Escuela de Verano en Topología y Geometría

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
UNIDAD CUERNAVACA

(9-13 Julio 2001)

Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes

José Luis Cisneros Molina

Índice general

Introducción

Las presentes notas cubren el contenido del minicurso “Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes” impartido en la “Escuela de Verano en Topología y Geometría” que se llevó a cabo del 9 al 13 de Julio de 2001 en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM y estan basadas en [1].

El curso consistió en tres clases, las cuales corresponden a cada uno de los capítulos de las notas. El objetivo del primer capítulo es definir el grupo fundamental de un espacio topológico, para ello se dan todas las definiciones necesarias como lo son: caminos, homotopías y homotopías relativas. En el segundo capítulo se definen los espacios cubrientes, se dan los teoremas de levantamiento y éstos se aplican para calcular el grupo fundamental de la circunferencia. Finalmente, en el tercer capítulo se relacionan más estrechamente el grupo fundamental y los espacios cubrientes. En primer lugar se define la acción del grupo fundamental sobre la fibra de un cubriente y posteriormente se da la clasificación de los cubrientes en términos de las clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental del espacio base.

Como requisitos se suponen únicamente los conocimientos de cursos básicos de Topología y Álgebra (Teoría de Grupos) de licenciatura. También se usan algunos conceptos y resultados básicos de acciones de grupos en conjuntos. Dicho material se supone conocido y no se incluye en las notas por que paralelamente, en la “Escuela de Verano en Topología y Geometría” se impartió un curso sobre Acciones de Grupos.

Espero que estas notas sirvan como una pequeña introducción al mundo de la Topología Algebraica. Al final se da una pequeña bibliografía donde se pueden estudiar más a fondo estos temas y tópicos relacionados, por ejemplo para resultados de Topología básica se puede consultar [2] y para profundizar más sobre el Grupo Fundamental, Espacios Cubrientes y otros tópicos de Topología Algebraica se recomiendan [4] y [3]. Agradezco a José Antonio Arciniega Nevárez el haber leido con cuidado la versión original y haber corregido multiples errores que había en ella. Cualquier comentario o sugerencia para mejorar estas notas será bienvenido (`jlcm@matcuer.unam.mx`).

José Luis Cisneros Molina
2 de agosto de 2005

Capítulo 1

Grupo Fundamental

1.1. Caminos

Denotaremos por I al intervalo $[0,1]$. Sea X un espacio topológico y sean $a, b \in X$. Un **camino** o **trayectoria** de a a b en X es una aplicación continua $\alpha\colon I \to X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

1.1 Nota. El camino α es la aplicación y no la imagen $\alpha(I)$. En general pensaremos al parámetro t como el tiempo, con lo que $\alpha(t)$ será la posición en X en el instante t.

1.2 Ejemplo. El ejemplo más sencillo de camino es el **camino constante** $\epsilon_a\colon I \to X$ definido por $\epsilon_a(t) = a$ para todo $t \in I$.

El siguiente lema nos da dos métodos para obtener nuevos caminos a partir de caminos dados. En el primero, dado un camino α, nos proporciona un nuevo camino $\bar{\alpha}$, que esencialmente recorre a α en sentido contrario. En el segundo, dados dos caminos tales que el punto final del primero coincide con el punto inicial del segundo, nos da un nuevo camino que consiste en unir los caminos dados.

1.3 Lema. *Sean α y β caminos en X. Entonces*

1. *La aplicación $\bar{\alpha}$ definida por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, es también un camino en X.*
2. *Si $\alpha(1) = \beta(0)$, es decir, el punto final de α coincide con el punto inicial de β, la aplicación $(\alpha * \beta)\colon I \to X$ definida por*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si\ 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1) & si\ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La demostración del lema anterior se sigue del siguiente resultado básico de topología, conocido como el Lema del Pegado, el cual usaremos constantemente más adelante.

1.4 Lema. *Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B son ambos subconjuntos cerrados de X. Si $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ son aplicaciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A \cap B$, entonces la aplicación $h\colon X \to Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

es continua.

La demostración se deja como ejercicio.

1.2. Homotopía

Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que dos aplicaciones continuas de X a Y, $f_0, f_1\colon X \to Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua

$$F\colon X \times I \to Y,$$

tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f_0(x) \\ F(x,1) &= f_1(x). \end{aligned}$$

La aplicación F se llama una **homotopía** entre f_0 y f_1 y la denotaremos por $f_0 \simeq f_1$ o $F\colon f_0 \simeq f_1$.

Para cada $t \in I$ definimos $f_t\colon X \to Y$ por

$$f_t(x) = F(x,t),$$

la cual es una aplicación continua. De esta forma, podemos pensar al parámetro t como al tiempo. Entonces, al tiempo $t = 0$ tenemos la aplicación f_0 y cuando t varía, la aplicación f_t varía continuamente de tal forma que al tiempo $t = 1$ obtenemos la aplicación f_1. Por esta razón se dice que una homotopía es una deformación continua de una aplicación.

Una aplicación $f\colon X \to Y$ que es homotópica a la aplicación constante se dice que es **nulhomotópica** y la homotopía entre ambas se dice que es una **nulhomotopía**.

1.3. Homotopía relativa

Dos aplicaciones $f_0, f_1\colon X \to Y$ son **homotópicas relativamente** a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía

$$F\colon X \times I \to Y$$

entre f_0 y f_1 tal que

$$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a), \qquad \forall a \in A, \quad \forall t \in I,$$

es decir, para todo $a \in A$, $F(a,t)$ no depende de $t \in I$. Denotaremos esto por $f_0 \simeq f_1(\operatorname{rel} A)$ o $f_0 \simeq_{\operatorname{rel} A} f_1$.

1.5 Nota. Si $A = \emptyset$ entonces una homotopía relativa a A no es otra cosa que una homotopía.

1.6 Lema. *La relación $\simeq_{\operatorname{rel} A}$ definida en el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y es una relación de equivalencia.*

Demostración. Ejercicio. □

1.4. Equivalencia Homotópica

Podemos utilizar el concepto de aplicaciones homotópicas para definir una relación de equivalencia entre espacios topológicos que es más débil que la relación de equivalencia dada por homeomorfismos.

