la topología producto en $\prod_{x\in X} Y$.

Sean X y Y espacios topológicos, $Y \neq \emptyset$, definimos

$$M(X,Y) = \{\, f \in X^Y \mid f \text{ es continua}\,\}.$$

Definimos la aplicación **evaluación**

$$\begin{aligned} e'\colon Y^X \times X &\to Y \\ (f,x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

y su restricción

$$\begin{aligned} e\colon M(X,Y) \times X &\to Y \\ (f,x) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Diremos que una topología en $M(X,Y)$ es **admisible** si la evaluación es continua respecto a dicha topología.

Una topología en $M(X,Y)$ que toma en cuenta tanto la topología de X como la de Y y que generaliza a la topología producto es la topología compacto-abierta.

Sean X y Y espacios topológicos y $Y \neq \emptyset$. La topología **compacto-abierta** (**ca**) en $M(X, Y)$ es la generado por los subbásicos

$$\begin{aligned} U^K &= \{\, f \in M(X,Y) \mid f(K) \subset U \,\} \\ &= \Big(\big(\prod_{k \in K} U \big) \times \prod_{k \notin K} Y \Big) \cap M(X,Y) \end{aligned}$$

con K compacto en X y U abierto en Y.

1.14 Proposición. *Sean X y Y espacios topológicos con $Y \neq \emptyset$. Si τ es una topología admisible en $M(X, Y)$, entonces **ca**$\subset \tau$*

De ahora en adelante $M(X, Y)$ siempre tendrá la topología compacto-abierta.

1.15 Proposición. *Sean X y Y espacios topológicos con $Y \neq \emptyset$. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces la topología **ca** es admisible.*

1.16 Corolario. *Sean X y Y espacios topológicos con $Y \neq \emptyset$. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces la topología **ca** es la mínima (más gruesa) admisible en $M(X, Y)$.*

1.3.1. Ley exponencial

1.17 Proposición. *Sean X, Y y Z conjuntos, entonces*

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X,$$

*esta equivalencia de conjuntos es llamada **ley exponencial**.*

Demostración. Basta definir

$$\begin{aligned} \phi \colon Z^{X \times Y} &\to (Z^Y)^X \\ (f \colon X \times Y \to Z) &\mapsto (\phi(f) \colon X \to Z^Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(f)(x) \colon Y &\to Z \\ \phi(f)(x)(y) &= f(x, y) \end{aligned}$$

y como inversa

$$\begin{aligned} \psi \colon (Z^Y)^X &\to Z^{X \times Y} \\ (g \colon X \to Z^Y) &\mapsto (\psi(g) \colon X \times Y \to Z) \end{aligned}$$

$$\psi(g)(x, y) = g(x)(y)$$

Es rutina ver que ambas composiciones son las respectivas identidades. □

Deseamos tener un resultado análogo para $M(X, Y)$.

1.18 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos con Y de Hausdorff y localmente compacto. Entonces se tiene una equivalencia de conjuntos*

$$\phi\colon M(X \times Y, Z) \to M(X, M(Y, Z)).$$

Para que ϕ esté bien definida se requiere:

1. Para toda $x \in X$, $\phi(f)(x)\colon Y \to Z$ sea continua para toda $f \in M(X \times Y, Z)$.
2. $\phi(f)\colon X \to M(Y, Z)$ sea continua para toda $f \in M(X \times Y, Z)$.

Con una condición adicional, la equivalencia de conjuntos en la proposición anterior es un homeomorfismo.

1.19 Teorema (Ley exponencial para aplicaciones continuas)**.** *Si X, Y y Z son espacios topológicos tales que X y Y son Hausdorff y Y es localmente compacto, entonces*

$$\phi\colon M(X \times Y, Z) \to M(X, M(Y, Z))$$

es un homeomorfismo.

1.20 Corolario. *Si X y Y son espacios topológicos tales que X es Hausdorff y localmente compacto, entonces*

$$M(I \times X, Y) \cong M(I, M(X, Y)).$$

Es decir, una homotopía entre dos aplicaciones continuas $f_0, f_1\colon X \to Y$ es equivalente a un camino α en $M(X, Y)$ de f_0 a f_1 definido por (1.1).

1.21 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si X y Y son localmente compactos y Hausdorff, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} c\colon M(X, Y) \times M(Y, Z) &\to M(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

es continua.

En particular, si $f\colon X \to Y$ es continua, entonces induce por restricción de c una aplicación continua

$$\begin{aligned} f^{\#}\colon M(Y, Z) &\to M(X, Z) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Igualmente, si $g\colon Y \to Z$ es continua, entonces induce por restricción de c una aplicación continua

$$g_{\#}\colon M(X, Y) \to M(X, Z) \tag{1.2}$$
$$f \mapsto g \circ f. \tag{1.3}$$

1.22 Nota. Si f y g son homeomorfismos, entonces $f^{\#}$ y $g_{\#}$ son homeomorfismos.

1.23 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos con X de Hausdorff. Entonces*

$$M(X, Y \times Z) \cong M(X, Y) \times M(X, Z).$$

1.3.2. Parejas de espacios y sus espacios de funciones

Una **pareja de espacios** es una pareja (X, A) donde X es un espacio topológico y A es un subespacio de X.

Un caso particular importante de parejas de espacios son las parejas de la forma (X, x_0), con $x_0 \in X$ un punto específico llamado **punto base**. A estas parejas de espacios se les llama **espacios punteados**.

Dadas dos parejas de espacios (X, A) y (Y, B), definimos el espacio de funciones continuas entre ellas $M(X, A; Y, B)$ como el subespacio de $M(X, Y)$ que consiste en las aplicaciones continuas $f \colon X \to Y$ tales que $f(A) \subset B$.

En particular, para dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) tenemos que $M(X, x_0; Y, y_0)$ consta de las aplicaciones continuas $f \colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$, es decir, mandan el punto base de X en el punto base de Y. A estas aplicaciones se les llama **aplicaciones punteadas**.

1.24 Ejemplo. Sea $I = [0, 1]$ y $\partial I = \{0, 1\}$ su frontera. Consideremos los espacios

$$M(I, X) \supset M(I, 0; X, x_0) \supset M(I, \partial I; X, x_0) \tag{1.4}$$

para un espacio punteado $X, x_0)$.

- A $M(I, X)$ se le llama **espacio de trayectorias libres en** X.
- A $M(I, 0; X, x_0)$ se le llama **espacio de trayectorias en** X **basadas en** x_0.
- A $M(I, \partial I; X, x_0)$ se le llama **espacio de lazos en** X **basados en** x_0 y se denota por $\Omega(X, x_0)$.

