

UNIDAD CUERNAVACA, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Topología de Singularidades

José Luis Cisneros Molina

Resumen

Notas del minicurso “Topología de singularidades” impartido en la UNAH en Tegucigalpa, Honduras, del 31 de julio al 4 de agosto de 2023.

Las variedades diferenciables son los objetos de estudio de la Geometría Diferencial. Son espacios que localmente son similares a un espacio Euclidiano. Una manera de obtener variedades diferenciables es tomando la imagen inversa de valores regulares de aplicaciones diferenciables. Sin embargo, la imagen inversa de valores que no son regulares, de valores críticos, no son variedades diferenciables porque tienen algunos puntos especiales, llamados singularidades, alrededor de los cuales el espacio no es como un espacio Euclidiano. Estos espacios son llamados variedades singulares y aparecen de manera natural en la Geometría Algebraica.

La Teoría de Singularidades estudia las singularidades y busca invariantes que permitan clasificar las distintas singularidades que aparecen en las variedades algebraicas. La Topología de Singularidades se interesa en estudiar los aspectos topológicos de las singularidades y buscar invariantes topológicos de éstas.

La Teoría de Singularidades se encuentra en el cruce de varias áreas de las matemáticas: Geometría Algebraica, Topología Diferencial, Geometría Diferencial, Teoría de Nudos, entre otras.

El objetivo del curso es dar una introducción a los principales invariantes topológicos de singularidades complejas aisladas.

Índice general

1. ¿Qué es una singularidad?	2
1.1. Geometría Analítica	3
1.1.1. Ejemplos en $\mathbb{R}^2$	3
1.1.2. Ejemplos en $\mathbb{R}^3$	5
1.2. Hipersuperficies	7
1.2.1. Ejemplos en $\mathbb{R}^2$	7
1.2.2. Ejemplos en $\mathbb{R}^3$	7
1.3. Variedades diferenciables	7
1.4. Puntos singulares	8
1.5. Hipersuperficies complejas	9
1.6. Topología de singularidades	9
2. Topología Diferencial	10
2.1. Aplicaciones Diferenciables	10
2.2. Variedades Diferenciables	12
2.3. Espacio Tangente	15
2.4. Transversalidad	21
2.5. Campos Vectoriales	24
2.5.1. Campos vectoriales y curvas integrales	27
2.6. Haces Fibrados	29
2.7. Variedades algebraicas	32
3. Topología de singularidades	34
3.1. Ejemplo modelo: singularidades de Brieskorn-Pham.	34
3.1.1. Singularidades casi-homogeneas	37
3.2. Estructura cónica y aureola	37
3.2.1. Aureolas de curvas	39
3.2.2. Aureolas de superficies	44
4. Fibración de Milnor	46
4.1. Fibración en la esfera	46
4.2. Fibración en el tubo	47
4.3. Equivalencia de las fibraciones	49
4.4. La fibra de Milnor	50
4.5. Descomposición de libro abierto	50
Bibliografía	52

Capítulo 1

¿Qué es una singularidad?

Si buscamos la palabra *singularidad* en el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española encontramos lo siguiente:

singularidad

Del lat. *singularitas*, -*ātis*.

1. f. Cualidad de singular.
2. f. Distinción o separación de lo común.

Entonces buscamos la palabra *singular*:

singular

Del lat. *singulāris*.

1. adj. solo (|| único en su especie).
2. adj. Extraordinario, raro o excelente.
3. adj. cult. Dicho de un combate, de una batalla o de una pelea: Que enfrenta individualmente a dos personas.
4. adj. Gram. De número singular. Sintagma nominal singular.
5. m. Forma gramatical que posee número singular. El singular de lunes coincide con el plural.
6. m. Gram. número singular. En español hay dos números: el singular y el plural.

en singular

1. loc. adv. en particular.

En singular (en particular), estamos interesados en las dos primeras acepciones. Por lo tanto, en un conjunto de objetos “de la misma especie” una **singularidad** es uno de dichos objetos que está “solo”, o es “extraordinario”, “raro” o “excelente”.

En este capítulo veremos que “especie” de objetos matemáticos estudiaremos y cuales son sus “singularidades”.

1.1. Geometría Analítica

Recordemos que en Geometría Analítica un **lugar geométrico** está determinado por el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación.

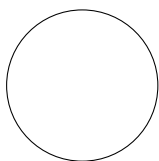
1.1.1. Ejemplos en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 1. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$x^2 + y^2 - t = 0$$

es:

1. un círculo de radio $\sqrt{t}$, si $t > 0$,



2. un punto, si $t = 0$,



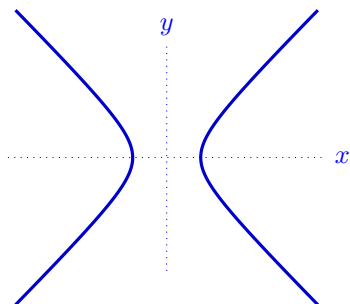
3. el conjunto vacío, si $t < 0$.

Ejemplo 2. El lugar geométrico determinado por la ecuación

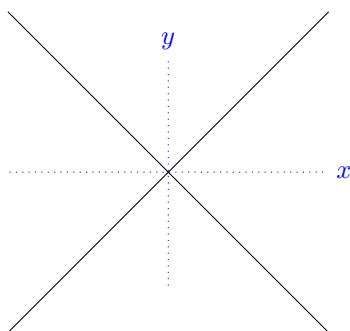
$$x^2 - y^2 - t = 0$$

es:

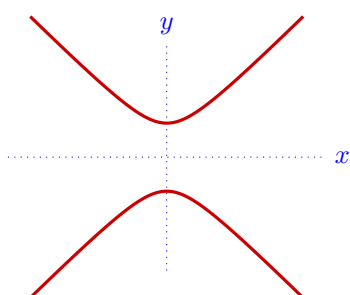
1. una hipérbola vertical, si $t > 0$,



2. dos rectas cruzadas, si $t = 0$,



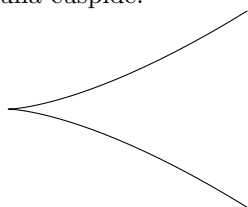
3. una hipérbola horizontal, si $t < 0$,



Ejemplo 3. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$x^3 - y^2 = 0$$

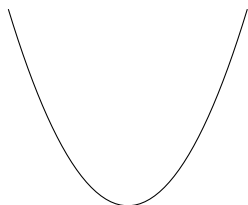
es una cúspide:



Ejemplo 4. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

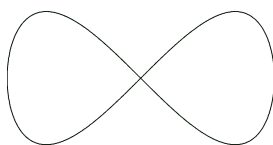
es una parábola:



Ejemplo 5. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$$

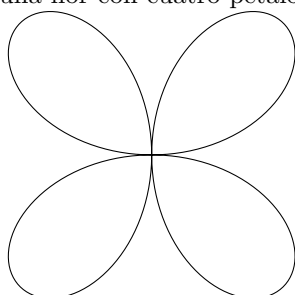
es un ocho:



Ejemplo 6. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$$

es una flor con cuatro pétalos:



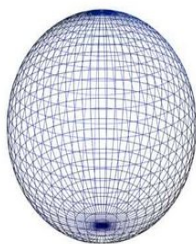
1.1.2. Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 7. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - t = 0$$

es:

1. una esfera de radio $\sqrt{t}$, si $t > 0$,



2. un punto, si $t = 0$,

•

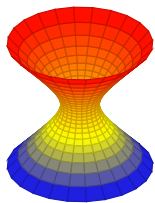
3. el conjunto vacío, si $t < 0$.

Ejemplo 8. El lugar geométrico determinado por la ecuación

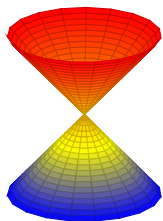
$$x^2 + y^2 - z^2 - t = 0$$

es:

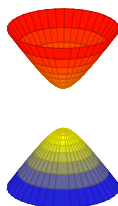
1. un hiperboloide de una hoja, si $t > 0$,



2. un cono doble, si $t = 0$,



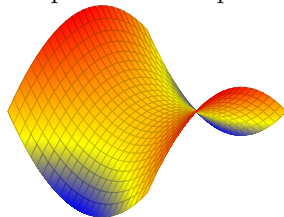
3. un hiperboloide de dos hojas, si $t < 0$,



Ejemplo 9. El lugar geométrico determinado por la ecuación

$$x^2 - y^2 - z = 0$$

es una paraboloides hiperbólico o silla de montar:



1.2. Hipersuperficies

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio. La **hipersuperficie** $V(f)$ en $\mathbb{R}^n$ definida por f esta dada por:

$$V(f) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \},$$

es decir, está formada por los **ceros** del polinomio f .

Los ejemplos de lugares geométricos vistos en la sección 1.1 pueden ser vistos como hipersuperficies definidas por los polinomios que aparecen en las ecuaciones correspondientes.

1.2.1. Ejemplos en $\mathbb{R}^2$

$f_{c,t}(x, y) = x^2 + y^2 - t$	$V(f_{c,t}) = \text{círculos, } t > 0,$	Ejemplo 1-1,
$f_{c,0}(x, y) = x^2 + y^2$	$V(f_{c,0}) = \text{punto, } t > 0,$	Ejemplo 1-2,
$f_{h,t}(x, y) = x^2 - y^2 - t$	$V(f_{h,t}) = \text{hipérbolas, } t \neq 0,$	Ejemplo 2-1,3,
$f_r(x, y) = x^2 - y^2$	$V(f_r) = \text{dos rectas cruzadas,}$	Ejemplo 2-2,
$f_k(x, y) = x^3 - y^2$	$V(f_k) = \text{cúspide,}$	Ejemplo 3,
$f_p(x, y) = y - x^2$	$V(f_p) = \text{parábola,}$	Ejemplo 4,
$f_o(x, y) = y^2 - x^2(1 - x^2)$	$V(f_o) = \text{ocho,}$	Ejemplo 5,
$f_f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$	$V(f_f) = \text{flor de 4 pétalos,}$	Ejemplo 6.

1.2.2. Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

$g_{e,t}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - t$	$V(g_{e,t}) = \text{esfera, } t > 0,$	Ejemplo 7-1,
$g_{h,1}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - t$	$V(g_{h,1}) = \text{hiperboloide de una hoja, } t > 0,$	Ejemplo 8-1,
$g_c(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$	$V(g_c) = \text{cono,}$	Ejemplo 8-2,
$g_{h,2}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - t$	$V(g_{h,2}) = \text{hiperboloide de dos hojas, } t < 0,$	Ejemplo 8-3,
$g_s(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$	$V(g_s) = \text{silla de montar,}$	Ejemplo 9.

1.3. Variedades diferenciables

En algunos de los ejemplos de hipersuperficies en $\mathbb{R}^2$ todos los puntos tienen vecindades difeomorfas a un **intervalo** abierto, pero en algunos hay puntos que

no.

Los círculos $V(f_{c,t})$, $t > 0$, **sí**,
el punto $V(f_{c,0})$, **no**,
las hipérbolas $V(f_{h,t})$, $t \neq 0$, **sí**,
las dos rectas $V(f_r)$, **el punto de cruce no**,
la cúspide $V(f_k)$, **la punta de la cúspide no**,
la parábola $V(f_p)$, **sí**,
el ocho $V(f_o)$, **el punto de cruce no**,
la flor de 4 pétalos $V(f_f)$, **el punto de cruce no**.

Análogamente, en algunos de los ejemplos de hipersuperficies en $\mathbb{R}^3$ todos los puntos tienen vecindades difeomorfas a un **disco** abierto, pero en algunos hay puntos que no.

Las esferas $V(g_{e,t})$, $t > 0$, **sí**,
los hiperboloides de una hoja $V(g_{h,1})$, $t > 0$, **sí**
el cono $V(g_c)$, **el vértice del cono no**,
los hiperboloides de dos hojas $V(g_{h,2})$, $t > 0$, **sí**
la silla de montar $V(g_s)$, **sí**.

Las hipersuperficies de $\mathbb{R}^2$ que todos sus puntos tienen vecindades difeomorfas a un intervalo abierto, son ejemplos de **variedades diferenciables** de dimensión 1.

Las hipersuperficies de $\mathbb{R}^3$ que todos sus puntos tienen vecindades difeomorfas a un disco abierto, son ejemplos de **variedades diferenciables** de dimensión 2.