Se dice que dos espacios X y Y son **del mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ tales que

$$\begin{aligned} gf &\simeq 1\colon X \to X, \\ fg &\simeq 1\colon Y \to Y. \end{aligned}$$

Las aplicaciones f y g son llamadas **equivalencias homotópicas**. Diremos también que X y Y son **homotópicamente equivalentes**. Intuitivamente, dos espacios son homotópicamente equivalentes si uno puede ser deformado en el otro contrayendo o encogiendo.

1.7 Ejemplo. La esfera de dimensión $n-1$, $S^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \,\}$ y el espacio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ son homotópicamente equivalentes.

Sea $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la inclusión y $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Tenemos que $g \circ f = 1\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ y $F\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $F(x,t) = \frac{x}{t(\|x\|-1)+1}$ es una homotopía entre la identidad de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $f \circ g$.

Se dice que un espacio X es **contraíble** si es homotópicamente equivalente a un punto. Intuitivamente un espacio es contraíble si puede deformarse en sí mismo a un punto.

1.8 Ejemplo. Ejemplos de espacios contraíbles son los siguientes:

- El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$.
- El n-disco cerrado $D^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \,\}$.
- En n-disco abierto $E^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \,\}$.

- Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

1.9 Ejemplo. Otro ejemplo de espacios homotópicamente equivalentes son el cilindro C y la circunferencia S^1:

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1 \},$$
$$S^1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 0 \}.$$

Sea $i\colon S^1 \to C$ la inclusión y $r\colon C \to S^1$ dada por $r(x, y, z) = (x, y, 0)$. Obviamente $ri = 1\colon S^1 \to S^1$, mientras que la aplicación $F\colon C \times I \to C$ definida por $F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$ es una homotopía entre ir y $1\colon C \to C$.

Los Ejemplos 1.7 y 1.9 nos llevan a la siguientes definiciones.

Un subconjunto de un espacio X se llama un **retracto** de X si existe una aplicación continua $r\colon X \to A$ tal que $ri = 1\colon A \to A$ (o equivalentemente si $r|_A = 1$), donde $i\colon A \to X$ es la inclusión. La aplicación r se llama **retracción**.

Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación** de X si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $ir \simeq 1\colon X \to X$, donde $i\colon A \to X$ es la inclusión.

Un subconjunto A de X es un **retracto por deformación fuerte** de X si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $ir \simeq_{\mathrm{rel}\, A} 1\colon X \to X$. La diferencia con la definición anterior es que en este caso, todos los elementos de A quedan fijos bajo la homotopía.

Nótese que las retracciones en los retractos por deformación, ya sean fuertes o no, son equivalencias homotópicas.

Los Ejemplos 1.7 y 1.9 son retractos por deformación fuertes.

1.5. Equivalencia de caminos

Se dice que dos caminos α y β en X son **equivalentes** si α y β son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$. En este caso escribiremos $\alpha \sim \beta$.

Por lo tanto, los caminos $\alpha, \beta\colon I \to X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F\colon I \times I \to X$$

tal que

$$F(t, 0) = \alpha(t), \quad F(t, 1) = \beta(t), \quad \text{para } t \in I$$
$$F(0, s) = \alpha(0) = \beta(0), \quad F(1, s) = \alpha(1) = \beta(1), \quad \text{para } s \in I$$

Por el Lema 1.6 tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Denotemos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia del camino α. Definimos ahora un producto de clases de equivalencia de caminos por

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

El siguiente lema muestra que el producto de clases de equivalencia está bien definido.

1.10 Lema. *Si* $\alpha_0 \sim \alpha_1$, $\beta_0 \sim \beta_1$, *tales que* $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$ *y* $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$, *entonces* $\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

La proposición siguiente nos muestra las principales propiedades de este producto.

1.11 Proposición. *Sean* α, β *y* γ *caminos en* X. *Entonces*

(a) El producto de sus clases de equivalencia es asociativo, es decir

$$\big([\alpha][\beta]\big)[\gamma] = [\alpha]\big([\beta][\gamma]\big),$$

siempre y cuando este producto tenga sentido, es decir, si $\alpha(1) = \beta(0)$ *y* $\beta(1) = \gamma(0)$.

(b) Si $x \in X$, *la clase de equivalencia del camino constante* ϵ_x *definido en el Ejemplo 1.2 se comporta como un elemento identidad (por la izquierda o por la derecha), esto es,*

$$[\epsilon_a][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][\epsilon_b],$$

si α *es un camino de* a *a* b *en* X.

(c) La clase del camino $\bar{\alpha}$ *definido en el Lema 1.3 actúa como inverso de la clase de equivalencia de* α, *es decir*

$$[\alpha][\bar{\alpha}] = [\epsilon_a] \qquad [\bar{\alpha}][\alpha] = [\epsilon_b],$$

para todo camino α *de* a *a* b *en* X.

Demostración. Solamente demostraremos (a), los otros incisos se dejan como ejercicios.

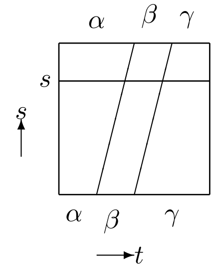
Usando la fórmula del Lema 1.3 para el producto de caminos tenemos

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Queremos encontrar una homotopía entre (1.1) y (1.2), para ello nos auxiliamos del siguiente diagrama:

ya que para $s = 0$ se aplica α cuando $t \in [0, \frac{1}{4}]$,
β cuando $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,
γ cuando $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,
y para $s = 1$ se aplica α cuando $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
β cuando $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$,
γ cuando $t \in [\frac{3}{4}, 1]$.