Consideremos dos parejas de espacios (X, A) y (Y, B), definimos su **producto** como la pareja

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

1.25 Ejemplo. $(I, \partial I) \times (I, \partial I) = (I^2, \partial I^2)$, donde I^2 es el cuadrado unitario en el plano y ∂I^2 su frontera que es homeomorfa al círculo S^1.

Inductivamente, $(I^n, \partial I^n) \times (I, \partial I) = (I^{n+1}, \partial I^{n+1})$, donde I^{n+1} es el cubo unitario en $\mathbb{R}^{n+1}$ y ∂I^{n+1} su frontera que es homeomorfa a la esfera

$$S^n = \{\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \,\}$$

1.26 Proposición. *Tenemos que*

$$M((X, A) \times (Y, B), (Z, C)) \cong M(X, A; M(Y, B; Z, C), \tilde{C})$$

donde $\tilde{C} = M(Y, Y; Z, C)$.

Por la proposición anterior, tenemos que

$$M(I^{n+1}, \partial I^{n+1}; X, x_0) \cong M(I, \partial I; M(I^n, \partial I^n; X, x_0), \tilde{x}_0)$$

donde $\tilde{x}_0 \in M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ tal que $\tilde{x}_0(I^n) = x_0$.

Al espacio $M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ se le llama **n-espacio de lazos en X basados en x_0** y se le denota por $\Omega^n(X, x_0)$.

De lo anterior tenemos que

$$\Omega(\Omega^n(X, x_0), \tilde{x}_0) \cong \Omega^{n+1}(X, x_0).$$

1.27 Ejercicio. Sea (X, x_0) un espacio punteado. Demuestra que hay un homeomorfismo

$$\Omega^n(X, x_0) \cong M(S^n, *; X, x_0).$$

Capítulo 2

Clases de Homotopía

Recordemos del Ejercicio 1.2 que dados X y Y la homotopía entre aplicaciones continuas de X a Y define una relación de equivalencia en $M(X,Y)$. Denotemos por $[X,Y]$ el conjunto de **clases de homotopía** de aplicaciones de X a Y.

Análogamente, podemos definir el concepto de homotopía entre aplicaciones continuas de parejas de espacios, es decir, si $f,g\colon (X,A) \to (Y,B)$ son aplicaciones de parejas de espacios, entonces $f \simeq g$ si existe una **homotopía de parejas** de f a g, $H\colon (X,A) \times I \to (Y,B)$, tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Similarmente, denotamos por $[X,A;Y,B]$ el conjunto de clases de homotopía. En particular, si $X = (X,x_0)$ y $Y = (Y,y_0)$ son espacios punteados, entonces denotamos por $[X,Y]_*$ el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas entre X y Y.

2.1 Nota. Por el Corolario 1.20 tenemos que si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces una homotopía entre las aplicaciones $f_0, f_1\colon X \to Y$ es equivalente a tener un camino en $M(X,Y)$ de f_0 a f_1. Por lo tanto, las componentes por caminos de $M(X,Y)$ equivalen a las clases de homotopía de aplicaciones de X a Y, es decir

$$[X,Y] = \pi_0(M(X,Y)).$$

Análogamente tenemos que $[X,A;Y,B] = \pi_0(M(X,A;Y,B))$.

2.2 Nota. Así como vimos al conjunto de clases de homotopía $[X,Y]$ como el conjunto de componentes por caminos del espacio de aplicaciones continuas $M(X,Y)$, también podemos ver al conjunto de componentes por caminos $\pi_0(X)$ de un espacio X, como un conjunto de clases de homotopía. Un camino $\alpha\colon I \to X$ de $x_0 = \alpha(0)$ a $x_1 = \alpha(1)$ se puede ver como una homotopía $\alpha\colon \{*\} \times I \to X$ entre dos aplicaciones continuas

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i\colon \{*\} &\to X, \quad i = 0,1 \\ \tilde{x}_i(*) &= x_i \end{aligned}$$

del espacio con un solo punto $\{*\}$ a X, así $\pi_0(X) = [\{*\}, X]$. En el caso de espacios punteados (X, x_0) tenemos

$$\pi_0(X) = [S^0, X]_*, \tag{2.1}$$

donde $S^0 = \{p_0, p_1\}$ es la esfera de dimensión cero, que es el espacio que consta solamente de dos puntos.

2.3 Ejercicio. Demuestra que si X o Y son espacios contraibles, entonces $[X, Y]$ consta de un sólo punto (Sugerencia: demuestra que todas las aplicaciones de X a Y son homotópicas a la aplicación constante).

2.4 Ejercicio. Demuestra el siguiente isomorfismo de conjuntos:

$$[X, Y_1 \times Y_2] \cong [X, Y_1] \times [X, Y_2]$$

2.5 Proposición. *Sean X y Y localmente compactos y de Hausdorff. Entonces identificando*

$$\pi_0(M(X,Y) \times M(Y,Z)) \quad \textit{con} \quad \pi_0(M(X,Y)) \times \pi_0(M(Y,Z)),$$

la aplicación c de la Proposición 1.21 determina una función

$$\begin{aligned} [X,Y] \times [Y,Z] &\to [X,Z] \\ ([f],[g]) &\mapsto [g \circ f]. \end{aligned}$$

En particular, $f\colon X \to Y$ induce

$$f^*\colon [Y,Z] \to [X,Z]$$

y $g\colon Y \to Z$ induce

$$g_*\colon [X,Y] \to [X,Z].$$

(Para éstas dos últimas no se requieren hipótesis sobre X y Y).

2.6 Nota. También se tiene un resultado análogo para parejas de espacios.

En términos de clases de homotopía, una equivalencia homotópica $f\colon X \to Y$ es una aplicación que tiene un **inverso homotópico**, es decir, una aplicación $g\colon Y \to X$ tal que las clases de homotopía $[g \circ f] = [\mathrm{id}_X]$ en $[X, X]$ y $[f \circ g] = [\mathrm{id}_Y]$ en $[Y, Y]$. Por lo tanto tenemos la siguiente

2.7 Proposición. *Si $f\colon X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces f induce biyecciones (equivalencia o isomorfismo de conjuntos)*

$$f^*\colon [Y,Z] \to [X,Z]$$

y

$$f_*\colon [Z,X] \to [Z,Y]$$

para cualquier espacio Z.