En general, las hipersuperficies de $\mathbb{R}^{n+1}$ que todos sus puntos tienen vecindades difeomorfas a un abierto de $\mathbb{R}^n$, son ejemplos de **variedades diferenciables** de dimensión n .

1.4. Puntos singulares

Sea $V(f)$ la hipersuperficie definida por un polinomio $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Los puntos $x \in V(f)$ que no tienen vecindades difeomorfas a discos abiertos de $\mathbb{R}^n$ son los **puntos singulares** o **singularidades** de $V(f)$.

En los ejemplos anteriores, el origen es una **singularidad** de las hipersuperficies

el punto $V(f_{c,0})$, Ejemplo 1-2,
las dos rectas $V(f_r)$, Ejemplo 2-2,
la cúspide $V(f_k)$, Ejemplo 3,
el ocho $V(f_o)$, Ejemplo 5,
la flor $V(f_f)$, Ejemplo 6,
el cono $V(g_c)$, Ejemplo 8-2,

1.5. Hipersuperficies complejas

Análogamente al caso real. Si $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. La **hipersuperficie** definida por f es

$$V = V(f) = f^{-1}(0).$$

y una **singularidad** de V es un punto crítico de f .

Estudiamos el caso complejo por que cualquier hipersuperficie compleja en $\mathbb{C}^n$ tiene dimensión compleja $n - 1$, es decir, dimensión real $2n - 2$. Esto no siempre sucede en el caso real, como lo muestra el Ejemplo [1-2](#).

1.6. Topología de singularidades

En los ejemplos anteriores podemos ver que hay algunas singularidades mas complejas que otras. La Teoría de singularidades clasifica los distintos tipos de singularidades, definiendo **invariantes** para distinguirlas. En nuestro caso, estamos interesados en **invariantes topológicos**

Capítulo 2

Topología Diferencial

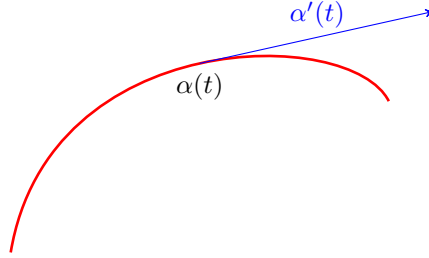
Este capítulo trata de dar un compendio de los resultados que se usan en los capítulos 3 y 4. Para entender estos conceptos sólo se necesitan cálculo de varias variables y algunas cosas muy básicas de topología; la primera sección es la más importante en el sentido de que todas las demás secciones tienen que ver con ella. Para ahondar en los temas que se abarcan en este capítulo, se recomiendan [1], [5], [7], [14], [13] y [17]; la última referencia es para aquellas personas que no tienen casi ningún conocimiento de topología; las demás contienen teoría y ejercicios que pueden ayudar al lector a asimilar de una mejor manera lo que aquí se presenta.

2.1. Aplicaciones Diferenciables

Denotaremos por $\mathbb{R}^m$ al espacio Euclideo de dimensión m . Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos, por cálculo de varias variables sabemos que una aplicación $f: U \rightarrow V$ es **diferenciable** si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}$ existen y son continuas.

Como un ejemplo, recordemos que una **curva diferenciable** en $\mathbb{R}^m$ es una función α de un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$ tal que las funciones coordenadas son derivables en I . Para $t_0 \in I$, llamaremos a $\alpha'(t_0)$, la derivada de α evaluada en t_0 , el **vector velocidad** de α en $\alpha(t_0)$.

Definición 1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $x \in U$. El **espacio tangente** a U en x , denotado por $T_x U$ consiste en todos los vectores de $\mathbb{R}^m$ anclados en x . Claramente tenemos que $T_x U \cong \mathbb{R}^m$. Otra manera de ver a $T_x U$ es la siguiente. Consideremos el conjunto de curvas diferenciables $\alpha: I \rightarrow U$, donde I es un intervalo abierto alrededor del 0 y con $\alpha(0) = x$. Establecemos una relación de equivalencia en este conjunto de curvas diciendo que dos curvas α y β son equivalentes si y sólo si $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Hay una correspondencia 1 a 1 entre las clases de equivalencia de curvas y $T_x U \cong \mathbb{R}^m$, la cual asocia a la clase de equivalencia $[\alpha]$ de la curva α el **vector velocidad** $\alpha'(0) \in T_x U \cong \mathbb{R}^m$.



Definición 2. Dada una aplicación diferenciable $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, con U y V abiertos, la **diferencial** de f en $x \in U$, denotada por Df_x , es una transformación lineal $Df_x: T_x U \rightarrow T_{f(x)} V$, la cual podemos definir como sigue. Para $v \in T_x U$, sea $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. Luego $\beta = f \circ \alpha$ es una curva diferenciable en V . Entonces definimos

$$Df_x(v) = \beta'(0).$$

Recordemos que la diferencial satisface las siguientes propiedades:

1. **Regla de la cadena** Si $f: U \rightarrow V$ y $g: V \rightarrow W$ son aplicaciones diferenciables con $f(x) = y$, entonces

$$D(g \circ f)_x = Dg_y \circ Df_x.$$

2. Si I es la aplicación identidad de U , entonces DI_x es la aplicación identidad de $\mathbb{R}^m$. De manera mas general, si $U \subset U'$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ e $i: U \rightarrow U'$ es la inclusión, entonces Di_x es nuevamente la aplicación identidad en $\mathbb{R}^m$.
3. Si $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces $DL_x = L$.
4. Si $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dada por

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

la matriz asociada a la transformación lineal $Df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dada por la **matriz Jacobiana**

$$Df_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

De manera más general, sean X y Y subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es diferenciable si para cada $x \in X$ existe un subconjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a x y una función diferenciable F de W en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f = F|_{X \cap W}.$$

Definición 3. Una función

$$f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$$

es un **difeomorfismo** si f es una biyección entre X y Y tal que f y f^{-1} son diferenciables.

Una aplicación de las propiedades de la diferencial es la siguiente proposición.

Proposición 2.1. Si f es un difeomorfismo entre conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces $k = l$ y la aplicación lineal

$$Df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es no singular, para todo $x \in U$.

Demostración. La composición $f^{-1} \circ f$ es la aplicación identidad en U , por lo tanto $D(f^{-1})_y \circ Df_x$ es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^m$. Análogamente, $Df_x \circ D(f^{-1})_y$ es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, Df_x tiene un inverso por los dos lados y se sigue que $m = n$. $\square$

Existe un recíproco parcial a la Proposición 2.1.

Teorema de la Función Inversa. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable con U abierto en $\mathbb{R}^m$. Si la diferencial $Df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es no singular, entonces f manda cualquier vecindad abierta U' de $x \in U$ suficientemente pequeña, difeomorfamente sobre un conjunto abierto $f(U')$.

La demostración se puede encontrar en [2, Thm. 13.6].

2.2. Variedades Diferenciables

Definición 4. Un subconjunto M de $\mathbb{R}^m$ es una **variedad diferenciable** de dimensión k , con $k < m$, si a M lo podemos dotar de una familia $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tal que satisface las siguientes condiciones:

- i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta abierta de M .
- ii) Cada h_α es un difeomorfismo entre el abierto U_α y un abierto U'_α de $\mathbb{R}^k$ (Ver Figura 2.1).

A cada elemento (U_α, h_α) lo llamaremos **carta** y diremos que la colección $\{U_\alpha, h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un **atlas** para M . Por otra parte, llamaremos **parametrización local** a la pareja $(U'_\alpha, h_\alpha^{-1})$ (recordemos que h_α es un difeomorfismo, por lo que tiene una inversa h_α^{-1} diferenciable). Para $p \in U_\alpha$, $U'_\alpha = h_\alpha(U_\alpha)$ es llamada **vecindad coordenada** de p .

Podemos ver que cuando hablamos de un atlas, no estamos pidiendo que los conjuntos U_α sean ajenos; entonces la pregunta que surge es qué pasa en las intersecciones de dichos conjuntos. Lo que sucede es que ambos difeomorfismos h_α, h_β están definidos en la intersección de sus dominios $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$; entonces, obtenemos una transformación $h_{\alpha\beta}$, la cual es un difeomorfismo entre subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^k$ y que está definida como $h_{\alpha\beta} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$, como se ve en el siguiente diagrama:

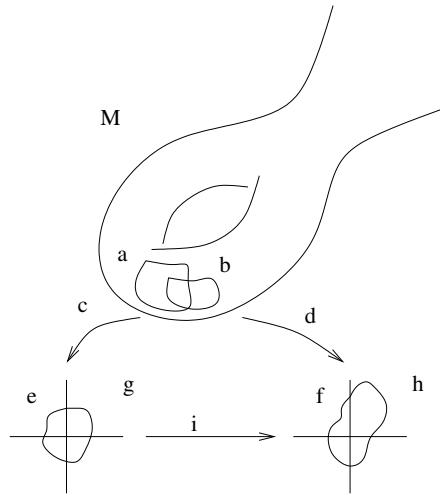


Figura 2.1: Una variedad

$$\begin{array}{ccc}
 & U_{\alpha\beta} & \\
 h_{\alpha} \swarrow & & \searrow h_{\beta} \\
 U'_{\alpha} \supset h_{\alpha}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{h_{\alpha\beta}} & h_{\beta}(U_{\alpha\beta}) \subset U'_{\beta}
 \end{array}$$

A la transformación $h_{\alpha\beta}$ se le conoce como **función de transición**.

Definición 5. Una variedad diferenciable $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es **analítica** si toda función de transición $h_{\alpha\beta}$ es analítica.

Ejemplo 10. La esfera de dos dimensiones

$$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

Sea $U = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$ y la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$. Tomemos la familia $\{(U_i, F_i)\}_{i=1}^6$ tal que para $i = 1, \dots, 6$, $U_i = U$ y $F_i : U_i \rightarrow S^2$ donde

$$\begin{aligned}
 F_1(x_1, x_2) &= (f(x_1, x_2), x_1, x_2) \\
 F_2(x_1, x_2) &= (-f(x_1, x_2), x_1, x_2) \\
 F_3(x_1, x_2) &= (x_1, f(x_1, x_2), x_2) \\
 F_4(x_1, x_2) &= (x_1, -f(x_1, x_2), x_2) \\
 F_5(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \\
 F_6(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, -f(x_1, x_2))
 \end{aligned}$$

con inversas $F_i^{-1} = \pi_i|_{F_i(U_i)}$ donde $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para $i = 1, \dots, 6$

$$\pi_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_2, x_3) & \text{si } i = 1, 2. \\ (x_1, x_3) & \text{si } i = 3, 4. \\ (x_1, x_2) & \text{si } i = 5, 6. \end{cases}$$

claramente F_i y F_i^{-1} son diferenciables para $i = 1, \dots, 6$ y así la familia $\{(U_i, F_i)\}_{i=1}^6$ satisface las condiciones de nuestra definición de variedad diferenciable, por lo tanto S^2 es una variedad diferenciable.

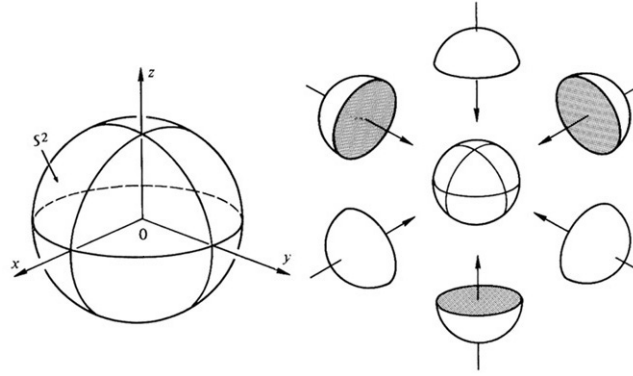


Figura 2.2: Parametrizaciones de S^2

Ejemplo 11. Análogamente, la esfera de tres dimensiones

$$S^3 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \}.$$

Sea $U = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 \}$ y la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$. Tomemos la familia $\{(U_i, F_i)\}_{i=1}^8$ tal que para $i = 1, \dots, 8$, $U_i = U$ y $F_i : U_i \rightarrow S^3$ donde

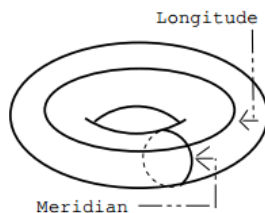
$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= (f(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= (-f(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, f(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) \\ F_4(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, -f(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) \\ F_5(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, f(x_1, x_2, x_3), x_3) \\ F_6(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, -f(x_1, x_2, x_3), x_3) \\ F_7(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3)) \\ F_8(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3, -f(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

con inversas $F_i^{-1} = \pi_i|_{F_i(U_i)}$ donde $\pi_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para $i = 1, \dots, 8$

$$\pi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} (x_2, x_3, x_4) & \text{si } i = 1, 2. \\ (x_1, x_3, x_4) & \text{si } i = 3, 4. \\ (x_1, x_2, x_4) & \text{si } i = 5, 6. \\ (x_1, x_2, x_3) & \text{si } i = 7, 8. \end{cases}$$

claramente F_i y F_i^{-1} son diferenciables para $i = 1, \dots, 8$ y así la familia $\{(U_i, F_i)\}_{i=1}^8$ satisface las condiciones de nuestra definición de variedad diferenciable, por lo tanto S^3 es una variedad diferenciable.