En el diagrama la recta que une al punto $(\frac{1}{4}, 0)$ con el punto $(\frac{1}{2}, 1)$ es la recta $t = \frac{s+1}{4}$ y la que une el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ con $(\frac{3}{4}, 1)$ es la recta $t = \frac{s+2}{4}$ por lo que para un valor arbitrario de s:

$$\begin{aligned} &\alpha \text{ cuando } t \in [0, \tfrac{s+1}{4}],\\ \text{se aplica } &\beta \text{ cuando } t \in [\tfrac{s+1}{4}, \tfrac{s+2}{4}],\\ &\gamma \text{ cuando } t \in [\tfrac{s+2}{4}, 1]. \end{aligned}$$

Para encontrar la homotopía, tenemos que encontrar homeomorfismos lineales que manden a los intervalos $[0, \frac{s+1}{4}]$, $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ y $[\frac{s+2}{4}, 1]$ al $[0, 1]$ y componerlos con α, β y γ respectivamente, así

$$r_1 \colon [0, \frac{s+1}{4}] \to [0,1] \qquad r_1 = \frac{4t}{s+1} \tag{1.3}$$

$$r_2 \colon [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] \to [0,1] \qquad r_2 = 4t - s - 1 \tag{1.4}$$

$$r_3 \colon [\frac{s+2}{4}, 1] \to [0,1] \qquad r_3 = 1 - \frac{4(t-1)}{s-2}, \tag{1.5}$$

así tenemos

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}) & 0 \le t \le \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t - s - 1) & \frac{s+1}{4} \le t \le \frac{s+2}{4} \\ \gamma(1 - \frac{4(t-1)}{s-2}) & \frac{s+2}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Como

$$F(t,0) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$F(0,s) = \alpha(0)$$

$$F(1,s) = \gamma(1),$$

por lo tanto $((\alpha * \beta) * \gamma)(t) \sim (\alpha * (\beta * \gamma))(t)$. Entonces el producto de clases de equivalencia es asociativo. $\square$

1.12 Nota. Con el producto definido y las propiedades que hemos demostrado, el conjunto de clases de equivalencia de caminos en X tiene estructura de **grupoide**.

1.6. Grupo Fundamental

Hemos visto que el conjunto de clases equivalencia de caminos de X satisface prácticamente los axiomas de grupo. Pero tenemos dos problemas que impiden que sea un grupo:

- La multiplicación no siempre está definida para cualesquiera dos clases.
- La identidad no es única.

Para evitar estos problemas usamos el concepto de camino cerrado.

Se dice que un camino α es **cerrado** o que es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(1)$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ decimos que α es un camino cerrado con **punto base** x.

Si tomamos un punto $x \in X$ y consideramos ahora el conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base x podemos ver que el producto de dos de esos caminos esta siempre definido y tiene una única identidad, el camino constante ϵ_x.

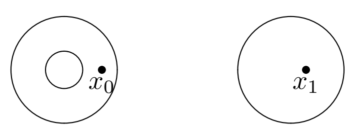
Denotemos por $\pi_1(X, x)$ al conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base $x \in X$. Por las propiedades demostradas anteriormente tenemos el siguiente teorema.

1.13 Teorema. *El conjunto $\pi_1(X, x)$ es un grupo bajo el producto de clases de equivalencia de lazos con punto base $x \in X$.*

A $\pi_1(X, x)$ se le llama el **grupo fundamental** de X con punto base x. También se le conoce como **grupo de Poincaré**.

Veamos ahora como depende $\pi_1(X, x)$ del punto base x.

1.14 Ejemplo. Sea X la unión disjunta de un anillo y un disco en el plano como se muestra en la figura. Tenemos que $\pi_1(X, x_1) = \{1\}$ mientras que $\pi_1(X, x_0)$ es cíclico infinito como veremos más adelante.



Sin embargo, tenemos el siguiente teorema que relaciona los grupos fundamentales con distinto punto base.

1.15 Teorema. *Sean $x, y \in X$. Si existe un camino en X de x a y, entonces los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea γ un camino de x a y. Si α es un camino cerrado con punto base x, entonces $(\bar{\gamma} * \alpha) * \gamma$ es un camino cerrado con punto base y. Definamos

$$\begin{aligned} U_\gamma \colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(X, y) \\ U_\gamma([\alpha]) &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]. \end{aligned}$$

Esta función es un homomorfismo de grupos, ya que

$$\begin{aligned} U_\gamma([\alpha][\beta]) &= U_\gamma([\alpha * \beta]) \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma][\bar{\gamma} * \beta * \gamma] \\ &= U_\gamma([\alpha])U_\gamma([\beta]). \end{aligned}$$

Usando el camino $\bar{\gamma}$ de y a x podemos definir

$$\begin{aligned} U_{\bar{\gamma}} \colon \pi_1(X, y) &\to \pi_1(X, x) \\ U_{\bar{\gamma}}([\alpha]) &= [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]. \end{aligned}$$

Es fácil ver que U_γ y $U_{\bar{\gamma}}$ son inversos y por lo tanto biyectivas, lo que nos da un isomorfismo. □

1.16 Corolario. *Si X es un espacio arco-conexo, $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son grupos isomorfos para todo par de puntos $x, y \in X$.*

Debido a este corolario es tentador eliminar la x de $\pi_1(X, x)$ cuando X es arco-conexo. Hay que tener cuidado con ello por que no existe un isomorfismo canónico entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$, puesto que caminos diferentes de x a y pueden inducir diferentes isomorfismos.

1.7. Homomorfismo inducido por una aplicación continua

Sea $\phi \colon X \to Y$ una aplicación continua. Entonces tenemos los siguientes hechos:

(i) Si α y β son caminos en X, entonces $\phi\alpha$ y $\phi\beta$ son caminos en Y.

(ii) Si $\alpha \sim \beta$, entonces $\phi\alpha \sim \phi\beta$.

(iii) Si α es un lazo en X con punto base $x \in X$, $\phi\alpha$ es un lazo en Y con punto base $\phi(x)$.

Así pues, si $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, $[\phi\alpha]$ es un elemento bien definido de $\pi_1(Y, \phi(x))$. Definimos por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi_* \colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(Y, \phi(x)) \\ \phi_*([\alpha]) &= [\phi\alpha]. \end{aligned}$$

1.17 Lema. *La aplicación ϕ_* es un homomorfismo de grupos.*

Demostración.

$$\phi_*([\alpha][\beta]) = \phi_*([\alpha * \beta]) = [\phi(\alpha * \beta)] = [\phi\alpha * \phi\beta] = [\phi\alpha][\phi\beta] = \phi_*([\alpha])\phi_*([\beta]).$$

□

El homomorfismo $\phi_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,\phi(x))$ definido por $\phi_*([\alpha]) = [\phi\alpha]$, donde $\phi\colon X \to Y$ es una aplicación continua, se llama el **homomorfismo inducido** por ϕ.

1.18 Teorema. *Los homomorfismos inducidos satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) Supongamos que $\phi\colon X \to Y$ y $\psi\colon Y \to Z$ son aplicaciones continuas, entonces
$$(\psi\phi)_* = \psi_*\phi_*.$$

(b) Si $1\colon X \to X$ es la identidad, entonces 1_* es el homomorfismo identidad en $\pi_1(X,x)$.