2.1. Grupos Topológicos

Hemos estudiado las principales propiedades de los conjuntos de clases de homotopía de aplicaciones $[X, Y]$ entre dos espacios topológicos X y Y. Nuestro siguiente objetivo es introducir estructuras algebraicas en $[X, Y]$ para enriquecer nuestra teoría, para ello necesitamos recordar la noción de grupo topológico.

Un **grupo topológico** es un espacio punteado (G, e) dotado de dos aplicación continuas

$$\mu\colon G \times G \to G$$

llamada **multiplicación**, y

$$j\colon G \to G$$

llamada **inverso**, las cuales dan a G una estructura de grupo, es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(e,1)}"] \arrow[dr, "1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "{(1,e)}"'] \arrow[dl, "1"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \text{(identidad bilateral)} \tag{2.2}$$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} \qquad \text{(asociatividad)} \tag{2.3}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(j,1)}"] \arrow[dr, "e"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "{(1,j)}"'] \arrow[dl, "e"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \text{(inverso bilateral)} \tag{2.4}$$

Tenemos que $e\colon G \to G$ es la aplicación constante $e(g) = e$ para toda $g \in G$, la aplicación $(e, 1)(g) = (e, g)$, etc. Además G es llamado **conmutativo** o **abeliano** si además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

donde $T\colon G \times G \to G \times G$ es la aplicación $T(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, para toda $(g_1, g_2) \in G \times G$.

2.8 Ejemplo. Los siguientes son ejemplos de grupos topológicos:

1. $G = \mathbb{R}$, los números reales con la topología usual y la suma.

2. $G = \mathbb{R} - \{0\}$, con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y con la multiplicación.

3. $G = \mathbb{R}^n$, el espacio Euclideano de dimensión n con la topología usual y la suma de vectores.

4. $G = S^1 = \{ e^{ix} \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R} \}$, el círculo unitario con la topología inducida por $\mathbb{C}$ y la multiplicación de números complejos: $e^{ix}e^{iy} = e^{x+y}$.

5. $G = GL_n(\mathbb{R})$ las matrices $n \times n$ con determinante no nulo, como el determinante es una aplicación continua $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donde $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas reales, es identificado con $\mathbb{R}^{n^2}$, se tiene que $GL_n(\mathbb{R})$ es un abierto de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La operación en $GL_n(\mathbb{R})$ es la multiplicación de matrices, la cual es continua.

   Nótese que el la restricción del determinante $\det\colon GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} - \{0\}$ es un homomorfismo continuo.

Sea G un grupo topológico. Tenemos que $M(X, G)$ es también un grupo topológico con la siguiente multiplicación:

$$\begin{aligned} M(X,G) \times M(X,G) &\to M(X,G) \\ (f,g) &\mapsto \mu \circ (f,g) = fg, \end{aligned}$$

es decir, $(fg)(x) = f(x)g(x)$. De manera análoga, $\pi_0(G)$ adquiere una estructura de grupo inducida por la multiplicación μ de G como sigue:

$$\begin{aligned} &\bar{\mu}\colon \pi_0(G) \times \pi_0(G) \to \pi_0(G) \\ &\bar{\mu}([x],[y]) = [\mu(x,y)] = [xy]. \end{aligned}$$

2.9 Proposición. *Sea G un grupo topológico. Entonces para todo espacio X, el conjunto $[X, G]$ tiene una estructura de grupo inducida. Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación continua, entonces*

$$f^*\colon [Y,G] \to [X,G]$$

es un homomorfismo de grupos, y si $g\colon G \to H$ es un homomorfismo continuo de grupos topológicos, entonces

$$g_*\colon [X,G] \to [X,H]$$

es un homomorfismo de grupos. Finalmente, si G es abeliano, entonces $[X, G]$ es también abeliano.

2.2. H-Espacios

Hemos visto que si Y es un grupo topológico, entonces $[X, Y]$ hereda una estructura de grupo. La propiedad de ser grupo topológico es una propiedad muy fuerte, afortunadamente es posible debilitar esta condición en Y y aún así obtener una estructura de grupo inducida en $[X, Y]$. Esta condición más débil es el concepto de H-espacio.

Estaremos interesados principalmente en el caso de *espacios punteados* y *aplicaciones punteadas*. Denotaremos por $M_*(X, Y)$ es espacio de aplicaciones continuas punteadas de X a Y, es decir $M_*(X, Y) = M(X, x_0; Y, y_0)$ donde x_0 y y_0 son los puntos base de X y Y respectivamente. Análogamente, denotaremos por $[X, Y]_*$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas de X a Y, es decir, $[X, Y]_* = [X, x_0; Y, y_0]$.

Motivados por las propiedades (2.2), (2.3) y (2.4) que definen a un grupo topológico definimos la noción de H-espacio.

Un H**-espacio** es un espacio punteado (W, w_0) dotado de una aplicación punteada continua

$$\mu\colon (W \times W, (w_0, w_0)) \to (W, w_0)$$

llamada H**-multiplicación**, tal que la aplicación constante $e\colon W \to W$ con $e(w) = w_0$ para toda $w \in W$ es una H**-identidad**, es decir, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "{(e,1)}"] \arrow[dr, "1"'] & W \times W \arrow[d, "\mu"] & W \arrow[l, "{(1,e)}"'] \arrow[dl, "1"] \\ & W & \end{tikzcd} \qquad \text{(identidad salvo homotopía)} \tag{2.5}$$

o sea $\mu \circ (1, e) \simeq 1 \simeq \mu \circ (e, 1)$. Decimos que μ es H**-asociativa** si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} W \times W \times W \arrow[r, "\mu \times 1"] \arrow[d, "1 \times \mu"'] & W \times W \arrow[d, "\mu"] \\ W \times W \arrow[r, "\mu"'] & W \end{tikzcd} \qquad \text{(asociatividad salvo homotopía)} \tag{2.6}$$

es decir $\mu \circ (\mu \times 1) \simeq \mu \circ (1 \times \mu)$. Una aplicación

$$j\colon (W, w_0) \to (W, w_0)$$

es llamada un H**-inverso**, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "{(j,1)}"] \arrow[dr, "e"'] & W \times W \arrow[d, "\mu"] & W \arrow[l, "{(1,j)}"'] \arrow[dl, "e"] \\ & W & \end{tikzcd} \qquad \text{(inverso salvo homotopía)} \tag{2.7}$$

es decir, $\mu \circ (j, 1) \simeq e \simeq \mu \circ (1, j)$.