Ejemplo 12. Análogamente a la esfera, se puede ver que un círculo es una variedad diferenciable. El producto de dos círculos $S^1 \times S^1$ es un espacio llamado **toro** y se puede visualizar como la superficie de una dona



El producto de dos variedades diferenciables es una variedad diferenciable, por lo tanto, el toro es una variedad diferenciable.

Definición 6. Sea M una variedad diferenciable de dimensión k ; un subconjunto $N \subset M$ es llamado una **subvariedad diferenciable de M de dimensión l** si, para todo punto $p \in M$ existe una carta (U, h) alrededor de p

$$h: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{k-l},$$

tal que

$$h(N \cap U) = U' \cap \mathbb{R}^l,$$

donde consideramos $\mathbb{R}^l$ como $\mathbb{R}^l \times 0 \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$.

El número $k - l = \dim M - \dim N$ es llamado la **codimensión** de la subvariedad N .

Definición 7. Sean M y N variedades diferenciables de dimensión k y l respectivamente. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, sea $p \in M$ y sean $h: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^k$ y $g: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^l$ cartas de M y N respectivamente con $p \in U$ y $f(p) \in V$.

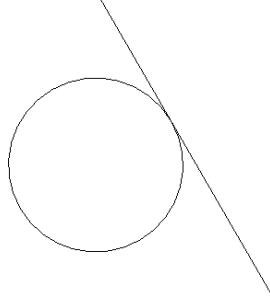
Diremos que la aplicación $f^{hg} = g \circ f \circ h^{-1}$ es la aplicación f vista en las coordenadas de las cartas h y g para M y N . A veces se abusará de la notación y escribiremos $f(x_1, \dots, x_m)$ en lugar de $f^{hg}(x_1, \dots, x_m)$.

Definición 8. Una función diferenciable $f: M \rightarrow N$ es llamada un **encaje** si $f(M) \subset N$ es una subvariedad diferenciable y $f: M \rightarrow f(M)$ es un difeomorfismo.

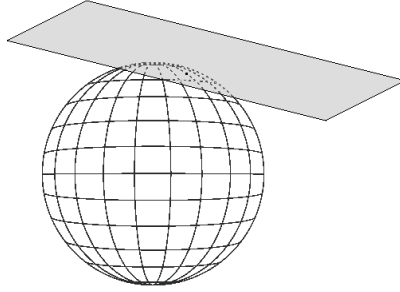
2.3. Espacio Tangente

Definición 9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^m$ y p un punto de M . Un vector v de $\mathbb{R}^m$ es **tangente** a M en p , si v se puede expresar como el vector velocidad en p de alguna curva diferenciable en M que pase por p . El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p es llamado **espacio tangente** a M en p y se denota por $T_p M$.

Ejemplo 13. Recta tangente al círculo:



Ejemplo 14. Plano tangente a la esfera:



Ahora, sea $M \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Sabemos que para todo $p \in M$ existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que $p \in U$ y una función diferenciable F de U en $\mathbb{R}^n$ tal que $F|_{M \cap U} = f$. Definimos para cada $p \in M$ la diferencial de f en p por:

$$\begin{aligned} Df_p: T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Df_p &= DF_p|_{T_p M}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que df_p está bien definida, para ello sea G otra función diferenciable de un abierto V de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $p \in V$ y $G|_{M \cap V} = f$. Sea $\alpha: I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M tal que $\alpha(t_0) = p$. Entonces, $\beta(t) = f(\alpha(t)) = F(\alpha(t)) = G(\alpha(t))$ de manera que en t_0 tenemos

$$\begin{aligned} DF_p(\alpha'(t_0)) &= \beta'(t_0) \\ &= DG_p(\alpha'(t_0)) \end{aligned}$$

lo cual nos muestra que $DF_p|_{T_p M} = DG_p|_{T_p M}$ y así Df_p está bien definida.

Proposición 2.2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^m$ y p un punto de M . El espacio tangente a M en p es un espacio vectorial de dimensión k .

Demostración. Dado un punto p en M y $u \in T_p M$, existe una curva $\alpha: I \rightarrow M$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = u$. Sea (U, h) una carta de M en p tal que $x_0 = h(p)$. Como h es diferenciable tenemos que $\beta = h \circ \alpha$ es una curva diferenciable en U' con $\beta(t_0) = x_0$ y $\beta'(t_0) = dh_p(u) \in \mathbb{R}^k$. Inversamente, para cada vector $v \in \mathbb{R}^k$ existe una curva diferenciable γ en U' tal que pasa por x_0 y el vector velocidad

de γ en x_0 es precisamente v y puesto que $h^{-1} \circ \gamma$ es una curva diferenciable en M , $Dh_{x_0}^{-1}(v) \in T_p M$. Por lo tanto

$$T_p M = Dh_{x_0}^{-1}(\mathbb{R}^k)$$

y así $T_p M$ es un espacio vectorial. Ahora, para las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} Dh_{x_0}^{-1} : \mathbb{R}^k &\longrightarrow T_p M \\ Dh_p : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

tenemos que $Dh_{x_0}^{-1} \circ Dh_p$ es la identidad en $\mathbb{R}^k$, de donde $Dh_{x_0}^{-1}$ es suprayectiva y Dh_p es inyectiva, por lo tanto, la dimensión de $T_p M$ es igual a la dimensión de $\mathbb{R}^k$, la cual es como sabemos k . $\square$

Nota 2.3. Dada una carta (U, h) alrededor de $p \in M$ obtenemos una base para $T_p M$ dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p,$$

donde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ es la imagen bajo $Dh_{h(p)}^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow T_p M$, del i -ésimo vector de la base standard $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$. Por lo tanto un vector $X_p \in T_p M$ puede escribirse de manera única como

$$X_p = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Si $X_p = [\alpha]$, donde $\alpha : I \rightarrow U$ con $\alpha(0) = p$ es una curva suave tal que $\alpha'(0) = X_p$, entonces tenemos que

$$\mathbf{a} = (h \circ \alpha)'(0).$$

Consideremos dos variedades, $M \subset \mathbb{R}^m$ y $N \subset \mathbb{R}^n$, y una transformación diferenciable $f : M \rightarrow N$. Sea p en M y α una curva en M tal que $\alpha(t_0) = p$, entonces $f \circ \alpha$ es una curva en N tal que $(f \circ \alpha)(t_0) = f(p)$ y de aquí tenemos que los vectores tangentes a M en p serán mandados por Df_p a vectores tangentes a N en $f(p)$ por lo tanto la diferencial nos da una aplicación bien definida entre los espacios tangentes

$$Df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N.$$

Como antes, la diferencial tiene las siguientes propiedades fundamentales:

1. **Regla de la Cadena:** Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son diferenciables con $f(p) = q$, entonces

$$D(g \circ f)_p = Dg_q \circ Df_p.$$

2. Si I es la aplicación identidad de M , entonces DI_p es la aplicación identidad de TM_p . De forma mas general, si $M \subset N$ con la aplicación inclusión $i : M \rightarrow N$, entonces $Di_p : TM_p \rightarrow TN_q$ es la aplicación inclusión.

3. Si la aplicación $f: M \rightarrow N$ está dada en coordenadas locales por

$$f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_l(x_1, \dots, x_m)),$$

la matriz asociada a la transformación lineal $Df_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dada por la **matriz Jacobiana**

$$Df_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

La demostración de estas propiedades se sigue de la definición de la diferencial de una aplicación diferenciable entre variedades y las propiedades análogas para aplicaciones diferenciales de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$. Como antes, estas propiedades implican la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Si $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $Df_p: TM_p \rightarrow TN_q$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, la dimensión de M es igual a la dimensión de N .*

Definición 10. Dada una función $f: M \rightarrow N$, con M, N variedades diferenciables, diremos que f es un **difeomorfismo local en p** , cuando existe una vecindad U alrededor del punto $p \in M$ tal que $f|_U$ es un difeomorfismo y $f(U) = V$ con V una vecindad alrededor del punto $f(p) \in N$.

Componiendo con parametrizaciones, el Teorema de la Función Inversa puede generalizarse para aplicaciones diferenciales entre variedades diferenciales (ver [1, Teo. 3.5.1]).

Teorema 2.5 (de la función inversa para variedades diferenciables). *Sean M, N variedades diferenciables, sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable entre ellas y sea $p \in M$, si la diferencial de f , $Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo, entonces f es un difeomorfismo local en p .*

Demostración. Sean (U, h) y (V, g) cartas alrededor de p y $f(p)$ respectivamente con $h(p) = 0$. En coordenadas locales la hipótesis nos dice que la diferencial Df_0^{hg} es un isomorfismo. Por el Teorema de la Función Inversa clásico nos garantiza que f^{hg} es un difeomorfismo restringida a alguna vecindad W de 0. Tomando la composición:

$$g^{-1} \circ f^{hg} \circ h: h^{-1}(W) \rightarrow f(h^{-1}(W)),$$

vemos que f es difeomorfismo local. □

Definición 11. Una función diferenciable $f: N \rightarrow M$ es una **inmersión en p** para algún $p \in M$ si la diferencial Df_p es inyectiva y decimos que f es una **inmersión** si es una inmersión en p para todo $p \in M$.

La **inmersión canónica** es la inclusión estándar de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}^l$ para $k \leq l$ en la cual,

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0).$$

Definición 12. Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades diferenciables; si Df_p es suprayectiva para algún punto $p \in M$, diremos que f es una **submersión en p** ; una función que es submersión en todo punto de M , es simplemente llamada una **submersión**.

La **submersión canónica** es la proyección estándar de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}^l$ para $k \geq l$ en la cual,

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1, \dots, a_l).$$

Teorema 2.6 (de Submersión Local). *Supongamos que $f: M \rightarrow N$ es una submersión en un punto $p \in M$ y sea $q = f(p)$; entonces existen coordenadas locales alrededor de p y de q tales que*

$$f(p_1, \dots, p_k) = (p_1, \dots, p_l);$$

esto es, f es localmente equivalente a la submersión canónica cerca de p .

Demostración. Dado cualquier diagrama de parametrización local

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Phi \uparrow & & \uparrow \Psi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

con $\Phi(0) = p$ y $\Psi(0) = q = f(p)$; lo que queremos, es modificar la función g para poder aplicar el Teorema 2.5. Como f es una submersión y Φ y Ψ son difeomorfismos, g es una submersión, por lo que $Dg_0: T_0\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \rightarrow T_0\mathbb{R}^l \cong \mathbb{R}^l$ es suprayectiva; entonces, mediante un cambio de base en las coordenadas, podemos asumir que la matriz correspondiente es $(I_l|0)$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned} G: U &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (u_1, \dots, u_k) &\mapsto (g(u), u_{l+1}, \dots, u_k) \end{aligned}$$

donde, $u = (u_1, \dots, u_k)$.

Entonces, si $g(u) = (g_1(u), \dots, g_l(u))$ con $g_1, \dots, g_l$ funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que:

$$Dg_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde esta matriz es de tamaño $k \times l$; de donde,

$$DG_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial g_l}{\partial x_k} \\ \frac{\partial x_{l+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{l+1}}{\partial x_{l+1}} & \cdots & \frac{\partial x_{l+1}}{\partial x_k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial x_1} & \cdots & & & \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

esto es, DG_0 es la matriz I_k . Por el Teo. 2.5, G es un difeomorfismo local en 0.