Demostración. Sea $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$, entonces,

(a) $(\psi\phi)_*([\alpha]) = [(\psi\phi)\alpha] = [\psi(\phi\alpha)] = \psi_*([\phi\alpha]) = \psi_*\phi_*([\alpha])$.

(b) $1_*([\alpha]) = [1\alpha] = [\alpha]$.

□

1.19 Corolario. *Si $\phi\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces el homomorfismo inducido $\phi_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,\phi(x))$ es un isomorfismo.*

El significado del teorema anterior es que el grupo fundamental es un **funtor** de la **categoría** de espacios topológicos con punto base y aplicaciónes continuas que preservan el punto base, a la categoría de grupos y homomorfismos de grupos.

Las características de que sea un funtor son las siguientes:

1. Para cada espacio topológico (con algún punto base), obtenemos un grupo, (el grupo fundamental).
2. Para cada aplicación continua, entre espacios topológicos obtenemos un homomorfismo entre los grupos correspondientes (el homomorfismo inducido).
3. La composición de dos aplicaciones continuas induce la composición de los homomorfismos inducidos.
4. La identidad, induce el homomorfismo identidad.
5. Todo homeomorfismo induce un isomorfismo.

El siguiente Teorema es resultado directo de las definiciones de homotopía relativa y del homomorfismo inducido.

1.20 Teorema. *Sean $\phi_0, \phi_1 \colon X \to Y$ aplicaciones continuas que son homotópicas relativas al subconjunto $\{x\}$. Entonces*

$$\phi_{0*} = \phi_{1*} \colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \phi_0(x)).$$

Las propiedades de funtor del grupo fundamental nos permiten encontrar relaciones entre los grupos fundamentales de espacios que están relacionados por aplicaciones especiales como por ejemplo las retracciones.

Sea A un retracto de X con retracción $r \colon X \to A$. Si $i \colon A \to X$ es la inclusión, entonces tenemos que $ri = 1 \colon A \to A$. Tomando los homomorfismos inducidos de r e i tenemos que $r_* i_*$ es el homomorfismo identidad del grupo fundamental de A. Entonces podemos concluir que el i_* es un monomorfismo, es decir, es inyectivo y r_* es un epimorfismo, es decir, suprayectivo.

Además, si A es un retracto por deformación fuerte de X, tenemos que $ir \simeq_{\mathrm{rel}\,A} 1 \colon X \to X$. En particular, la homotopía es relativa al punto base y por el Teorema 1.20 ir tiene el mismo homomorfismo inducido, que la identidad en X, que es precisamente el homomorfismo identidad en el grupo fundamental de X. Por lo tanto tenemos en este caso que r_* es un monomorfismo y que i_* es epimorfismo, por lo tanto ambos son isomorfismos. En resumen, tenemos el siguiente teorema.

1.21 Teorema. *Sea A un retracto por deformación fuerte de X con retracción $r \colon X \to A$. Entonces r induce un isomorfismo*

$$r_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0).$$

De hecho tenemos un resultado mas fuerte, espacios arco-conexos homotópicamente equivalentes tienen grupos fundamentales isomorfos.

1.22 Teorema. *Si X y Y son espacios arco-conexos y $\phi \colon X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $\phi_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \phi(x_0))$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $y_0 = \phi(x_0)$. El único problema para probar este resultado es que no podemos suponer que el inverso homotópico manda a y_0 a x_0, y no podemos suponer que las homotopías preserven los puntos base. Sea $\psi \colon Y \to X$ el inverso homotópico de ϕ y sea $x_1 = \psi(y_0)$. Entonces tenemos los homomorfismos

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\phi_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, x_1),$$

cuya composición es $(\psi \circ \phi)_*$. Por hipótesis $\psi \circ \phi \simeq 1$. Durante la homotopía, las imágenes del punto x_0 recorren algún camino, digamos γ, de x_1 a x_0. Componiendo por la derecha con un lazo α obtenemos que $\psi \circ \phi \circ \alpha \simeq \alpha$, donde el punto base del lazo a lo largo de la homotopía recorre el camino γ. Si consideramos $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que $(\psi \circ \phi)_*([\alpha]) = U_\gamma([\alpha])$ para toda $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, donde U_γ es el isomorfismo del Teorema 1.15. Por lo tanto, $(\psi \circ \phi)_*$ es un isomorfismo y se sigue que ϕ_* es un monomorfismo y ψ_* es un epimorfismo. Aplicando la misma discusión pero empezando con ψ muestra que ψ_* es también un monomorfismo y por ende un isomorfismo. Entonces $\phi_* = \psi_*^{-1} \circ (\psi \circ \phi)_*$ es un isomorfismo. $\square$

1.23 Corolario. *Todo espacio contraíble tiene grupo fundamental trivial.*

Un espacio topológico se dice que es **simplemente conexo** si es arco-conexo y si $\pi_1(X, x) = \{1\}$ para algún (y por lo tanto, para todo) $x \in X$.

1.24 Proposición. *Un espacio X es simplemente conexo si y sólo si existe una única clase de homotopía de caminos que conectan cualesquiera dos puntos.*

Demostración. Supongamos que $\pi_1(X) = \{1\}$. Si α y β son dos caminos de x_0 a x_1, entonces $\alpha \sim \alpha * \bar{\beta} * \beta \sim \beta$ vía nulhomotopías de los lazos $\bar{\beta} * \beta$ y $\alpha * \bar{\beta}$, usando la suposición de que $\pi_1(X) = \{1\}$ en el segundo caso.

Recíprocamente, si hay únicamente una clase de homotopía de caminos que conectan al punto base x_0 con el mismo, es decir, de caminos cerrados basados en x_0, entonces $\pi_1(X) = \{1\}$. $\square$

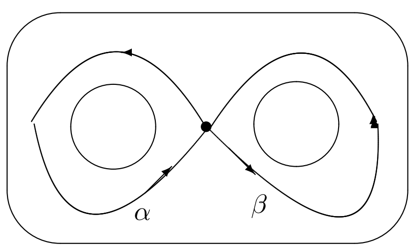
1.8. Ejemplos

El Corolario 1.23 nos da ejemplos de grupos fundamentales, a saber:

- $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{1\}$.
- $\pi_1(D^n) = \{1\}$.
- $\pi_1(E^n) = \{1\}$.