Además, W es llamado **H-conmutativo o H-abeliano** si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} W \times W \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & W \times W \arrow[dl, "\mu"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

es decir $\mu \circ T \simeq \mu$, donde $T\colon W \times W \to W \times W$ es la aplicación $T(w_1, w_2) = (w_2, w_1)$, para toda $(w_1, w_2) \in W \times W$.

Un **H-grupo** es un H-espacio con una H-multiplicación H-asociativa μ y un H-inverso j.

Si (W, w_0) y (W', w_0') son H-espacios con H-multiplicaciones μ y μ' respectivamente, y $h\colon (W, w_0) \to (W', w_0')$ es una aplicación punteada continua, decimos que h es un **H-homomorfismo** si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} W \times W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "h \times h"'] & W \arrow[d, "h"] \\ W' \times W' \arrow[r, "\mu'"'] & W' \end{tikzcd}$$

es decir, $h \circ \mu \simeq \mu' \circ h \times h$.

La razón de esta definición es la siguiente proposición.

2.10 Proposición. *Si (W, w_0) es un H-grupo con H-multiplicación μ y H-inverso j, entonces para todo espacio punteado (X, x_0), al conjunto*

$$[X, W]_*$$

se le puede dar una estructura de grupo si definimos el producto $[f] \cdot [g]$ como la clase de homotopía de la composición

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} W \times W \xrightarrow{\mu} W.$$

Donde Δ es la aplicación diagonal dada por $\Delta(x) = (x, x)$. La identidad de grupo es la clase $[e]$ de la aplicación constante, y el inverso está dado por $[f]^{-1} = [j \circ f]$. Si μ es H-conmutativa, entonces $[X, W]_*$ es abeliano. Toda aplicación $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce un homomorfismo

$$f^*\colon [Y, W]_* \to [X, W]_*.$$

2.11 Nota. Sea $fg\colon X \to W$ dada por la composición $\mu \circ f \times g \circ \Delta$, es decir,

$$fg(x) = \mu(f(x), g(x)).$$

Por lo tanto tenemos que

$$[f] \cdot [g] = [fg].$$

2.12 Ejercicio. Demuestra que si (W, w_0) es un H-grupo H-abeliano, entonces $[X, W]_*$ es un grupo abeliano.

2.13 Proposición. *Si $h\colon W \to W'$ es un H-homomorfismo de H-espacios, entonces para todo espacio X,*

$$h_*\colon [X, W]_* \to [X, W']_*$$

es un homomorfismo.

2.2.1. Espacios de Lazos

Claramente los grupo topológico son ejemplos de H-espacios.

Un ejemplo fundamental de H-espacios es el *espacio de lazos* de un espacio topológico punteado.

Si (Y, y_0) es un espacio punteado, entonces su espacio de lazos $\Omega(Y, y_0)$ basados en y_0, es a su vez un espacio de lazos punteado, con punto base $\tilde{y}_0$, el lazo constante $\tilde{y}_0(t) = y_0$, para toda $t \in I$.

El espacio de lazos $(\Omega Y, \tilde{y}_0)$ tiene la estructura de un H-grupo como sigue. La H-multiplicación está dada por

$$\mu\colon \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$$

tal que para lazos $\alpha, \beta \in \Omega Y$, tenemos

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

El H-inverso está dado por

$$j\colon \Omega Y \to \Omega Y$$
$$j(\alpha)(t) = \alpha(1-t).$$

2.14 Ejercicio. Verifica que μ es continua.

Para probar que μ es efectivamente una H-multiplicación de H-grupo, tenemos que verificar que los diagramas (2.5), (2.6), (2.7) conmutan salvo homotopía. Por ejemplo, si $e\colon \Omega Y \to \Omega Y$ es la aplicación constante $e(\alpha) = \tilde{y}_0$, con $\tilde{y}_0$ el lazo constante, para ver que j es un H-inverso, la homotopía entre $\mu(\alpha, j(\alpha))$ y e esta dada por:

$$H\colon \Omega Y \times I \to \Omega Y$$

$$H(\alpha, s)(t) = \begin{cases} \alpha(2(1-s)t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)(1-t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

La segunda homotopía esta dada de manera análoga.

Por lo tanto tenemos

2.15 Teorema. *Para todo espacio punteado Y, ΩY es un H-grupo y por lo tanto, para todo espacio puntado X, $[X, \Omega Y]_*$ es un grupo. Si $f\colon X \to X'$ es continua, entonces*

$$f^*\colon [X', \Omega Y]_* \to [X, \Omega Y]_*$$

es un homomorfismo. Finalmente, si $g\colon Y \to Y'$ es una aplicación punteada, entonces $\Omega g\colon \Omega Y \to \Omega Y'$ dada por la restricción de $g_\#$ dada en (1.2)*, es un H-homomorfismo. Entonces*

$$(\Omega g)_*\colon [X, \Omega W]_* \to [X, \Omega W']_*$$

es un homomorfismo de grupos.

2.3. H-Coespacios

Podemos preguntarnos por la situación dual a la que planteamos a con los H-espacios, es decir, definir espacios punteados (Q, q_0) tales que $[Q, Y]_*$ es un grupo para todo espacio punteado (Y, y_0) y tal que si $g\colon Y \to Y'$ es continua, entonces $g_*\colon [Q, Y]_* \to [Q, Y']_*$ es un homomorfismo.

Para esto, necesitamos el concepto dual al producto cartesiano de espacios punteados. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios punteados. Su producto topológico es también un espacio punteado $(X \times Y, (x_0, y_0))$. Definimos el **coproducto reducido** o **suma cuña** $X \vee Y$ como el subespacio de $X \times Y$

$$X \vee Y = \{\, (x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ o } y = y_0 \,\},$$

es decir, $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$.