Entonces, como G es un difeomorfismo local, existe un difeomorfismo G^{-1} de alguna vecindad del cero, $U' \subset \mathbb{R}^k$ en U ; además, por construcción,

$$g = \text{submersión canónica} \circ G,$$

ya que

$$\begin{aligned} g(u) &= \text{submersión canónica}(G(u)) = \text{submersión canónica}(g(u), u_{l+1}, \dots, u_k) \\ &= g(u); \end{aligned}$$

esto es, $g \circ G^{-1}$ es la submersión canónica; entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Phi \uparrow & & \uparrow \Psi \\ U & \xrightarrow{g} & V \\ G^{-1} \uparrow & \nearrow \text{submersión} & \\ U' & \text{canónica} & \end{array}$$

Esto último sucede porque, como G^{-1} y Φ son difeomorfismos locales, la composición es un difeomorfismo local; es decir, $\Phi \circ G^{-1}$ es una parametrización que manda abiertos $U' \subset \mathbb{R}^k$ en abiertos de M . $\square$

Cabe mencionar que existe un resultado análogo para inmersiones que dice que si la diferencial es inyectiva (una inmersión) entonces la función es localmente la inmersión canónica.

Haz tangente

Dada una aplicación diferenciable entre dos variedades $f: M \rightarrow N$, tenemos que la diferencial $Df_p: TM_p \rightarrow TN_q$ es una transformación lineal que depende del punto p de M , así que al cambiar de punto obtenemos, mediante la diferencial de f , otra transformación lineal entre los espacios tangentes correspondientes. Esto motiva a definir una transformación del conjunto de todos los vectores tangentes a M en el conjunto de todos los vectores tangentes a N . Para tal fin, definamos para una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^m$, el subconjunto de $M \times \mathbb{R}^m$

$$TM = \{ (x, u) \in M \times \mathbb{R}^m \mid x \in M, u \in T_x M \} \quad (2.2)$$

y al cual llamaremos **haz tangente**. De manera que el elemento (x, u) puede ser interpretado como “el vector u tangente a M en x ”. Se puede verificar que TM es una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^{2m}$, pues $TM \subset M \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$. Entonces, retomando las variedades $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ y f , una función diferenciable entre ellas, podemos definir

$$\begin{aligned} Df: TM &\longrightarrow TN \\ Df(x, u) &\mapsto (f(x), Df_x(u)) \end{aligned}$$

que al definir la proyección

$$\begin{aligned} \pi_M: TM &\longrightarrow M \\ \pi(x, u) &= x \end{aligned} \quad (2.3)$$

tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Ejemplo 15. En la Figura 2.3 se muestra el haz tangente para $M = S^1$. Resulta ser un cilindro infinito, en este caso, para construir el haz tangente, se puede pensar que cada recta tangente fué “rotada” 90° hasta quedar perpendicular al plano del círculo, de esta manera, todas las rectas tangentes forman el cilindro, el cual es una variedad diferenciable de dimensión 2. La proyección π , es la proyección sobre el círculo y de esta manera, la imagen inversa de un punto es precisamente su recta “tangente”.

2.4. Transversalidad

Definición 13. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables. Decimos que un punto $p \in M$ es un **punto regular** de f si f es una submersión en p , y un punto $q \in N$ es un **valor regular** de f si todo punto de $f^{-1}(q)$ es regular. Cuando un punto o valor no es regular, decimos que es un punto o valor **crítico**. Un punto crítico $p \in M$ es **aislado** si existe una vecindad U de p donde p es el único punto crítico de f .

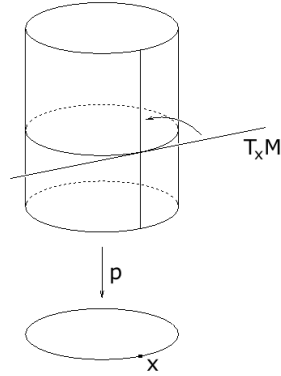


Figura 2.3: Haz tangente de S^1

Teorema 2.7 (de la Preimagen). *Sea $f: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensión k y l respectivamente con $k \geq l$. Si $q \in N$ es un valor regular, entonces el conjunto $f^{-1}(q) \subset M$ es una variedad diferenciable de dimensión $k - l$.*

Demostración. Sea $p \in f^{-1}(q)$. Como q es un valor regular, la diferencial $Df_p: TM_p \rightarrow TN_q$ es sobre. Por lo tanto, el kernel $K \subset TM_p$ de Df_p es un subespacio vectorial de dimensión $(k - l)$.

Si $M \subset \mathbb{R}^m$, escojamos una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{k-l}$ que es no singular en el subespacio $K \subset TM_p \subset \mathbb{R}^k$. Definimos

$$F: M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{k-l}$$

$$F(x) = (f(x), L(x)).$$

La diferencial DF_p está claramente dada por

$$DF_p(v) = (Df_p(v), L(v)).$$

Por lo tanto DF_p es no singular. Entonces, por el Teorema de la Función Inversa (Teorema 2.5) F manda alguna vecindad U de p difeomorfamente sobre una vecindad V de $(q, L(p))$.

Nótese que la imagen de $f^{-1}(q)$ bajo F es el hiperplano $q \times \mathbb{R}^{k-l}$. De hecho F manda a $f^{-1}(q) \cap U$ difeomorfamente sobre $(q \times \mathbb{R}^{k-l}) \cap V$. Esto prueba que $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión $k - l$. $\square$

Ejemplo 16. Podemos demostrar fácilmente que la esfera unitaria S^{m-1} es una variedad diferenciable. Considera la función $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2.$$

Toda $y \neq 0$ es un valor regular y la variedad diferenciable $f^{-1}(1)$ es precisamente la esfera unitaria.

Definición 14. Sean M y N variedades diferenciables y sea $L \subset N$ una subvariedad diferenciable de dimensión k . Diremos que una función diferenciable

$f: M \rightarrow N$ es **transversal** a L (denotado por $f \pitchfork L$) si la condición de transversalidad

$$Df_p(T_p M) + T_{f(p)} L = T_{f(p)} N, \quad \text{si } f(p) \in L, \quad (2.4)$$

es satisfecha para todo $p \in M$.

Nota 2.8. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sea $q \in N$ un valor regular. Consideremos a q como una subvariedad de N de dimensión cero. Entonces f es transversal a q . Por lo tanto una aplicación transversal a una subvariedad generaliza el concepto de valor regular de una aplicación.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 2.7 utilizando transversalidad.

Teorema 2.9. Si $f: M \rightarrow N$ es transversal a la subvariedad $L \subset N$ de codimensión k y $f^{-1}(L) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(L)$ es una subvariedad de M de codimensión k .

Demostración. El hecho de que $f^{-1}(L)$ sea una variedad es una cuestión local. Es decir, es una variedad si y sólo si todo punto $x \in f^{-1}(L)$ tiene una vecindad U en M tal que $f^{-1}(L) \cap U$ es una variedad. Sea $f(p) = q \in L$. Existe una carta (V, ϕ) tal que $\phi(V)$ es difeomorfa a una vecindad V' de $\phi(p) = 0$ en $\mathbb{R}^l$ y tal que $\phi(L \cap V) = \mathbb{R}^{l-k} \cap V'$ donde $\mathbb{R}^{l-k} \subset \mathbb{R}^n$ está dado haciendo cero las últimas k coordenadas.

Por otro lado, sea $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección en esas últimas coordenadas; entonces, $\Pi(\phi(L \cap V)) = 0$. Sea U una vecindad de p en M tal que $f(U) \subset V$ y consideremos la composición

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\phi} V' \xrightarrow{\Pi} \mathbb{R}^k \quad (2.5)$$

$$p \longmapsto q \longmapsto 0 \longmapsto 0$$

Como $T_p U \cong T_p M$, $T_q V \cong T_q N$ y $f \pitchfork L$ tenemos que

$$T_q V \cong Df_p(T_p U) \oplus T_q(L \cap V),$$

y como $L \cap V$ es de codimensión k tenemos que $\dim Df_p(T_p U) = k$. Aplicando la diferencial de la carta ϕ en q tenemos

$$D\phi_q(T_q V) = D\phi_q(Df_p(T_p U)) \oplus \mathbb{R}^{l-k},$$

como $D\phi_q$ es un isomorfismo $D\phi_q(Df_p(T_p U))$ tiene dimensión k y por lo tanto $D\Pi_0(D\phi_q(Df_p(T_p U))) \cong \mathbb{R}^k$ como se muestra en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} T_p M & \xrightarrow{Df_p} & T_q V & \xrightarrow{D\phi_q} & T_0 V' & \xrightarrow{D\Pi_0} & T_0 \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & Df_p(T_p M) \oplus T_q(L \cap V) & \longmapsto & D\phi_q(Df_p(T_p M)) \oplus \mathbb{R}^{n-k} & \longmapsto & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Entonces tenemos que 0 es un valor regular de la composición $\Pi \circ \phi \circ f$ y por lo tanto por el Teorema 2.7 su preimagen $(\Pi \circ \phi \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(L) \cap U$ es una subvariedad de U de codimensión k . $\square$

Definición 15. Sean M y L subvariedades de N . Decimos que M y L son **transversales** (denotado por $M \pitchfork L$) si

$$T_p M + T_p L = T_p N$$

para toda $p \in M \cap L$.

Ejemplo 17. Curvas en $\mathbb{R}^2$.

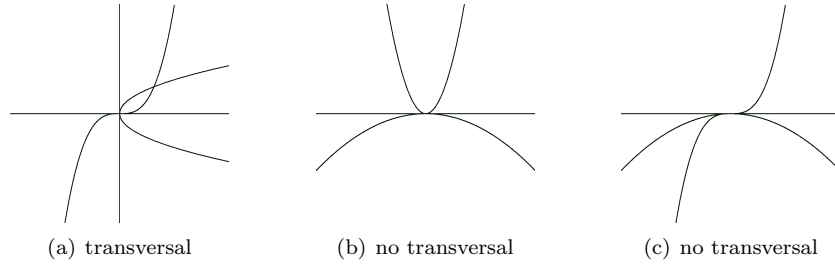


Figura 2.4: Transversalidad

Nota 2.10. Si $i: M \rightarrow N$ y $j: L \rightarrow N$ son las inclusiones, tenemos que $M \pitchfork L$ es equivalente a $i \pitchfork L$ o a $j \pitchfork M$.

Corolario 2.11. La intersección de dos subvariedades transversales M y L de N es también una subvariedad. Además

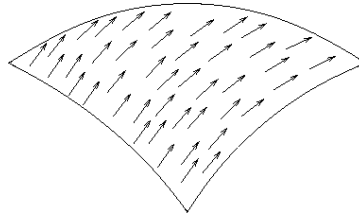
$$\text{codim}(M \cap L) = \text{codim}M + \text{codim}L.$$

2.5. Campos Vectoriales

Definición 16. Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable. Un **campo vectorial diferenciable** en M es una aplicación diferenciable $v: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $v(x) \in T_x M$ para cada $x \in M$.

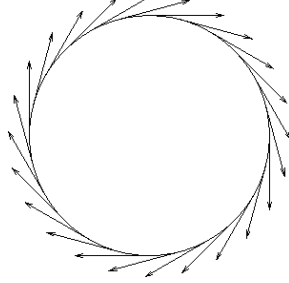
Dada una carta (U, h) tenemos que el campo vectorial X restringido a U se escribe en coordenadas locales como en la ecuación (2.1) pero ahora los coeficientes a_i son funciones suaves $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 18. Campo vectorial sobre una variedad:

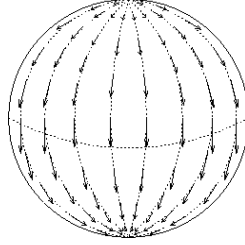


Una **singularidad** a del campo vectorial v es un punto $a \in M$ en el cual el campo vectorial es cero o no está definido.

Ejemplo 19. Sea $M = S^1$ el círculo. El campo vectorial ilustrado en la figura no tiene singularidades.



Ejemplo 20. Sea $M = S^2$ la esfera de dimensión 2. El campo vectorial ilustrado en la figura tiene singularidades en los polos.