Veamos ahora algunos ejemplos de grupos fundamentales no triviales:

1. El grupo fundamental en general no es abeliano, como lo muestra el siguiente ejemplo conocido como el “antifaz”.

   Si fuera abeliano, tendríamos que $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$, pero intuitivamente se puede ver que dicho lazo no es trivial ya que rodea a ambos agujeros.

2. Para S^1, intuitivamente podemos ver que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, donde a cada clase de lazos en S^1 está caracterizada por el número de vueltas que le da a la circunferencia. Más adelante demostraremos formalmente que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ una vez que estudiemos a los espacios cubrientes.

3. En el caso del **toro** $S^1 \times S^1$, tenemos que $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Este último ejemplo es consecuencia de un resultado más general sobre el grupo fundamental de un espacio producto.

1.25 Teorema. *Sean X y Y dos espacios arco-conexos. Entonces tenemos que $\pi_1(X \times Y)$ es isomorfo a $\pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$. Si $p\colon X \times Y \to X$ y $q\colon X \times Y \to Y$ son las proyecciones, el isomorfismo está dado por:*

$$\begin{aligned} \phi\colon \pi_1(X \times Y) &\to \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y) \\ \phi([\alpha]) &= (p_*([\alpha]), q_*([\alpha])). \end{aligned}$$

Una demostración se puede encontrar en [3, Teo. 15.17].

1.9. Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones del grupo fundamental suponiendo que ya sabemos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

En primer lugar, tenemos que la circunferencia S^1 no es contraíble por el contrarecíproco del Corolario 1.23.

1.26 Proposición. *No existe ninguna aplicación continua $f\colon D^2 \to S^1$ tal que $f|_{S^1}$ sea la identidad.*

Demostración. Sea $i\colon S^1 \to D^2$ la inclusión. Supongamos que $f\colon D^2 \to S^1$ es una aplicación tal que $f \circ i = 1\colon S^1 \to S^1$. Entonces $(f \circ i)_*\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ es la identidad. Sin embargo, $(f \circ i)_* = f_* \circ i_*$, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \\ & \pi_1(D^2) = \{1\} \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

Esto es una contradicción ya que $1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ no factoriza como en el diagrama. $\square$

1.27 Teorema (Teorema de punto fijo de Brower). *Sea $f\colon D^2 \to D^2$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. Supongamos que para toda $x \in D^2$, tenemos que $f(x) \neq x$. Definimos una aplicación $h\colon D^2 \to S^1$ como sigue. Tomemos el rayo que une a $f(x)$ con x. Dicha linea intersecta a S^1 en un único punto y. Entonces hacemos $h(x) = y$. Tenemos que h es continua. Si $x \in S^1$ entonces $h(x) = x$, lo cual contradice la Proposición 1.26. $\square$

Capítulo 2

Espacios Cubrientes

Sean X y Y espacios arco-conexos y localmente arco-conexos. Diremos que Y es un **espacio cubriente** de X si existe una aplicación continua y suprayectiva $p\colon Y \to X$ tal que para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que satisface las siguientes propiedades:

(i) $p^{-1}(U) = \bigsqcup_j V_j$, con V_j abiertos en Y para toda j.

(ii) $p|_{V_j}\colon V_j \to U$ es un homeomorfismo para toda j.

A la vecindad U se le llama **vecindad regular**, a las vecindades V_j se les llama las **hojas** y diremos que p es una aplicación cubriente.

2.1 Ejemplo. La aplicación $\mathbb{R} \to S^1$ dada por $t \mapsto e^{2\pi it}$ es una aplicación cubriente con un número infinito de hojas.

2.2 Ejemplo. La aplicación $S^1 \to S^1$ dada por $z \mapsto z^n$ para un entero positivo fijo n, es una aplicación cubriente con n hojas.

2.3 Ejemplo. La aplicación canónica $S^2 \to \mathbb{P}^2$, donde $\mathbb{P}^2$ es el plano proyectivo real, es una aplicación cubriente con dos hojas.

2.4 Ejemplo. Considera la relación de equivalencia en el plano $\mathbb{R}^2$ que está generada por las equivalencias $(x, y) \sim (x, y+1)$ y $(x, y) \sim (x+1, -y)$. La aplicación canónica $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ es un cubriente con un número infinito de hojas. El espacio cociente es la botella de Klein.

2.1. Teoremas de Levantamiento

Una de las propiedades principales de los espacios cubrientes es que podemos levantar caminos de X a Y en el siguiente sentido.

Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente. Si $f\colon Z \to X$ es una aplicación continua de algún espacio Z, un **levantamiento** de f es una aplicación continua

$\tilde{f}\colon Z \to Y$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

En el caso de los caminos tenemos que $Z = I$.

Antes de demostrar la propiedad de levantamiento de caminos de las aplicaciones cubrientes necesitamos recordar el siguiente resultado de topología, cuya demostración está en [2, Lem. 3.7.2]:

2.5 Lema (Lema de Lebesgue). *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{U_j\}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe $\delta > 0$, llamado "Número de Lebesgue" de la cubierta, tal que para todo subconjunto A de X cuyo diámetro es menor que δ, entonces $A \subset U_j$ para alguna j.*

2.6 Teorema (Propiedad de Levantamiento de Caminos). *Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente y supongamos que $p(y_0) = x_0$. Entonces cualquier camino $\alpha\colon I \to X$ que comienza en x_0 tiene un levantamiento único a un camino $\tilde{\alpha}$ en Y que comienza en y_0.*

Demostración. Por el Lema de Lebesgue, existe un número natural n tal que $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ está contenido totalmente en una vecindad regular. Por el homeomorfismo local sobre las vecindades regulares podemos levantar a α por inducción en i: En cada paso de la inducción, el levantamiento en el extremo izquierdo del intervalo $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ fue definido en el paso anterior, indicando de forma única sobre cual hoja debemos levantar $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ usando el homeomorfismo sobre la vecindad regular. $\square$

2.7 Proposición. *Si $p\colon Y \to X$ es una aplicación cubriente, entonces los conjuntos $p^{-1}(x)$ para toda $x \in X$ tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sean $x_0, x_1 \in X$. Escojamos un camino α de x_0 a x_1. Usando este camino, definimos una función de $p^{-1}(x_0)$ a $p^{-1}(x_1)$. Dado $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, levantemos a α a un camino $\tilde{\alpha}$ en Y que comienza en y_0. Sea y_1 el punto final de $\tilde{\alpha}$, entonces $y_0 \mapsto y_1$ es la función deseada. Haciendo lo mismo con el camino $\bar{\alpha}$ obtenemos una función de $p^{-1}(x_1)$ a $p^{-1}(x_0)$ la cual es fácil ver que es inversa de la anterior y por lo tanto nos dan una biyección entre ambos conjuntos. $\square$

El conjunto $p^{-1}(x)$ es llamado la **fibra** sobre $x \in X$ y a su cardinalidad se le llama el **número de hojas** del cubriente.