De manera dual al producto, la cuña tiene la siguiente propiedad, dadas dos aplicaciones punteadas $f\colon X \to Z$ y $g\colon Y \to Z$, entonces existe una aplicación punteada

$$\langle f, g\rangle\colon X \vee Y \to Z$$

dada por

$$\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } y = y_0 \\ g(y) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Por otro lado, si $f\colon X \to X'$ y $g\colon Y \to Y'$ son aplicaciones punteadas, estas definen una aplicación punteadas

$$f \vee g\colon X \vee Y \to X' \vee Y'$$

dada por

$$(f \vee g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

2.16 Ejercicio. Demuestra el siguiente isomorfismo de conjuntos:

$$[X_1 \vee X_2, Y] \cong [X_1, Y] \times [X_2, Y].$$

Un H**-coespacio** es un espacio punteado (Q, q_0) dotado de una aplicación punteada continua
$$\nu\colon (Q, q_0) \to (Q \vee Q, (q_0, q_0))$$
llamada H**-comultiplicación**, tal que la aplicación constante $e\colon Q \to Q$ con $e(q) = q_0$ para toda $q \in Q$ es una H**-counidad**, es decir, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
Q & Q \vee Q \arrow[l, "\langle e,1\rangle"'] \arrow[r, "\langle 1,e\rangle"] & Q \\
& Q \arrow[ul, "1"] \arrow[u, "\nu"] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd} \qquad \text{(counidad salvo homotopía)} \tag{2.9}$$

o sea $\langle 1, e\rangle \circ \nu \simeq 1 \simeq \langle e, 1\rangle \circ \nu$. Decimos que ν es H**-coasociativa** si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
Q \vee Q \vee Q & Q \vee Q \arrow[l, "\nu\vee 1"'] \\
Q \vee Q \arrow[u, "1\vee\nu"] & Q \arrow[l, "\nu"] \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd} \qquad \text{(coasociatividad salvo homotopía)} \tag{2.10}$$

es decir $(\nu \vee 1) \circ \nu \simeq (1 \vee \nu) \circ \nu$. Una aplicación
$$j\colon (Q, q_0) \to (Q, q_0)$$
es llamada un H**-coinverso**, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
Q & Q \vee Q \arrow[l, "\langle j,1\rangle"'] \arrow[r, "\langle 1,j\rangle"] & Q \\
& Q \arrow[ul, "e"] \arrow[u, "\nu"] \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd} \qquad \text{(coinverso salvo homotopía)} \tag{2.11}$$

es decir, $\langle j, 1\rangle \circ \nu \simeq e \simeq \langle 1, j\rangle \circ \nu$.

Además, Q es llamado H**-coconmutativo o** H**-coabeliano** si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
Q \vee Q & & Q \vee Q \arrow[ll, "T"'] \\
& Q \arrow[ul, "\nu"] \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir $T \circ \nu \simeq \nu$, donde $T\colon Q \vee Q \to Q \vee Q$ es la aplicación $T(q_1, q_2) = (q_2, q_1)$, para toda $(q_1, q_2) \in Q \vee Q$.

Un H**-cogrupo** es un H-coespacio con una H-comultiplicación H-coasociativa ν y un H-coinverso j.

Si (Q, q_0) y (Q', q_0') son H-coespacios con H-comultiplicaciones ν y ν' respectivamente, y $k\colon (Q', q_0') \to (Q, q_0)$ es una aplicación punteada continua, decimos que h es un H**-cohomomorfismo** si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd}
Q \vee Q & Q \arrow[l, "\nu"'] \\
Q' \vee Q' \arrow[u, "k \vee k"] & Q' \arrow[l, "\nu'"] \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

es decir, $\nu \circ k \simeq k \vee k \circ \nu'$.

2.17 Nota. Para "dualizar" en general basta reemplazar $K \times K$ por $K \vee K$ e invertir las flechas.

Análogamente al caso de H-grupos, la razón de esta definición es la siguiente proposición.

2.18 Proposición. *Si (Q, q_0) es un H-cogrupo con H-comultiplicación ν y H-coinverso j, entonces para todo espacio punteado (X, x_0), al conjunto*

$$[Q, X]_*$$

se le puede dar una estructura de grupo si definimos el producto $[f] * [g]$ como la clase de homotopía de la composición

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\Delta'} X.$$

Donde Δ' es la aplicación de doblado dada por $\Delta'(x, x_0) = x = \Delta'(x_0, x)$. La identidad de grupo es la clase $[e]$ de la aplicación constante, y el inverso está dado por $[f]^{-1} = [f \circ j]$. Si ν es H-coconmutativa, entonces $[Q, X]_*$ es abeliano. Toda aplicación $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce un homomorfismo

$$f_*\colon [Q, X]_* \to [Q, Y]_*.$$

2.19 Nota. Sean $f\colon Q \to X$ y $g\colon Q \to X$ aplicaciones continuas. Definimos la aplicación $\langle f, g\rangle\colon Q \vee Q \to X$ por $\langle f, g\rangle = \Delta' \circ (f \vee g)$, es decir

$$\langle f, g\rangle(q_1, q_2) = \begin{cases} f(q_1) & \text{si } q_2 = q_0, \\ g(q_2) & \text{si } q_1 = q_0. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$[f] * [g] = [\langle f, g\rangle \circ \nu].$$

2.20 Ejercicio. Demuestra que si (Q, q_0) es un H-cogrupo H-coabeliano, entonces $[Q, Y]_*$ es un grupo abeliano.

2.21 Proposición. *Si $k\colon Q' \to Q$ es un H-cohomomorfismo de H-coespacios, entonces para todo espacio Y,*

$$k^*\colon [Q, Y]_* \to [Q', Y]_*$$

es un homomorfismo.

2.3.1. Suspensiones

El ejemplo típico de un H-cogrupo lo da la suspensión reducida de un espacio punteado. Esta construcción es en cierto sentido, dual a la construcción del espacio de lazos.

Si (X, x_0) es un espacio punteado, definimos su **suspensión reducida** ΣX como el cociente

$$\Sigma X = X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I)$$

el cual es nuevamente un espacio punteado, cuyo punto base es la imagen de $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$, despues de que ha sido colapsada a un punto en el cociente.

Denotamos por $x \wedge t$ la clase de $(x, t) \in X \times I$. Entonces, el punto base es $\bar{x}_0 = x_0 \wedge t = x \wedge 0 = x \wedge 1$. Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación punteada, entonces $f \times \mathrm{id}_I$ induce una aplicación punteada

$$\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y, \tag{2.12}$$

$$\Sigma f(x \wedge t) = f(x) \wedge t. \tag{2.13}$$

2.22 Proposición. *Tenemos el siguiente homeomorfismo.*

$$S^n \cong \Sigma S^{n-1}.$$

Definimos una H-comultiplicación

$$\nu\colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$$

por

$$\nu(x \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge 2t, \bar{x}_0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\bar{x}_0, x \wedge (2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

la cual tiene el efecto de "aplastar" el ecuador.

2.23 Ejercicio. Si $j\colon \Sigma X \to \Sigma X$ está dada por $j(x \wedge t) = x \wedge (1-t)$, entonces demuestra que j determina un H-coinverso. (Sugerencia: Usa la homotopía del H-inverso dada en (2.8)).

Tenemos el siguiente resultado.