Ejemplo 21. Sea $M = T$ el toro. Los campos vectoriales mostrados en la Figura 2.5 no tienen singularidades.

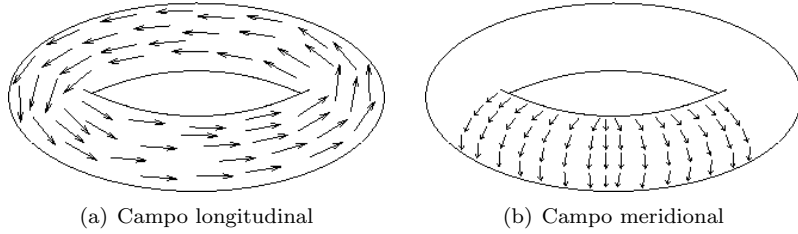


Figura 2.5: Campos vectoriales en el toro

Una forma muy útil de construir campos vectoriales en una variedad diferenciable es construyendo campos vectoriales en cada vecindad coordenada y después pegándolos mediante las cartas para formar un campo vectorial sobre toda la variedad.

Lema 2.12. Sea $B_a(x_0)$ y $B_b(x_0)$ las bolas en $\mathbb{R}^m$ con centro en x_0 y radios a y b respectivamente. Supongamos que a, b , entonces existe una función suave $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que h es igual a 1 en $B_a(x_0)$, cero fuera de $B_b(x_0)$ y estrictamente entre 0 y 1 en puntos de $B_b(x_0) - B_a(x_0)$.

Demostración. Consideremos la función suave $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Es fácil ver que la función dada por $F(x) = f(x-a)f(b-x)$ es positiva en el intervalo (a, b) y cero en cualquier otro punto. Definimos

$$g(x) = \frac{\int_{-\infty}^x F dx}{\int_{-\infty}^{\infty} F dx}$$

la cual es una función suave tal que $g(x) = 0$ para $x < a$, $g(x) = 1$ para $x > b$ y $0 < g(x) < 1$ para $x \in (a, b)$. Finalmente definimos $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = g(\|x - x_0\|).$$

□

Definición 17. Una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de un espacio topológico X es **localmente finita** si para toda $x \in X$ existe una vecindad W de x tal que $W \cap U_\alpha \neq \emptyset$ para un número finito de α .

Definición 18. Un **refinamiento** $\{U_i\}$ de la cubierta $\{V_\alpha\}$ es una cubierta tal que para cada i existe un α tal que $U_i \subset V_\alpha$.

Teorema 2.13. Sea X un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^m$. Dada cualquier cubierta de X por subconjuntos abiertos (relativos) $\{V_\alpha\}$, existe un refinamiento $\{U_i\}$ localmente finito de $\{V_\alpha\}$ y una sucesión de funciones suaves $\{g_i\}$ sobre X , llamada **partición de la unidad** subordinada a la cubierta abierta $\{U_i\}$, con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq g_i(x) \leq 1$ para toda $x \in X$ y toda i .
2. Cada $x \in X$ tiene una vecindad en la cual todas salvo un número finito de funciones g_i son idénticamente cero.
3. Cada función g_i es idénticamente cero excepto en algún conjunto cerrado contenido en una U_i .
4. Para cada $x \in X$, $\sum_i g_i(x) = 1$. Nótese que de acuerdo con 2 esta suma es siempre finita.

Demostración. Como cada V_α es un abierto relativo de X puede ser escrito como $U_\alpha = X \cap W_\alpha$ para algún conjunto abierto W_α de $\mathbb{R}^m$. Sea $W = \bigcup_\alpha U_\alpha$ y sea $\{K_j\}$ cualquier sucesión de conjuntos compactos tales que

$$W = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

con $K_j \subset \text{Interior}(K_{j+1})$. Por ejemplo

$$K_j = \{z \in W \mid |z| < j \text{ y la distancia de } z \text{ a } \mathbb{R}^m - W \geq 1/j\}.$$

La colección de todas las bolas de $\mathbb{R}^m$ cuya cerradura pertenece a al menos una W_α es una cubierta abierta de W . Seleccionemos un número finito de dichas bolas $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_r$ que cubra al conjunto K_2 . Por el Lema 2.12 para cada bola seleccionada podemos encontrar una función suave η_l no negativa en $\mathbb{R}^m$ tal que es idénticamente 1 en $\tilde{W}_l$ y cero fuera de un conjunto cerrado contenido en una de las W_α .

Continuamos construyendo una sucesión de funciones inductivamente. Para cada $j \geq 3$, el conjunto compacto $K_j - \text{Interior}(K_{j-1})$ está contenido en el conjunto abierto $W - K_{j-2}$. La colección de todas las bolas abiertas tales que su cerradura esta contenida tanto en $W - K_{j-2}$ y alguna W_α forman una cubierta abierta de $K_j - \text{Interior}(K_{j-1})$. Extrayendo una subcubierta finita y agregando a nuestra sucesión $\{\eta_i\}$ una función por cada bola; la función debe ser 1 en la bola y cero fuera de un conjunto cerrado contenido en $W - K_{j-2}$ y una W_α .

Por construcción, la cubierta $\{\tilde{W}_i\}$ es localmente finita y para cada j solamente un número finito de funciones η_i son distintas de cero en K_j . Por lo tanto, como todo punto en W pertenece al interior de algún K_j , la suma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j$$

es de hecho finita en una vecindad de todo punto de W . Además, al menos un término es distinto de cero en cualquier punto de W . Entonces

$$G_i = \frac{\eta_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j}$$

es una función suave bien definida. Tomando $U_i = \tilde{W}_i \cap X$ obtenemos la subcubierta localmente finita de V_α deseada y si hacemos g_i la restricción de G_i a X , entonces obtenemos la partición de la unidad deseada. $\square$

Teorema 2.14 (de la Construcción con Parches). *Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable con un atlas $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ donde $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ es una carta. Sea $\bar{v}_\alpha$ un campo vectorial C^∞ definido en U'_α para cada α y asumamos que existe una partición de la unidad $\{g_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$. Sea $\bar{v}$ definido por*

$$\bar{v}(p) = \sum_{\alpha} g_\alpha h_\alpha^* \bar{v}_\alpha(p), \quad p \in M$$

entonces $\bar{v}$ es un campo vectorial C^∞ en M .

Demostración. Por el Teorema 2.13-2 podemos suponer que el atlas $\{U_\alpha\}$ es localmente finito (si no, tomamos un refinamiento que si lo sea), por lo tanto, la suma en cada punto p es una suma finita y entonces $\bar{v}(p)$ es un vector tangente a p para toda $x \in M$. Tenemos que $\bar{v}$ es suave ya que en la coordenadas locales dadas por la carta (U_β, h_β) $\bar{v}$ esta dada por $\sum_{\alpha} (g_\alpha \circ h_\alpha^{-1}) \bar{v}_\alpha$, donde la suma se toma sobre todos los índices α tales que $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$, como $\{U_\alpha\}$ es localmente finita, el número de dichos índices es finito. $\square$

2.5.1. Campos vectoriales y curvas integrales

Definición 19. Sea v un campo vectorial diferenciable en M y $x \in M$. Una **curva intgral** de v es una curva diferenciable $p: (a, b) \rightarrow M$ tal que $p'(t) = v(p(t))$ para toda $t \in (a, b)$. Usualmente suponemos que el intervalo abierto (a, b) contiene a 0. En este caso, si $p(0) = x$, decimos que p es una curva integral de v **que empieza en x** , y llamamos a x el **punto inicial de p** . Para mostrar la dependencia del punto inicial x de dicha curva integral escribiremos $p(t) = H_t(x)$. An integral curve is **maximal** if its domain cannot be extended to a larger interval.

Teorema 2.15 ([5, (8.10)]). Sea v un campo vectorial diferenciable en M . Sea U un conjunto abierto en M . Para cada $x \in U$ existe una vecindad W de x en M , un número $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable

$$H: (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow U$$

$$(t, x) \mapsto H_t(x)$$

tal que para cada $x \in W$ la función $H_t(x)$ es una curva integral de v que empieza en x , es decir, tenemos $H_0(x) = x$ and $\frac{d}{dt}H_t(x) = v(H_t(x))$. Además, satisface $H_t(H_s(x)) = H_{t+s}(x)$ cuando ambos lados de la igualdad están definidos.

Definición 20. La aplicación $H: (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow U$ dada en el Teorema 2.15 es llamada un **flujo local generado por v** alrededor del punto x en la vecindad U . En la Figura 2.6 se ilustra un campo vectorial y el flujo generado. Si un flujo local está definido en $\mathbb{R} \times M$ entonces es llamado un **flujo global**. Un campo vectorial que tiene un fluo global es llamado un **campo vectorial completo**.

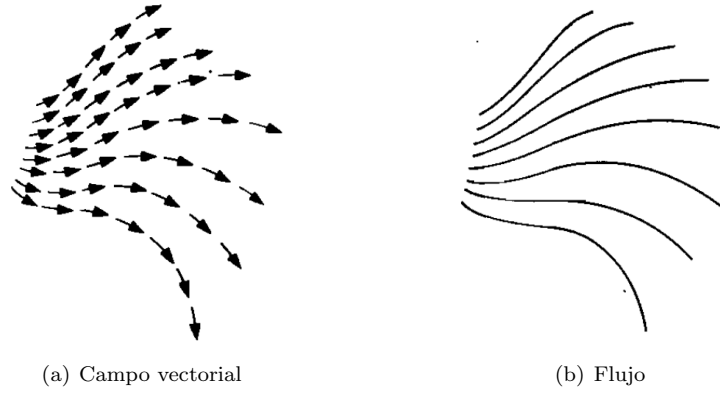


Figura 2.6: Flujo generado por un campo vectorial

Si v es un campo vectorial completo, entonces para toda $t \in \mathbb{R}$

$$H_t \circ H_{-t} = H_{-t} \circ H_t = \text{Id}_M,$$

por lo tanto $H_t: M \rightarrow M$ es un difeomorfismo. Entonces, un campo vectorial completo da lugar a un **grupo de difeomorfismos a un-parámetro de M** , es decir, a un homomorfismo de grupos

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{Diff}(M)$$

$$t \mapsto H_t$$

donde $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano de los números reales con la adición, y $\text{Diff}(M)$ es el grupo de difeomorfismos de M en sí misma.

Teorema 2.16 ([5, (8.10)]). Sea v un campo vectorial diferenciable sobre una variedad diferenciable compacta M . Entonces v es un campo vectorial completo.

2.6. Hazes Fibrados

Ahora veremos la definición de haz fibrado y el Teorema de Fibración de Ehresmann. Para más detalles ver por ejemplo [1, §3.4 and §5.5].

Definición 21. Un **haz fibrado diferenciable** (E, π, B, F) consiste de lo siguiente:

1. Una variedad diferenciable E llamada **espacio total**.
2. Una variedad diferenciable B llamada **espacio base**.
3. Una aplicación diferenciable suprayectiva $\pi: E \rightarrow B$ la cual es una submersión, llamada la **proyección del haz fibrado**.
4. Una variedad diferenciable F llamada la **fibra**.
5. Existe una colección $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, llamada **cubierta trivializadora**, donde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ is an open cover of B and for every $\alpha \in A$,

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$$

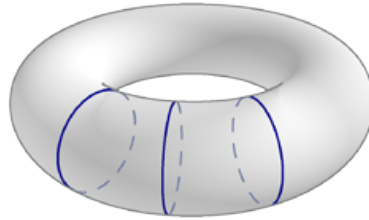
es un difeomorfismo tal que $\pi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, f) = x$ para todo $(x, f) \in U_\alpha \times F$; es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\quad \quad} & U_\alpha \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{projection} \\ & U_\alpha & \end{array}$$

Por esta propiedad, decimos que la proyección π es **localmente trivial**.

Ejemplo 22. Sean B y F variedades diferenciables y consideremos la proyección sobre el primer factor $\pi: B \times F \rightarrow B$. Claramente es un haz fibrado con fibra F , el cual es llamado el **haz producto**.

Recordemos del Ejemplo 12 que el toro es el producto $S^1 \times S^1$ y tomando la proyección sobre el primer factor obtenemos un haz fibrado producto cuya fibra es el círculo S^1 . La proyección se puede pensar como la proyección normal sobre una longitud, y las diferentes fibras son los meridianos.