Otra propiedad muy útil de las aplicaciones cubrientes es que podemos levantar homotopías. Para ver esto, necesitamos el siguiente lema técnico.

2.8 Lema. *Sea Z un espacio arbitrario y sea $\{U_j\}$ una cubierta abierta de $Z \times I$. Entonces para todo punto $z \in Z$, existe una vecindad N_z de z en Z y un entero positivo n tal que $N_z \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \subset U_j$ para alguna j, para cada $0 \leq i \leq n$.*

Demostración. Podemos cubrir a $\{z\} \times I$ por un refinamiento de $\{U_j\}$ de la forma $N_1 \times W_1$, $N_2 \times W_2, \ldots$, $N_k \times W_k$, por la compacidad de I y la definición de la topología producto. El Lema de Lebesgue implica que existe $n > 0$ tal que cada $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ está contenido en uno de los W_i. Tómese dicha n y $N_z = \bigcap N_i$. $\square$

2.9 Teorema (Propiedad de Levantamiento de Homotopías). *Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente. Sea Z un espacio arbitrario y sea $f\colon Z \to X$ una aplicación continua que tiene un levantamiento $\tilde{f}\colon Z \to Y$. Entonces toda homotopía $F\colon Z \times I \to X$ con $F(z, 0) = f(z)$ para toda $z \in Z$ puede ser levantada a una homotopía $\tilde{F}\colon Z \times I \to Y$ con $\tilde{F}(z, 0) = \tilde{f}(z)$ para toda $z \in Z$. Además, si F es una homotopía relativa a algún subconjunto Z' de Z, entonces $\tilde{F}$ también lo es.*

Demostración. Por el Lema 2.8 para cada $z \in Z$ existe una vecindad abierta N_z y un entero positivo n tal que $F(N_z \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ está totalmente contenida en una vecindad regular. Usando los homeomorfismos entre las hojas y la vecindad regular y el mismo argumento inductivo que en el Teorema 2.6, podemos levantar F sobre $N_z \times I$ a una aplicación $\tilde{F}\colon N_z \times I \to Y$ tal que $\tilde{F}(z, 0) = \tilde{f}(z)$ para toda $z \in N_z$.

Los levantamientos sobre $N_z \times I$ y $N_{z'} \times I$ concuerdan sobre $(N_z \cap N_{z'}) \times I$, y por lo tanto podemos pegarlos para obtener el levantamiento $\tilde{F}$ sobre $Z \times I$. Para ver esto, sea $z_1 \in (N_z \cap N_{z'})$. Entonces tenemos dos levantamientos de $F|_{z_1 \times I}$ que concuerdan en el punto $(z_1, 0)$. Pero por la unicidad del levantamiento de caminos ($F|_{y_1 \times I}$ es un camino sobre X) estos dos levantamientos coinciden.

La última afirmación se sigue de la construcción de $\tilde{F}$. $\square$

El siguiente teorema es una generalización de los teoremas de levantamiento, el cual enunciaremos sin demostración.

2.10 Teorema (Teorema General de Levantamiento). *Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente y supongamos que $p(y_0) = x_0$. Sea $f\colon Z \to X$ una aplicación continua con $f(z_0) = x_0$. Supongamos también que Z es arco-conexo y localmente arco-conexo. La aplicación f puede ser levantada a una aplicación $\tilde{f}\colon Z \to Y$ tal que $\tilde{f}(z_0) = y_0$ si y sólo si*

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Además, si dicho levantamiento existe, es único.

Para la demostración, consúltese [3, Teo. 21.2].

2.2. Aplicaciones

La siguiente aplicación del Teorema 2.9 nos da la primera relación entre los espacios cubrientes y el grupo fundamental, de hecho, nos permitirá calcular el grupo fundamental del círculo, cumpliendo con nuestra promesa de la clase anterior.

2.11 Teorema. *Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente y supongamos que $p(y_0) = x_0$. Sean α y β dos caminos en X de x_0 a x_1; sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ sus respectivos levantamientos a caminos en Y que empiezan en y_0. Si α y β son equivalentes (homotópicos relativamente a $\{0,1\}$), entonces $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son equivalentes. En particular, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ terminan en el mismo punto.*

Demostración. Sea $F\colon I \times I \to X$ la homotopía relativa entre α y β. Entonces $F(0,0) = x_0$. Sea $\tilde{F}\colon I \times I \to Y$ el levantamiento de F a Y tal que $\tilde{F}(0,0) = y_0$ y tenemos que $\tilde{F}(0 \times I) = \{y_0\}$ y $\tilde{F}(1 \times I)$ es un conjunto con un sólo punto $\{y_1\}$.

La restricción $\tilde{F}|_{I\times 0}$ de $\tilde{F}$ al lado inferior de $I \times I$ es un camino en Y que comienza en y_0 y que es un levantamiento de $F|_{I\times 0}$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos debemos tener que $\tilde{F}(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$. De forma análoga $\tilde{F}|_{I\times 1}$ es un camino en Y que es levantamiento de $F|_{I\times 1}$ que comienza en y_0. Por lo tanto $\tilde{F}(z,1) = \tilde{\beta}(s)$. Por lo tanto $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ terminan en el mismo punto y son equivalentes. □

2.12 Corolario. *Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente y supongamos que $p(y_0) = x_0$. Entonces $p_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.*

Demostración. Aplicar el Teorema 2.11 a lazos en X. □

2.13 Corolario. *Sea X un espacio de Hausdorff, arco-conexo y localmente arco-conexo. Si X tiene un espacio cubriente no trivial entonces $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$.*

Demostración. Tomemos dos puntos $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$ y sea $\tilde{\alpha}$ un camino entre ellos. Entonces $p \circ \alpha$ es un lazo en X basado en x_0 que no levanta a un lazo en Y basado en y_0. Por el Corolario 2.12, se sigue que $[p \circ f] \in \pi_1(X, x_0)$ no está en la imagen de p_* y por lo tanto es un elemento no trivial. □

Como consecuencia del Corolario 2.13 y por los Ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 ahora sabemos que varios espacios tienen grupo fundamental no trivial: la circunferencia, el plano proyectivo y la botella de Klein.