2.24 Teorema. *Para todo espacio punteado X, ΣX es un H-cogrupo y por lo tanto, para todo espacio puntado Y, $[\Sigma X, Y]_*$ es un grupo. Si $g\colon Y' \to Y$ es continua, entonces*

$$g_*\colon [\Sigma X, Y']_* \to [\Sigma X, Y]_*$$

es un homomorfismo. Finalmente, si $f\colon X \to X'$ es una aplicación punteada, entonces $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma X'$ es un H-cohomomorfismo. Entonces

$$(\Sigma f)^*\colon [\Sigma X', Y]_* \to [\Sigma X, Y]_*$$

es un homomorfismo de grupos.

2.4. Adjunción

Existe una relación entre las estructuras de grupo que se definen en los conjuntos de clases de homotopía usando espacios de lazos y suspensiones expresada en la siguiente proposición.

2.25 Proposición. *Hay un homeomorfismo*

$$M_*(\Sigma X, Y) \cong M_*(X, \Omega Y)$$

tal que la biyección inducida

$$[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. El homeomorfismo y su inversa están dados por

$$\begin{aligned} M_*(\Sigma X, Y) &\leftrightarrow M_*(X, \Omega Y) \\ g\colon \Sigma X \to Y &\mapsto \hat{g}\colon X \to \Omega Y \\ &\qquad \hat{g}(x)(t) = g(x \wedge t) \\ \check{f}\colon \Sigma X \to Y &\leftarrow\!\shortmid f\colon X \to \Omega Y \\ \check{f}(x \wedge t) = f(x)(t) & \end{aligned}$$

Este homeomorfismo induce una biyección entre las componentes por caminos. □

2.26 Ejercicio. Muestra que las biyecciones $[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$ es natural en X y en Y, es decir, muestra que si $f\colon X' \to X$ y $g\colon Y \to Y'$ son aplicaciones punteadas, entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd} {[\Sigma X, Y]_*} \arrow[r] \arrow[d, "(\Sigma f)^*"'] & {[X, \Omega Y]_*} \arrow[d, "f^*"] \\ {[\Sigma X', Y]_*} \arrow[r] & {[X', \Omega Y]_*} \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} {[\Sigma X, Y]_*} \arrow[r] \arrow[d, "g_*"'] & {[X, \Omega Y]_*} \arrow[d, "(\Omega g)_*"] \\ {[\Sigma X', Y]_*} \arrow[r] & {[X', \Omega Y]_*} \end{tikzcd}$$

conmutan, donde las flechas horizontales representan los isomorfismos correspondientes.

Si Q es un H-cogrupo y W es un H-grupo, entonces obtenemos dos estructuras de grupo en $[Q, W]_*$.

Para comparar ambas estructuras necesitamos el siguiente sencillo lema algebraico.

2.27 Lema. *Sea G un conjunto equipado con dos multiplicaciones $*, \cdot$ tales que*

(a) $*, \cdot$ tienen una unidad bilateral comn e:

$$e * x = x * e = x = e \cdot x = x \cdot e.$$

(b) $*, \cdot$ son mutuamente distributivas, es decir,

$$(w * x) \cdot (y * z) = (w \cdot y) * (x \cdot z).$$

Entonces $*$ y $\cdot$ coinciden y ambas son conmutativas y asociativas.

Demostración. Tenemos que

$$x * y = (x \cdot e) * (e * y) = (x * e) \cdot (e * y) = x \cdot y$$

por lo tanto $*$ y $\cdot$ coinciden.

Además

$$x * y = (e \cdot x) * (y \cdot e) = (e * y) \cdot (x * e) = y \cdot x = y * x,$$

por lo que la estructura es conmutativa.

Finalmente

$$x * (y * z) = (x \cdot e) * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (e * z) = (x * y) * z,$$

por lo que la estructura es asociativa. □

2.28 Proposición. *Las dos estructuras de grupo en $[Q, W]_*$ coinciden y ambas son conmutativas.*

Demostración. (a) Sabemos que ambos productos tienen como neutro bilateral a la aplicación punteada constante

$$\begin{aligned} e\colon Q &\to W \\ q &\mapsto w_0. \end{aligned}$$

(b) Falta ver que son mutuamente distributivas, es decir,

$$([w] * [x]) \cdot ([y] * [z]) = [\langle w, x\rangle \circ \nu] \cdot [\langle y, z\rangle \circ \nu] = [(\langle w, x\rangle \circ \nu)(\langle y, z\rangle \circ \nu)].$$

Veamos que hace esta aplicación representante de la clase:

$$\begin{aligned} \{(\langle w, x\rangle \circ \nu)(\langle y, z\rangle \circ \nu)\}(q) &= \mu((\langle w, x\rangle \circ \nu)(q), (\langle y, z\rangle \circ \nu)(q)) \\ &= \mu(\langle w, x\rangle(q_1, q_2)\langle y, z\rangle(q_1, q_2)) \\ &= \begin{cases} \mu(w(q_1), y(q_1)) & q_2 = q_0 \\ \mu(x(q_2), z(q_2)) & q_1 = q_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$([w] \cdot [y]) * ([x] \cdot [z]) = [wy] * [xz] = [\langle wy, xz \rangle \circ \nu].$$

Veamos que hace la aplicación representante de la clase:

$$\begin{aligned} \langle wy, xz \rangle \circ \nu(q) &= \langle wy, xz \rangle (q_1, q_2) \\ &= \begin{cases} \mu(w(q_1), y(q_1)) & q_2 = q_0 \\ \mu(x(q_2), z(q_2)) & q_1 = q_0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.29 Corolario. *Para $n \geq 2$, los grupos isomorfos*

$$[\Sigma^n X, Y]_* \cong [X, \Omega^n Y]_*.$$

son abelianos.

Capítulo 3

Grupos de homotopía

Con lo hecho hasta ahora, podemos generalizar a nuestro invariante topológico $\pi_0(X)$, el conjunto de componentes por caminos.

Sea (X, x_0) un espacio punteado, entonces definimos $\pi_1(X)$ como el conjunto de componentes por caminos del espacio de lazos de X basados en x_0 $(\Omega X, \tilde{x}_0)$. En general definimos $\pi_n(X)$ como el conjunto de componentes por caminos del n-ésimo espacio de lazos:

$$\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n X)$$

y es llamado el **n-ésimo grupo de homotopía** de X. El grupo $\pi_1(X)$ también se llama **grupo fundamental** de X.

3.1 Nota. Por (2.1) tenemos que

$$\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n X) = [S^0, \Omega^n X]_*$$

y como $\Omega^n X$ es un H-grupo, tenemos que $\pi_n(X)$ con $n \geq 1$ tiene estructura de grupo.