Ejemplo 23. Los siguientes son haces fibrados con fibra un intervalo cerrado. El cilindro junto con la proyección sobre el círculo (see Figure 2.7(a)).

La Banda de Möbius junto con la proyección sobre el círculo central. (see Figure 2.7(b)).

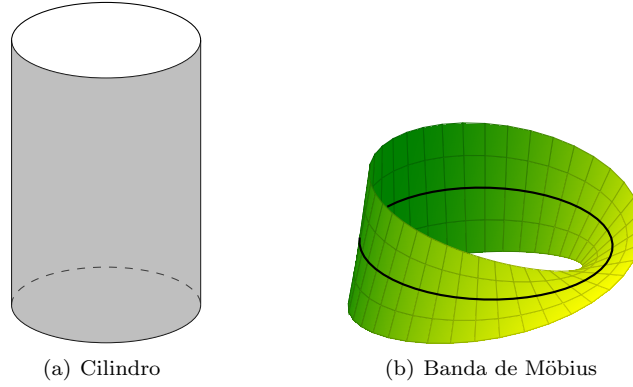


Figura 2.7: Haces fibrados

Ejemplo 24. Los **haces vectoriales** son ejemplos de haces fibrados. Un **haz vectorial** real (complejo) de rango n es un haz fibrado cuya fibra F es un espacio vectorial real (complejo) de dimensión n . Ejemplos de haces vectoriales son los siguientes:

- El cilindro abierto (sin frontera) junto con la proyección sobre el círculo.
- La Banda de Möbius sin frontera junto con la proyección sobre el círculo central.
- El haz tangente de una variedad diferenciable M en $\mathbb{R}^m$. Su espacio total está dado por

$$TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^m \mid x \in M, v \in T_x M\},$$

y la proyección $\pi: TM \rightarrow M$ está dada por la restricción de la proyección sobre el primer factor.

De hecho, en el Ejemplo 15 vimos que el cilindro abierto es el haz tangente del círculo.

Ejemplo 25. Una vez que hemos visto el haz tangente $T(M)$ a una variedad diferenciable M , también podemos definir el haz normal de M ; para cada $x \in M$ definimos el **espacio normal** de M en x , $N_x M$, como el complemento ortogonal de $T_x M$ en $\mathbb{R}^m$; entonces, el **haz normal** $N(M)$ está definido por

$$N(M) = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^m \mid v \in N_x M\}.$$

El haz normal es un haz vectorial.

El siguiente teorema nos da condiciones para que una aplicación diferenciable entre dos variedades sea un haz fibrado. Para enunciarlo necesitamos la siguiente definición.

Definición 22. Una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables M y N es **propia** si para todo subconjunto compacto K de N , la imagen inversa $f^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de M .

Teorema 2.17 (de Fibración de Ehresmann). Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones k y l respectivamente. Sea $f: M \rightarrow N$ una submersión propia. Entonces f es un haz fibrado.

Demostración. Como f es una submersión tenemos que $k \leq l$. Necesitamos probar que f es localmente trivial, es decir, tenemos que demostrar que si $p \in N$ y $F = f^{-1}(p)$ es la fibra de p , entonces existe una vecindad U de p en N y un difeomorfismo

$$\varphi: U \times F \rightarrow f^{-1}(U)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow f|_{f^{-1}(U)} \\ & U & \end{array}$$

La afirmación es local relativa a N , por lo que podemos reemplazar a M , N y f por $f^{-1}(U)$, U y la restricción de f a $f^{-1}(U)$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad supongamos que $p = 0$ y $N = D^l$ un disco abierto en $\mathbb{R}^l$ centrado en cero. En este caso tenemos los campos vectoriales básicos $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_l}$ y podemos levantarlos a M obteniendo campos vectoriales $v_i, \dots, v_l$ en M tales que para toda $x \in M$

$$Df_x(v_i(x)) = \frac{\partial}{\partial y_i}. \quad (2.6)$$

Localmente en una vecindad de un punto $x \in M$ dichos campos son fáciles de encontrar, por el Teorema 2.6 una carta V_α de x tal que f en dichas coordenadas está dada por la submersión canónica

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l).$$

Definimos $\bar{v}_{i,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, donde $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ son los campos vectoriales básicos en V_α . Claramente este campo satisface (2.6). Cubriendo a M con dichas cartas escogemos una partición de la unidad subordinada a esta cubierta y usando el Teorema 2.14 pegamos los campos $\bar{v}_{i,\alpha}$ para obtener campos v_i ($i = 1, \dots, l$) que satisfacen (2.6).

Por el Teorema 2.15, los campos vectoriales v_i determinan flujos H^i en M . Definimos

$$\begin{aligned} \varphi: U \times F &\rightarrow f^{-1}(U) \\ \varphi(u, x) &= H_{u_1}^1 \circ \dots \circ H_{u_n}^l(x) \end{aligned}$$

para $x \in F$ y $u = (u_1, \dots, u_l) \in D^l$.

Tal vez no es inmediatamente claro que la aplicación $\varphi(u, x)$ definida de esta manera existe para toda $u \in D^l$, pero de cualquier forma, mientras el flujo local exista tenemos que

$$u = \text{pr}_1(u, x) = f \circ \varphi(u, x)$$

ya que

$$f \circ H_{u_i}^i(x) = f \circ H_0^i(x) + u_i e_i$$

donde $e_i \in D^l$ es el i -ésimo vector unitario. Es decir, la ecuación se cumple para $u_i = 0$ y la correspondencia de las derivadas de acuerdo a u_i se tiene por que v_i levanta al campo $\frac{\partial}{\partial y_i}$.

Entonces se sigue que todos los flujos en la definición de φ existen por que para $\|u\| \leq k$ las líneas de flujo permanecen dentro del conjunto compacto

$$f^{-1}\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq k\}.$$

Aquí usamos la hipótesis de que f es propia.

Finalmente obtenemos la aplicación inversa

$$\varphi^{-1}: M \rightarrow U \times F$$

definiendo $f(y) = u$ y

$$\varphi^{-1}(y) = (u, H_{-u_n}^l \circ \cdots \circ H_{-u_1}^1(y)).$$

□

La hipótesis de que f es propia es esencial, si por ejemplo, quitamos un punto de M , la restricción de f sigue siendo una submersión pero no es un haz fibrado.

El Teorema de Fibración de Ehresmann se puede generalizar para variedades con frontera. Véase [1, Theorem 5.5.14] o [28, §2] para los detalles de la prueba.

Teorema 2.18 (Teorema de fibración de Ehresmann para variedades con frontera). *Sea M una variedad diferenciable con frontera, sea N una variedad compacta sin frontera y $f: M \rightarrow N$ una aplicación propia suprayectiva. Si $f|_{\overset{\circ}{M}}: \overset{\circ}{M} \rightarrow N$ y $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow N$ son submersiones, entonces f es un haz fibrado localmente trivial.*

En el Teorema 2.18 la frontera de M puede ser vacía, en este caso obtenemos el Teorema de Fibración de Ehresmann clásico.

El Teorema 2.18 se usará para probar el Teorema de Fibración de Milnor-Lê (Theorem 4.2) en la Sección 4.

Definición 23. Dos haces fibrados (E, π, B, F) y (E', π', B, F') con el mismo espacio base B son **equivalentes** si existe un difeomorfismo $\Theta: E \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Theta} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array}$$

Note que si dos haces fibrados son equivalentes tienen fibras difeomorfas.

2.7. Variedades algebraicas

Sea $\mathbb{F}$ igual a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sea $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

con las $f_i: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$, $i = 1, \dots, m$ polinomios.

La **variedad algebraica** $V(f) = V(f_1, \dots, f_m)$ está definida por $V(f) = f^{-1}(0, \dots, 0)$, es decir, por todos los puntos en $\mathbb{F}^n$ que anulan a **todas** las f_i . Si $V(f)$ está definida por una sola ecuación, decimos que $V(f)$ es una **hiper-superficie**.

Un punto $\mathbf{x} \in V(f)$ es un **punto singular** o una **singularidad** de $V(f)$ si es un **punto crítico** de f . Denotamos por $\Sigma(V)$ al conjunto de todos los puntos singulares de V .

Lema 2.19. *El conjunto $\Sigma(V)$ de los puntos singulares de V forman un subconjunto algebraico propio (posiblemente vacío) de V .*

Teorema 2.20 ([26, Th. 1]). *Sea $\mathbb{F}$ igual a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sea $V = V(f)$ la variedad algebraica definida por $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, entonces, el conjunto $V - \Sigma(V)$ de los puntos no-singulares de V forman una variedad diferenciable no vacía. De hecho, esta variedad es analítica real (o compleja, según sea el caso) y tiene dimensión $n - m$ sobre $\mathbb{F}$.*

Capítulo 3

Topología de singularidades

3.1. Ejemplo modelo: singularidades de Brieskorn-Pham.

En esta sección presentaremos el caso particular de los polinomios de Brieskorn-Pham, estudiados por Pham en [22] y por Brieskorn en [3], donde podremos ver de manera elemental todas las propiedades que veremos más adelante de las singularidades complejas aisladas.

Definición 24. Un *polinomio de Brieskorn-Pham* es un polinomio $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma:

$$z_0^{a_0} + \dots + z_n^{a_n}, \quad a_i \geq 2. \quad (3.1)$$

Un cálculo simple muestra que el origen $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{n+1}$ es su único punto crítico, por lo tanto $V := f^{-1}(0)$ es una hipersuperficie compleja con una singularidad aislada en $\mathbf{0}$. Sea d el mínimo común múltiplo de los a_i y para cada $i = 0, \dots, n$ sea $d_i = d/a_i$. Entonces tenemos una acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ determinada para cada número complejo no cero $\lambda \in \mathbb{C}^*$ por

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) \mapsto (\lambda^{d_0} z_0, \dots, \lambda^{d_n} z_n), \quad (3.2)$$

Observemos que se cumple que:

$$f(\lambda^{d_0} z_0, \dots, \lambda^{d_n} z_n) = \lambda^d f(z_0, \dots, z_n) \quad (3.3)$$

por lo tanto f es *casi-homogénea* (ver la Definición 25 abajo). Esta acción de $\mathbb{C}^*$ tiene a $\mathbf{0}$ como su único punto fijo y V es un conjunto invariante, unión de $\mathbb{C}^*$ -órbitas. Tenemos las siguientes propiedades:

Property 1 (Estructura cónica). Sean $X \subset \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathbb{R}^k$ con $x_0 \notin X$, entonces el **cono** de X , $\text{Cono } X$ es la unión de todos los segmentos



$$tx + (1 - t)x_0 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \forall x \in X.$$

Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos, es decir, $A \subset X$. Decimos que la pareja (X, A) es homeomorfa a la pareja (Y, B) , denotado por $(X, A) \cong (Y, B)$, si $X \cong Y$ y $A \cong B$. Definimos el **cono** de la pareja (X, A) como:

$$\text{Cono}(X, A) = (\text{Cono } X, \text{Cono } A).$$

pues claramente $\text{Cono } A \subset \text{Cono } X$.

Restringiendo la acción (3.2) a los números reales positivos $t \in \mathbb{R}^+$, obtenemos un flujo (mostrado esquemáticamente en la Figura 3.1) tal que:

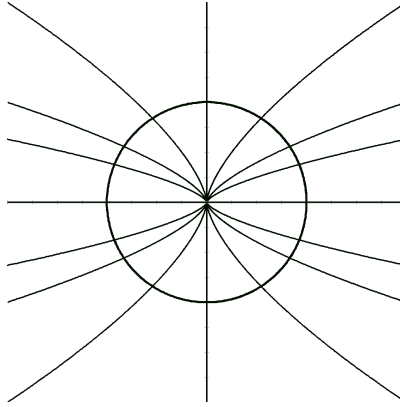


Figura 3.1: Acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$

- cada órbita converge a $\underline{0}$ cuando t tiende a 0, y va a infinito cuando t tiende a ∞ ;
- cada órbita es transversal a todas las esferas centradas en $\underline{0}$. Por lo tanto V intersecta transversalmente a toda $(2n+1)$ -sphere $\mathbb{S}_r$ centrada en $\underline{0}$, por lo tanto $K_r := V \cap \mathbb{S}_r$ es una subvariedad diferenciable real de codimensión 2 de $\mathbb{S}_r$;
- Dadas esferas arbitrarias $\mathbb{S}_r, \mathbb{S}_{r'}$ centradas en $\underline{0}$, el flujo da un difeomorfismo de $\mathbb{S}_r$ en $\mathbb{S}_{r'}$ que lleva a K_r en $K_{r'}$. Además, el flujo determina un subgrupo a 1-parametro de difeomorfismos que muestra a la pareja $(\mathbb{C}^{n+1}, V)$ como el cono sobre $(\mathbb{S}_r, K_r)$. Denotamos a la variedad K_r por L_f y la llamamos **la aureola** de la singularidad (see [16]).