2.3. El Grupo Fundamental de la Circunferencia

Finalmente en la presente sección, calcularemos formalmente el grupo fundamental de la circunferencia.

2.14 Teorema. *El grupo fundamental del círculo es cíclico infinito.*

Demostración. Sea $x_0 = (1,0)$ el punto base de S^1. Construiremos un isomorfismo del grupo $\pi_1(S^1, x_0)$ con el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ de los enteros.

Consideremos la aplicación cubriente del Ejemplo 2.1 dado por

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Si α es un lazo en S^1 basado en x_0 , sea $\tilde{\alpha}$ el levantamiento de α a un camino en $\mathbb{R}$ que comienza en 0. El punto $\tilde{\alpha}(1)$ debe ser un punto del conjunto $p^{-1}(x_0)$, es decir, $\tilde{\alpha}(1)$ debe ser algún entero n. El Teorema 2.11 nos dice que este entero depende únicamente de la clase de homotopía $[\alpha]$ de α. Por lo tanto, podemos definir

$$\phi\colon \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z},$$

tomando como $\phi([\alpha])$ dicho entero n al cual llamaremos el **grado** de α. Afirmamos que ϕ es un isomorfismo de grupos.

La aplicación ϕ es suprayectiva. Sea n un punto de $p^{-1}(x_0)$. Como $\mathbb{R}$ es arco-conexo, podemos escoger un camino $\tilde{\alpha}\colon I \to \mathbb{R}$ de 0 a n. Definimos $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Entonces α es un lazo en S^1 basado en x_0 y $\tilde{\alpha}$ es su levantamiento a un camino en $\mathbb{R}$ que comienza en 0. Por definición tenemos que $\phi([\alpha]) = n$.

La aplicación ϕ es inyectiva. Supongamos que $\phi([\alpha]) = n = \phi([\beta])$. Debemos probar que $[\alpha] = [\beta]$. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ los levantamientos de α y β, respectivamente, a caminos en $\mathbb{R}$ que comienzan en 0; ambos, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, por hipótesis, terminan en n. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, por la Proposición 1.24 los caminos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son equivalentes. Sea $\tilde{F}$ la homotopía relativa a $\{0,1\}$ entre ellos. La aplicación $F = p \circ \tilde{F}$ es una homotopía relativa $\{0,1\}$ entre α y β.

La aplicación ϕ es un homomorfismo. Sean α y β dos caminos en S^1 basados en x_0. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ los levantamientos de α y β, respectivamente, a caminos en $\mathbb{R}$ que comienzan en 0. Sea $\tilde{\alpha}(1) = n$ y $\tilde{\beta}(1) = m$. Definimos un camino $\tilde{\gamma}$ en $\mathbb{R}$ por las ecuaciones

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2s) & \text{para } s \in [0, 1/2], \\ n + \tilde{\beta}(2s-1) & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Entonces $\tilde{\gamma}$ es un camino en $\mathbb{R}$ que comienza en 0. Afirmamos que $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de $\alpha * \beta$. En primer lugar notemos que para toda x, tenemos que $p(n+x) = p(x)$, por que las funciones sin y cos tienen periodo 2π. Entonces

$$p(\tilde{\gamma}) = \begin{cases} p(\tilde{f}(2s)) = f(2s) & \text{para } s \in [0, 1/2], \\ p(n + \tilde{g}(2s-1)) = p(\tilde{g}(2s-1)) = g(2s-1) & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Por lo tanto $p \circ \tilde{\gamma} = \alpha * \beta$ y $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de $\alpha * \beta$ que comienza en 0. Por definición, $\phi([\alpha * \beta])$ es $\tilde{\gamma}(1) = n + m$. Entonces

$$\phi([\alpha * \beta]) = \phi([\alpha]) + \phi([\beta]).$$

□

Capítulo 3

Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes

3.1. Acción de $\pi_1(X, x)$ en la fibra

Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente. En esta sección definiremos una acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en la fibra $p^{-1}(x_0)$ sobre x_0.

Sea α un lazo en X basado en x_0. Su levantamiento $\tilde{\alpha}_{y_0}$ a Y con punto inicial y_0 no necesariamente es un lazo, pero su punto final $\tilde{\alpha}_{y_0}(1)$ será algún punto y_1 en la fibra $p^{-1}(x_0)$ sobre x_0. Como el punto final sólo depende de la clase de homotopía de α podemos definir una **acción** (derecha) de $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$ por

$$y \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_y(1)$$

para toda $y \in p^{-1}(x_0)$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Se deja como ejercicio verificar que satisface las propiedades de una acción.

Dado un punto $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, el **estabilizador** o **subgrupo de isotropía** S_{y_0} de y_0 es el subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$, ya que α deja fijo a y_0 si α levanta en Y a un lazo basado en y_0, y esto sucede si y sólo si α es la imagen bajo p_* de un lazo en Y basado en y_0.

Si Y es arco-conexo, $\pi_1(X, x_0)$ actúa **transitivamente**, ya que un camino $\tilde{\alpha}$ de y_0 a y_1 puede ser visto como el levantamiento del lazo $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Por lo tanto, los diferentes subgrupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ al correr y a lo largo de $p^{-1}(x_0)$ son todos **conjugados**, ya que si $y_0 \cdot [\alpha] = y_1$, entonces $S_{y_0} = [\alpha] S_{y_1} [\alpha]^{-1}$. Entonces tenemos la siguiente proposición.

3.1 Proposición. *Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cubriente, donde Y y X son arco-conexos. Sea $x_0 \in X$. Al variar y sobre los puntos de $p^{-1}(x_0)$, los grupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ varían precisamente sobre la clase de conjugación del grupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

Demostración. En la discusión anterior vimos que si $y \in p^{-1}(x_0)$ entonces los grupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ y $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ son conjugados.