Usando la Proposición 2.25 podemos dar otra interpretación de los grupos de homotopía.

3.2 Proposición. *Sea X un espacio punteado, entonces*

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_*.$$

Demostración. De la Proposición 2.22 tenemos que

$$\pi_n(X) = [S^0, \Omega^n X]_* = [\Sigma^n S^0, X]_* = [S^n, X]_*.$$

□

Tenemos el siguiente corolario de la Proposición 2.28.

3.3 Corolario. *Los grupos de homotopía $\pi_n(X)$ de X son abelianos si $n \geq 2$.*

Usando la Proposición 2.5 obtenemos la generalización de la Proposición 1.11.

3.4 Proposición. *La construcción π_n es funtorial, es decir, satisface las siguientes propiedades*

1. *Si $f\colon X \to X$ es la identidad, entonces*

$$f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(X)$$

es también la identidad.

2. *Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son continuas, entonces*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Z).$$

En particular, si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos para $n \geq 1$.

Del Ejercicio 2.3 tenemos:

3.5 Proposición. *Si X es contraible, entonces $\pi_n(X) = 0$ para toda $n \geq 0$.*

De la Proposición 1.23 tenemos que $\pi_n(Y \times Z) \cong \pi_n(Y) \times \pi_n(Z)$. En general tenemos que para un producto $\prod_\alpha X_\alpha$ de una colección arbitraria de espacios conexos por caminos se tienen isomosfismos

$$\pi_n(\prod_\alpha X_\alpha) = \prod_\alpha \pi_n(X_\alpha).$$

Como hemos visto, las esferas S^n son muy importantes en la Teoría de Homotopía. Respecto a sus grupos de homotopía tenemos el siguiente resultado.

3.6 Proposición. $\pi_r(S^n) = 0$ *para toda* $r < n$.

Idea de la demostración. Dada una aplicación $S^r \to S^n$ se puede deformar a una aplicación homotópica que no contenga a un punto de S^n en su imagen y entonces se usa que el complemento de un punto en S^n es contraible. □

De este resultado tenemos la siguiente definición. Sea X un espacio punteado y $n \geq 0$. Decimos que X es n-**conexo** si $\pi_r(X) = 0$ para $r \leq n$. En particular, X es 0-conexo si y sólo si X es conexo por caminos.

3.7 Ejemplo. La Proposición 3.6 nos dice que la esfera S^n es $n-1$-conexa.

Con respecto a la suma cuña tenemos el siguiente resultado:

3.8 Proposición. *Supongamos que X es $m-1$-conexo y Y es $n-1$-conexo. Entonces*

$$\pi_r(X \vee Y) \cong \pi_r(X) \oplus \pi_r(Y),$$

si $2 \leq r \leq m+n-2$.

Recordemos que dada una aplicación $f\colon S^r \to S^n$ tenemos una aplicación inducida en las suspensiones $\Sigma f\colon \Sigma S^r \to \Sigma S^n$ dada por (2.12). Esto nos define un homomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_r(S^n) &\to \pi_{r+1}(S^{n+1}) \\ [f] &\mapsto [\Sigma f]. \end{aligned}$$

Esto nos da un resultado conocido como el Teorema de Suspensión de Freudental.

3.9 Teorema. *El homomorfismo dado por la suspensión $\pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^{n+1})$ es un isomorfismo para $r < 2n-1$ y suprayectivo para $r = 2n-1$.*

3.10 Corolario. *$\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(S^{n+1})$ para toda $n \geq 2$ y $\pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2)$ es suprayectiva.*

3.1. Grupos de homotopía relativa

Lo que hemos hecho se generaliza inmediatamente para el caso de parejas de espacios punteados (X, A) con punto base $x_0 \in A \subset X$. Por ejemplo, $[\Sigma X, \Sigma A; Y, B]_*$ tiene estructura de grupo y es isomorfo a $[X, A; \Omega Y, \Omega B]_*$.

Sea (X, A) una pareja de espacios con punto base $x_0 \in A \subset X$. Para $n \geq 1$ definimos

$$\pi_n(X, A) = [D^n, S^{n-1}; X, A]_*.$$

3.11 Proposición. *El conjunto $\pi_n(X, A)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\pi_n(X, A)$ es un grupo si $n \geq 2$ y es abeliano si $n \geq 3$.*
2. *Una aplicación $f\colon (D^n, S^{n-1}, *) \to (X, A, x_0)$ representa al elemento identidad de $\pi_n(X, A)$ si y sólo si f es homotópico como aplicación de parejas punteadas a una aplicación g tal que $g(D^n) \subset A$.*

El grupo $\pi_n(X, A)$, $n \geq 2$ es llamado el **n-ésimo grupo de homotopía** de la pareja (X, A).

3.12 Nota. Para el caso particular de que la pareja de espacios sea un espacio punteado (X, x_0) tenemos que si $n \geq 1$

$$\pi_n(X, \{x_0\}) = [D^n, S^{n-1}; X, \{x_0\}]_* = [S^n, X]_* = \pi_n(X).$$

Por lo tanto identificaremos ambos conjuntos. Por lo tanto la inclusión $j\colon (X, \{x_0\}) \to (X, A)$ induce

$$j_*\colon \pi_n(X) \cong \pi_n(X, \{x_0\}) \to \pi_n(X, A),$$

el cual es un homomorfismo si $n \geq 2$.

Si nos restringimos al segundo término de la pareja obtenemos el homomorfismo ∂ dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,A) \arrow[r, dashed, "\partial"] \arrow[d, equal] & \pi_{n-1}(A) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
{[D^n, S^{n-1}; X, A]_*} \arrow[r] & {[S^{n-1}, A]_*.}
\end{tikzcd}$$

El homomorfismo ∂ es llamado el **homomorfismo de conexión** de los grupos de homotopía de la pareja (X, A).

Sea $i\colon (A, x_0) \to (X, x_0)$ la inclusión, y $i_*\colon \pi_n(A) \to \pi_n(X)$ el homomorfismo inducido por i, entonces obtenemos una sucesión

$$\begin{gathered}
\cdots \to \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \to \dots \\
\cdots \to \pi_1(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X)
\end{gathered} \tag{3.1}$$

la cual tiene una propiedad que nos será muy útil.

3.1.1. Sucesiones Exactas

Una sucesión de grupos $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$ es llamada **exacta** si $\operatorname{im} i = \ker j$.

3.13 Nota. Las sucesiones exactas de la forma

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0 \tag{3.2}$$

son llamadas **sucesiones exactas cortas**. Nótese que se tiene que i es inyectiva, j es suprayectiva y que j induce un isomorfismo de $B/i(A)$ en C por el Primer Teorema de Isomorfismo.