Property 2 (Argumento constante). Sea $z \in \mathbb{C}^*$ expresado en su forma polar $z = \nu e^{i\theta}$. Recordemos que el número real $\theta \in (-\pi, \pi]$ es llamado el **argumento principal** de z , y dos números complejos $z, z' \in \mathbb{C}^*$ tienen el mismo argumento principal si y sólo si $f(z)/|f(z)| = f(z')/|f(z')|$. El argumento principal del número complejo $f(z)$ es constante en cada órbita de la acción de $\mathbb{R}^+$, es decir para toda $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{f(t \cdot z)}{|f(t \cdot z)|} = \frac{t^d f(z)}{|t^d f(z)|} = \frac{t^d f(z)}{|t^d| |f(z)|} = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Property 3 (Fibración en tubos). ■ Por (3.3), multiplicación por $e^{i\theta}$ en $\mathbb{C}^n$ transporta a cada fibra $f^{-1}(\zeta)$ en la fibra $f^{-1}(e^{i\theta d} \cdot \zeta)$. Por lo tanto $\mathbb{S}^1$ actúa en cada *tubo* $N(\delta) := f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta)$, mandando fibras de f en fibras de f , donde $\partial\mathbb{D}_\delta \cong \mathbb{S}^1$ es la frontera del disco en $\mathbb{C}$ de radio $\delta > 0$ centrado en 0. Un cálculo directo muestra que las órbitas de esta acción son transversales a las fibras de f . Por lo tanto, tenemos un haz fibrado diferenciable:

$$f: N(\delta) \rightarrow \partial\mathbb{D}_\delta. \quad (3.4)$$

- La restricción de la acción de $\mathbb{C}^*$ a $\mathbb{S}^1$ deja invariante cada esfera centrada en $\underline{0}$.
- Por la Propiedad 1 V es transversal a la esfera unitaria $\mathbb{S}^{2n+1}$ y como cada punto en $V \setminus \{0\}$ es regular, cada fibra $f^{-1}(t)$ con $|t|$ suficientemente pequeño es también transversal a $\mathbb{S}^{2n+1}$.
- Por lo tanto, si definimos $N(1, \delta) := N(\delta) \cap \mathbb{B}^{2n+2}$, donde 1 significa que la bola $\mathbb{B}^{2n+2}$ tiene radio 1, tenemos que el haz fibrado (3.4) determina un haz fibrado :

$$f: N(1, \delta) \rightarrow \partial\mathbb{D}_\delta \cong \mathbb{S}^1. \quad (3.5)$$

Esta es la segunda versión clásica de la fibración de Milnor para f , conocida como **fibración de Milnor-Lê**.

Property 4 (Fibración en la bola). Observemos que para cada línea $\mathcal{L}_\theta$ que pasa por el origen en $\mathbb{C}$, podemos considerar el conjunto

$$X_\theta := \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) \in \mathcal{L}_\theta\}.$$

Cada X_θ es una hipersuperficie analítica real con una singularidad aislada en $\underline{0}$, su unión llena a todo $\mathbb{C}^{n+1}$ y su intersección es V . Por la Propiedad 2, las órbitas de la acción de $\mathbb{R}^+$ están contenidas en las X_θ 's. Por la Propiedad 1, cada X_θ es transversal a todas las esferas, y por la Propiedad 3, la acción de $\mathbb{S}^1$ permuta estas hipersuperficies. Por lo tanto, tenemos que estas variedades definen una familia en $\mathbb{C}^{n+1}$, y la parte no singular de cada una de estas variedades es transversal a cada esfera centrada en $\underline{0}$. Si removemos a V de $\mathbb{C}^n$, para cada bola centrada en $\underline{0}$ obtenemos un haz fibrado

$$\varphi = \frac{f}{|f|}: \mathbb{B}^{2n} \setminus V \longrightarrow \mathbb{S}^1. \quad (3.6)$$

La fibra sobre un punto $e^{i\theta}$ es una componente conexa de $X_\theta \setminus V$. La otra componente conexa es $f^{-1}(e^{-i\theta})$.

Property 5 (Fibration en la esfera). Ahora nos restringiremos a la bola unitaria $\mathbb{B}^{2n+2}$ en $\mathbb{C}^{n+1}$. Como cada X_θ intersecta transversalmente a la esfera $\mathbb{S}^{2n+1} = \partial\mathbb{B}^{2n+2}$, la intersección es una subvariedad de codimensión 1 de la esfera, que contiene a la aureola $L_f = V \cap \mathbb{S}^{2n+1}$. Como las órbitas de la acción de $\mathbb{S}^1$ preservan a la esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$, la restricción de φ a $\mathbb{S}^{2n+1}$ define la **Fibración de Milnor** clásica:

$$\varphi = \frac{f}{|f|}: \mathbb{S}^{2n+1} \setminus L_f \longrightarrow \mathbb{S}^1. \quad (3.7)$$

Property 6 (Equivalencia de fibraciones). Cada órbita de la acción de $\mathbb{R}^+$ es transversal en todas partes al tubo $N(\delta)$, por la Propiedad 1 es transversal a la esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$, y por la Propiedad 2, los números complejos $f(z)$ tienen argumento constante a lo largo de cada órbita. por lo tanto, las líneas integrales de esta acción determinan un difeomorfismo entre $N(1, d)$ y $\mathbb{S}^{2n+1}$ menos la parte de la esfera contenida dentro del tubo sólido abierto $f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta)$. esto determina la equivalencia clásica entre la fibración de Milnor en la esfera (3.7) y la fibración de Milnor-Lê en el tubo (3.5).

3.1.1. Singularidades casi-homogeneas

Todo lo que hemos dicho para los polinomios de Brieskorn-Pham funciona exactamente igual cuando V está definida por la siguiente clase de polinomios.

Definición 25. Un polinomio complejo $f: (\mathbb{C}^{n+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es *casi-homogeneo* de tipo $\{d; d_0, \dots, d_n\}$, donde d y d_i son enteros positivos, si existe una acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^n$ de la forma

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\lambda^{d_0} z_0, \dots, \lambda^{d_n} z_n),$$

tal que para toda $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y toda $z \in \mathbb{C}^n$ se tiene:

$$f(\lambda \cdot z) = \lambda^d \cdot f(z).$$

Estas singularidades cumplen Propiedades 1 a 6.

Si V es el conjunto de ceros de la aplicación analítica $f: (\mathbb{C}^{n+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con un punto crítico aislado en $\underline{0}$, satisface las Propiedades 1 a 6, pero en lugar de tener una acción de $\mathbb{C}^*$, existen campos vectoriales apropiados cuyos flujos tienen las propiedades deseadas.

3.2. Estructura cónica y aureola

Definición 26. Sea $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un polinomio. El **conjunto de ceros** de f , dado por $V = f^{-1}(0)$, es la **hipersuperficie definida por f** . Las **singularidades** de V son los puntos críticos de f contenidos en V . Un punto $x \in V$ es una **singularidad aislada** si es un punto crítico aislado de f .

Sea $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un polinomio con $0 \in \mathbb{C}^n$ un *punto crítico aislado*, i. e., existe una vecindad U de $0 \in \mathbb{C}$, donde 0 es el único punto crítico de f . Sea $V = f^{-1}(0)$. Aplicando el Teorema 2.7 a la restricción de f a $U \setminus \{0\}$ tenemos que $V \setminus \{0\}$ es una variedad diferenciable de codimensión real 2.

Sea $\mathbb{B}_\varepsilon$ una bola cerrada en $\mathbb{C}^n$ centrada en 0 de radio $\varepsilon > 0$ y sea $\mathbb{S}_\varepsilon = \partial\mathbb{B}_\varepsilon$. Milnor probó [16, Corollary 2.9] que para toda ε suficientemente pequeña, la esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ intersecta a $V \setminus \{0\}$ transversalmente, y por el Corolario 2.11 la intersección $K_\varepsilon := V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ es una variedad diferenciable de dimensión real $2n - 3$ encajada en la esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$. Milnor también probó que en dicha bola de radio suficientemente pequeño ε , V tiene una estructura cónica dada por el Teorema 3.1. Recordemos que el **cono** de un espacio topológico X se obtiene de $X \times [0, 1]$ al colapsar $X \times \{0\}$ a un punto. Denotamos al cono de X por $\text{Cone } X$.

Teorema 3.1 ([16, Theorem 2.10]). *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, la intersección de V con $\mathbb{B}_\varepsilon$ es homeomorfa a $\text{Cone } K_\varepsilon$. De hecho, la pareja $(\mathbb{B}_\varepsilon, V \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ es homeomorfa a la pareja $(\text{Cone } \mathbb{S}_\varepsilon, \text{Cone } K_\varepsilon)$.*

Idea. El flujo del campo vectorial radial en $\mathbb{B}_\varepsilon$ da un homeomorfismo entre $\text{Cone } \mathbb{S}_\varepsilon$ y $\mathbb{B}_\varepsilon$ como sigue. Sea w el campo vectorial radial que apunta hacia afuera en $\mathbb{C}^n$ dado por $w(z) = z$ para toda $z \in \mathbb{C}^n$. Es fácil ver que las curvas integrales de w están dadas por $p(t) = tz$, con t una variable real (ver Definición 19). Para toda $z \in \mathbb{S}_\varepsilon$ la curva integral que pasa por z está determinada por la condición inicial $p(1) = z$. Se puede ver que el flujo generado por w está dado por $H_t(z) = tz$ y que está definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, por lo tanto w es completo. Entonces, la restricción del flujo

$$\begin{aligned} H: (0, 1] \times \mathbb{S}_\varepsilon &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (t, z) &\mapsto H_t(z), \end{aligned}$$

manda difeomorfamente al producto $(0, 1] \times \mathbb{S}_\varepsilon$ a la bola sin el origen $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \{0\}$. Como $H_t(z)$ tiende uniformemente a $0 \in \mathbb{C}^n$ cuando t tiende a 0, este difeomorfismo se extiende a un homeomorfismo de $\text{Cone } \mathbb{S}_\varepsilon$ a $\mathbb{B}_\varepsilon$. La idea es modificar este campo vectorial radial de tal manera que en los puntos en $V \setminus \{0\}$ sea tangente a $V \setminus \{0\}$. De esta manera, la curva integral que pasa por un punto en $V \setminus \{0\}$ está contenida en $V \setminus \{0\}$, por lo tanto, el homeomorfismo dado por su flujo se restringe a un homeomorfismo entre $\text{Cone } K_\varepsilon$ y $V \cap \mathbb{B}_\varepsilon$. $\square$

Definición 27. Del Teorema 3.1 se sigue que para toda ε' con $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ las parejas de variedades $(\mathbb{S}_{\varepsilon'}, K_{\varepsilon'})$ y $(\mathbb{S}_\varepsilon, K_\varepsilon)$ son homeomorfas. Por lo tanto, la clase de homeomorfismo de la pareja $(\mathbb{S}_\varepsilon, K_\varepsilon)$ es independiente del radio de la esfera, y lo llamamos la **aureola encajada de f** . También llamamos al tipo de homeomorfismo de K_ε la **aureola abstracta de f** y lo denotamos por K . A una esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ que satisface el Teorema 3.1 es llamada una **esfera de Milnor**.

Cuando V es el conjunto de ceros de un polinomio $f: (\mathbb{C}^{n+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con una singularidad aislada en el origen $\underline{0}$, su aureola es una variedad real analítica cerrada y orientada de dimensión $2n - 1$.