Ahora sea H un subgrupo de $\pi_1(X,x_0)$ conjugado a $p_*(\pi_1(Y,y_0))$. Queremos encontrar un punto $y \in p_*(\pi_1(Y,y_0))$ tal que $p_*(\pi_1(Y,y))$ sea igual a H. Por hipótesis $p_*(\pi_1(Y,y_0)) = [\alpha]H[\alpha]^{-1}$ para algún lazo α en X basado en x_0. Sea $\tilde{\alpha}$ el levantamiento de α en Y con punto inicial y_0 y sea $y_1 = \tilde{\alpha}(1)$. Entonces por la discusión anterior tenemos que $p_*(\pi_1(Y,y_0)) = [\alpha]p_*(\pi_1(Y,y_1))[\alpha]^{-1}$ y por lo tanto $p_*(\pi_1(Y,y_1)) = H$. $\square$

3.2. Clasificación de Espacios Cubrientes

Definamos una relación de equivalencia entre los espacios cubrientes.

Dos espacios cubrientes $p\colon Y \to X$ y $p'\colon Y' \to X$ son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $h\colon Y' \to Y$ tal que $p \circ h = p'$, es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p'"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

A h se le llama **transformación cubriente**. Si $Y = Y'$ entonces, el conjunto de transformaciones cubrientes forma un grupo bajo composición y se le llama **grupo de automorfismos cubrientes**.

El siguiente teorema nos da una caracterización de cuando dos cubrientes son equivalentes.

3.2 Teorema. *Sea X conexo y localmente arco-conexo. Sea $p\colon Y \to X$ y $p'\colon Y' \to X$ espacios cubrientes arco-conexos de X. Sea $p(y_0) = p'(y'_0) = x_0$. Entonces p y p' son cubrientes equivalentes si y sólo si*

$$p_*(\pi_1(Y,y_0)) \qquad y \qquad p'_*(\pi_1(Y',y'_0))$$

son subgrupos conjugados de $\pi_1(X,x_0)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que p y p' son equivalentes. Sea $h\colon Y' \to Y$ la transformación cubriente tal que $p \circ h = p'$. Sea $h(y'_0) = y_1$. Entonces como h es homeomorfismo

$$h_*(\pi_1(Y',y'_0)) = \pi_1(Y,y_1).$$

Aplicando p_* en ambos lados

$$p'_*(\pi_1(Y',y'_0)) = p_*h_*(\pi_1(Y',y'_0)) = p_*(\pi_1(Y,y_1)).$$

Por la Proposición 3.1 este subgrupo es conjugado a $p_*(\pi_1(Y,y_0))$.

($\Leftarrow$) Supongamos que los subgrupos son conjugados. En vista de la Proposición 3.1, podemos escoger un punto distinto en Y' para obtener la situación donde los dos grupos son iguales. Supongamos que hemos hecho esto y que y'_0

es el nuevo punto base. Consideremos

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "p'"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

El espacio Y es arco-conexo y localmente arco-conexo ya que es localmente homeomorfo a X. Además

$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p'_*(\pi_1(Y', y'_0)),$$

de hecho, son iguales. Por el Teorema General de Levantamiento podemos levantar $p\colon Y \to X$ a $h\colon Y \to Y'$ tal que $h(y_0) = y'_0$. Entonces $p' \circ h = p$.

Cambiando las papeles de Y y Y', vemos que $p'\colon Y' \to X$ puede ser levantado a $k\colon Y' \to Y$ con $k(y'_0) = y_0$.

Para ver que h y k son inversos consideremos

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

$k \circ h\colon Y \to Y$ es un levantamiento de $p\colon Y \to X$ tal que $(k \circ h)(y_0) = y_0$ y la identidad también lo es. Como los levantamientos son únicos entonces son iguales. Lo mismo sucede para la otra composición. $\square$

El siguiente teorema junto con el anterior nos dice que hay una relación 1 a 1 entre las clases de equivalencia de cubrientes y las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. Para una demostración véase [3, Cor. 22.2].

3.3 Teorema. *Sea Y arco-conexo, localmente arco-conexo y semi-localmente simplemente conexo. Sea $x_0 \in X$. Dado un subgrupo H de $\pi_1(X, x_0)$ existe un cubriente arco-conexo $p\colon Y \to X$ y un punto $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ tal que*

$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H.$$

El siguiente teorema nos relaciona a la fibra de un cubriente con la imagen de la proyección del grupo fundamental del cubriente en el grupo fundamental de la base. Este teorema nos da como corolario una relación entre el número de hojas de un cubriente y el índice del grupo fundamental del cubriente visto como subgrupo del grupo fundamental de la base.

3.4 Teorema. *Sea $p\colon Y \to X$ es un espacio cubriente con $p(y_0) = x_0$. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto*

$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) \backslash \pi_1(X, x_0),$$

de clases laterales derechas del subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ de $\pi_1(X, x_0)$ y la fibra $p^{-1}(x_0)$.

Demostración. Recordemos que el grupo $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en la fibra $p^{-1}(x_0)$ y que el estabilizador de y_0 es el grupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$. El teorema se sigue un resultado clásico de acciones de grupos que dice que si un grupo actúa transitivamente en un conjunto, existe una biyección entre el conjunto y el conjunto de clases laterales del estabilizador de un punto en el conjunto. $\square$

3.5 Corolario. *El número de hojas de un espacio cubriente es igual al índice del subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$.*

Tenemos el caso especial cuando el espacio cubriente es simplemente conexo.

3.6 Corolario. *Si $p\colon Y \to X$ es un cubriente con Y simplemente conexo, entonces el número de hojas es igual al orden de $\pi_1(X, x_0)$.*

Definición. Si $p\colon Y \to X$ es un cubriente con Y simplemente conexo, se llama **cubriente universal**.

3.7 Ejemplo. La proyección $S^n \to \mathbb{P}^n$ es el cubriente universal y es un doble cubriente, entonces $\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Finalmente, terminamos enunciando un teorema que relaciona al grupo de automorfismos cubrientes del cubriente universal con el grupo fundamental de la base. Para una demostración de este resultado véase [3, Teo. 21.9, Cor, 21.10].

3.8 Teorema. *Sea un espacio cubriente $p\colon Y \to X$ con grupo de automorfismos cubrientes G. Si Y es simplemente conexo y localmente arco-conexo, G es canónicamente isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$.*

Bibliografía

[1] Carlos Robles Corbalá. Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes. Notas Manuscritas.

[2] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentic-Hall, 1975.

[3] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté, 1989.

[4] S. William Massey. *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag, 1967.