3.14 Nota. Decir que $k\colon A \to B$ es un isomorfismo es equivalente a decir que $0 \to A \xrightarrow{i} B \to 0$ es exacta.

3.15 Proposición. *Para una sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0 \tag{3.3}$$

de grupos abelianos las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I) *Existe un homomorfismo $r\colon B \to A$ tal que $r \circ i = 1_A$.*

II) *Existe un homomorfismo $q\colon C \to B$ tal que $j \circ q = 1_C$.*

En ambos casos se tiene un isomorfismo $B \cong A \oplus C$.

Decimos que una sucesión exacta se **escinde** si cumple con alguna de las afirmaciones de la Proposición 3.15.

Un resultado fundamental en Teoría de Homotopía es que la sucesión dada en (3.1) es exacta y es conocida como la **sucesión exacta de homotopía**.

Como una aplicación de la sucesión exacta de homotopía consideremos una retracción $r\colon X \to A$ de X en un subespacio A. Entonces si $i\colon A \to X$ es la inclusión tenemos que $r \circ i = 1_A$ y por lo tanto $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = 1_*$, es decir, i_* tiene a r_* como inverso izquierdo y por lo tanto i_* es inyectivo. Entonces en la sucesión exacta de la pareja (X, A)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \to \ldots$$

tenemos que el homomorfismo de conexión ∂ es siempre cero, por lo que obtenemos una colección de sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_n(A) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[l, bend left, "r_*"] & \pi_n(X, A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que se escinden y por lo tanto

$$\pi_n(X) = \pi_n(A) \oplus \pi_n(X, A)$$

si todos son grupos abelianos.

3.2. Haces localmente triviales

Un **haz localmente trivial** es una cuádrupla (E, p, B, F) donde $p\colon E \to B$ es una aplicación continua tal que B tiene una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y para cada $\alpha \in A$ existe un homeomorfismo

$$\phi_\alpha\colon U_\alpha \times F \to U_\alpha$$

tal que $p \circ \phi_\alpha = p_{U_\alpha}\colon U_\alpha \times F \to U_\alpha$. En otras palabras, localmente $p\colon E \to B$ es un producto. A F se le llama la **fibra** del haz.

3.16 Ejemplo. Sea $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definida como

$$S^3 = \{\, (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z'\bar{z'} = 1 \,\}.$$

Identifiquemos a la **esfera de Riemann**, definida por $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, con S^2 mediante la proyección estereográfica. Definimos una aplicación

$$p\colon S^3 \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

por $p(z, z') = z/z'$ si $z' \neq 0$ y por $p(z, z') = \infty$ si $z' = 0$. Entonces p es una fibración localmente trivial con fibra $S^1 = \{\, \zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta\bar{\zeta} = 1 \,\}$. La aplicación p se conoce como la **fibración de Hopf**.

Un haz fibrado (E, p, B, F) con F discreta es llamada un **cubriente** de B.

3.17 Ejemplo. La **aplicación exponencial**

$$p\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$$

definida por $p(t) = e^{2\pi i t}$. Claramente $p(t) = p(t')$ si y sólo si $t - t' \in \mathbb{Z}$. Tenemos que $(\mathbb{R}, p, S^1, \mathbb{Z})$ es un cubriente de S^1.

3.18 Teorema. *Si $p\colon E \to B$ es un haz localmente trivial entonces la sucesión*

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \ldots$$

es exacta. Esta sucesión es llamada la ***sucesión exacta de la fibración****.*

De la sucesión exacta de la aplicación exponencial tenemos

$$\cdots \to \pi_n(\mathbb{Z}) \to \pi_n(\mathbb{R}) \to \pi_n(S^1) \to \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \to \pi_{n-1}(\mathbb{R}) \to \ldots$$

como $\mathbb{Z}$ es discreto tenemos que

$$\pi_n(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

y como $\mathbb{R}$ es contraible $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ si $n \geq 0$, tenemos que

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

El generador de $\pi_1(S^1)$ es la aplicación identidad $S^1 \to S^1$.

De la sucesión exacta de la fibración de Hopf tenemos

$$\cdots \to \pi_n(S^1) \to \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \to \pi_{n-1}(S^1) \to \ldots$$

y por (3.4) deducimos que

$$\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2) \quad \text{para } n \geq 3 \tag{3.5}$$

y

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

que junto con el Corolario 3.10 y la Proposición 3.6 tenemos

$$\pi_r(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } r = n. \end{cases}$$

Los grupos $\pi_r(S^n)$ para $r > n$ no se conocen completamente, muchos se han calculado y su estudio continua siendo un tópico muy importante en topología algebraica. Un ejemplo lo obtenemos de (3.5) con $n = 3$

$$\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z},$$

y el generador está dado por la fibración de Hopf.

3.3. Fibraciones de Hopf

Hay otras **fibraciones de Hopf** que son haces localmente triviales:

$$
\begin{array}{ll}
\iota\colon S^1 \to S^1 & \text{fibra } S^0 \\
\eta\colon S^3 \to S^2 & \text{fibra } S^1 \\
\nu\colon S^7 \to S^4 & \text{fibra } S^3 \\
\sigma\colon S^{15} \to S^8 & \text{fibra } S^7
\end{array}
$$

3.19 Proposición. *Sea $F \subset E \xrightarrow{p} B$ una haz localmente trivial. Supongamos que la inclusión de la fibra $F \subset E$ es nulhomotópica. Entonces $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$, para toda $n \geq 2$.*

Aplicando la Proposición 3.19 a las fibraciones de Hopf obtenemos:

3.20 Corolario. *Para $n \geq 2$*

$$
\begin{aligned}
\pi_n(S^2) &\cong \pi_n(S^3) \oplus \pi_{n-1}(S^1) \\
\pi_n(S^4) &\cong \pi_n(S^7) \oplus \pi_{n-1}(S^3) \\
\pi_n(S^8) &\cong \pi_n(S^{15}) \oplus \pi_{n-1}(S^7)
\end{aligned}
$$

3.21 Ejercicio. Demuestra que

$$\pi_{17}(S^7 \vee \Omega S^{15}) \cong \pi_{18}(S^8).$$

3.22 Ejercicio. Calcula

$$[S^2 \vee S^3, S^2 \vee S^3].$$

Bibliografía

[1] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, and Carlos Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 139. Springer-Verlag, 1993.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[4] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics 61. Springer-Verlag, 1978.