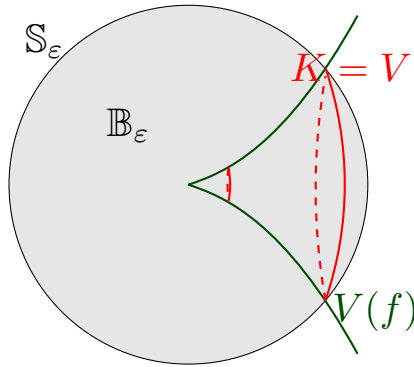


Figura 3.2: Aureola de f en 0

Definición 28. Sea $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y $g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ polinomios con un punto crítico aislado en 0 . Sean $V_f = f^{-1}(0)$ y $V_g = g^{-1}(0)$ respectivamente,

las hipersuperficies definidas por f y g . Decimos que f y g son **R -equivalentes** si existe un homeomorfismo $\Psi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $f = g \circ \Psi$; si sólo tenemos que $\Psi(V_f) = V_g$ entonces decimos que f y g **tienen el mismo tipo topológico**.

Por el Teorema 3.1 si dos polinomios f y g tienen la misma aureola encajada, entonces tienen el mismo tipo topológico. Por lo tanto, la aureola encajada $(S_\varepsilon, K_\varepsilon)$ y la aureola abstracta K son invariantes del tipo topológico de la singularidad.

3.2.1. Aureolas de curvas

Las **curvas planas** son hipersuperficies complejas en $\mathbb{C}^2$. Queremos estudiar cómo son sus aureolas.

Por ejemplo, consideremos el polinomio

$$f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q \quad p, q \in \mathbb{N}, p > 1, q > 1, (p, q) = 1.$$

Su diferencial esta dada por:

$$Df_{(z_1, z_2)} = (pz_1^{p-1}, qz_2^{q-1}),$$

entonces, el **único punto singular** de $V(f) = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^p + z_2^q = 0 \}$ es el origen $(0, 0)$.

Veamos que la aureola K es un **nudo** en la esfera S_ε^3 de un tipo especial llamado **nudo tórico** de tipo (p, q) .

Nudos

Un subconjunto $K \subset S^3$ es un **nudo** si existe un **homeomorfismo** del círculo unitario S^1 en S^3 cuya imagen es K , donde S^1 es el círculo unitario.

En la Figura 3.3 se muestran el **nudo trivial**, el **nudo trébol** y el **nudo 8**.

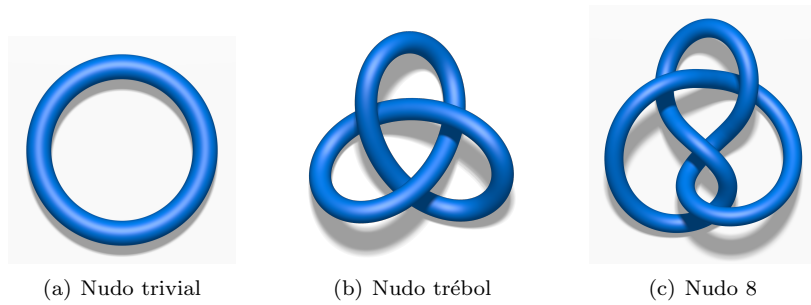


Figura 3.3: Algunos nudos

En la Figura 3.4 se muestra una tabla de nudos hasta con 9 cruces.

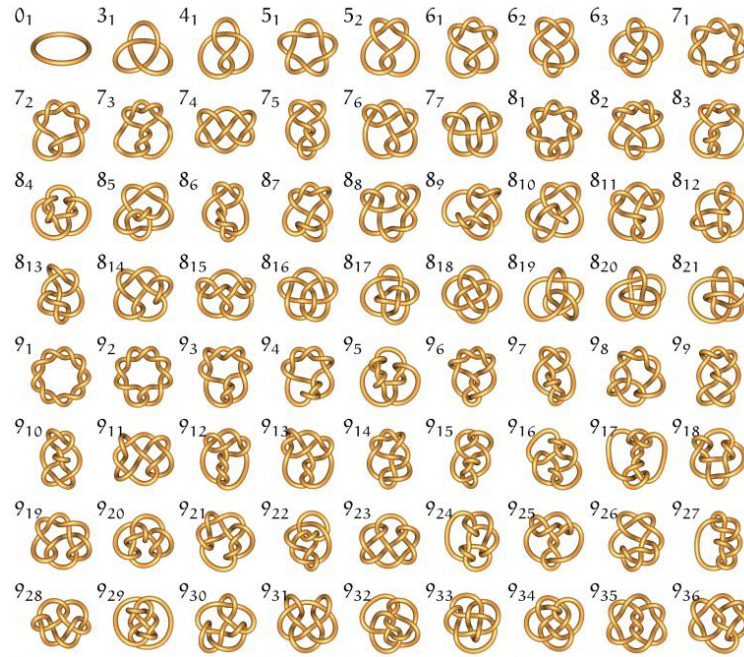


Figura 3.4: Tabla de nudos

Enlaces

Los enlaces son una generalización de los nudos en la que podemos tener mas de una cuerda.

Un **enlace** es una colección ordenada finita de nudos que no se intersectan entre sí. Cada nudo K_i se dice que es una **componente** del enlace.

En la Figura 3.5 se muestran el **enlace trivial**, el **enlace de Hopf** y los **anillos de Borromeo**.

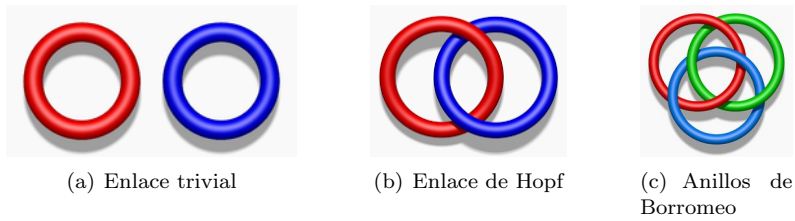


Figura 3.5: Algunos enlaces

En la Figura 3.6 se muestra una tabla de enlaces hasta 8 cruces.

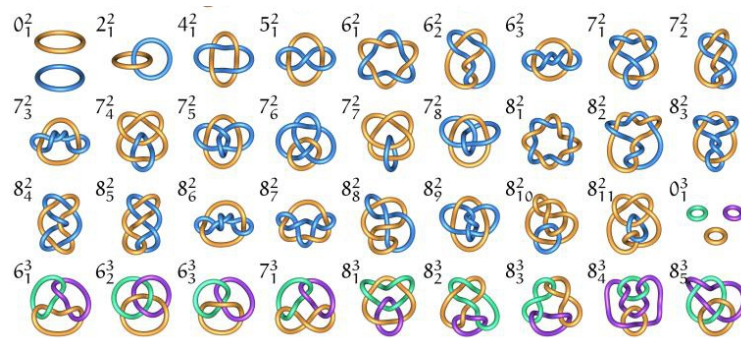


Figura 3.6: Tabla de enlaces

Nudos y enlaces tóricos

El **toro** T , intuitivamente, es el espacio dado por la superficie de una dona, mostrado en la Figura 3.7.

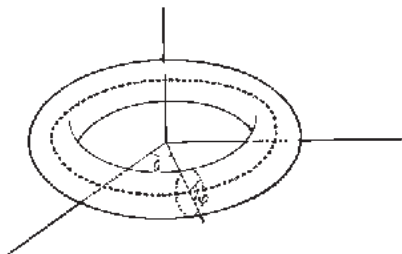


Figura 3.7: Toro

Matemáticamente, un toro se puede ver de diferentes maneras.

Como subespacio de $\mathbb{R}^3$, el toro está definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{(x^2 + y^2)} - 2)^2 + z^2 = 1\},$$

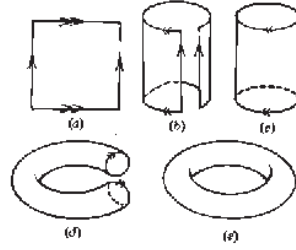


Como espacio producto: Considérese al círculo unitario en el plano complejo $\mathbb{C}$, es decir el conjunto de puntos dado por

$$S^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Entonces el toro es el espacio $S^1 \times S^1$.

Como espacio cociente: Sea X el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Entonces el toro T se obtiene identificando los lados del cuadrado como lo indican las flechas en la figura



Sean p y q primos relativos. Un **nudo tórico** de tipo (p, q) , denotado $K_{p,q}$, es un nudo que yace sobre la superficie de un toro y le da p vueltas en una dirección (longitudinal) y q vueltas en la otra (meridional). Si p y q no son primos relativos, entonces tenemos un **enlace tórico** con $\text{mcd}(p, q)$ componentes.

Está dado por

$$K_{p,q} = \{(e^{ipt}, e^{iqt}) \in S^1 \times S^1 \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

El homeomorfismo está dado por:

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow S^1 \times S^1 \\ e^{it} &\mapsto (e^{ipt}, e^{iqt}). \end{aligned}$$

La Figura 3.8 muestra que el **nudo trébol** es un **nudo tórico** $K(2, 3)$.

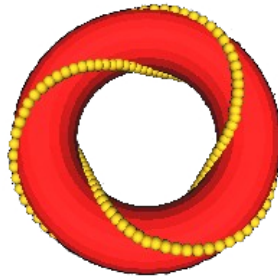


Figura 3.8: Nudo trébol

En la Figura 3.9 se muestra una tabla de nudos y enlaces tóricos.

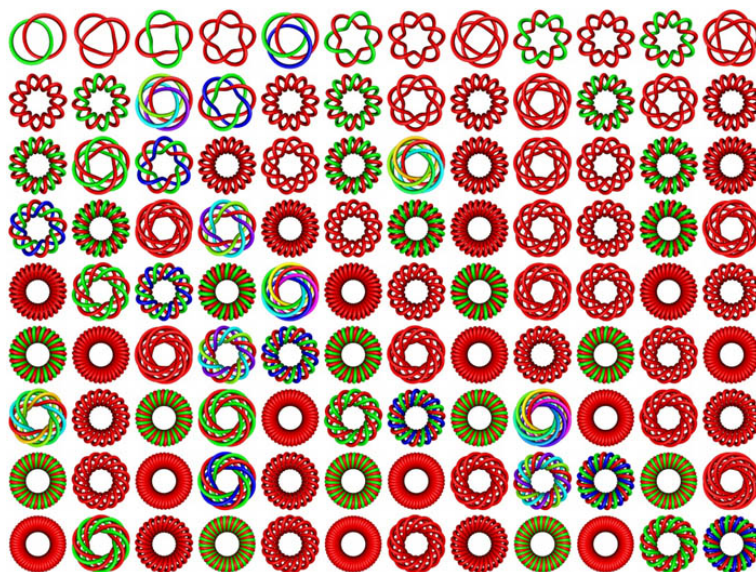
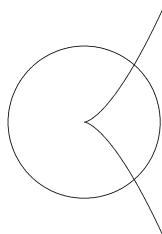


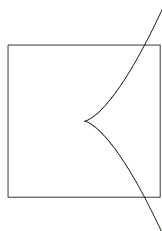
Figura 3.9: Tabla de nudos tóricos

La aureola de $z_1^p + z_2^q$

Sea $f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p > 1, q > 1$ y $(p, q) = 1$. Sea $V(f)$ la curva plana definida por f y sea K su aureola. Para ver que K es un nudo tórico, identificamos a la bola B_ϵ

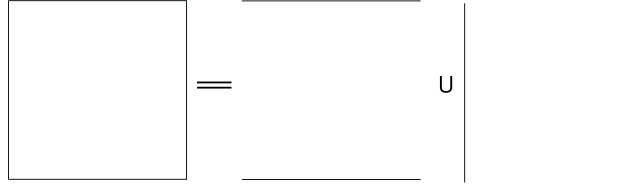


con el polidisco $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$



Por lo tanto

$$S_\epsilon^3 \cong \partial D = \{|z_1| \leq 1\} \times \{|z_2| = 1\} \cup \{|z_1| = 1\} \times \{|z_2| \leq 1\}$$



Para determinar K , basta encontrar $V \cap \partial D$.

Si $(z_1, z_2) \in V$ entonces $|z_1|^p = |z_2|^q$ por lo tanto $|z_1| = 1$ si y sólo si $|z_2| = 1$.
Entonces $K \subset S^1 \times S^1 = T$

Tenemos que

$$K = \{(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in S^1 \times S^1 \mid e^{ip\alpha} = e^{iq\beta}\}.$$

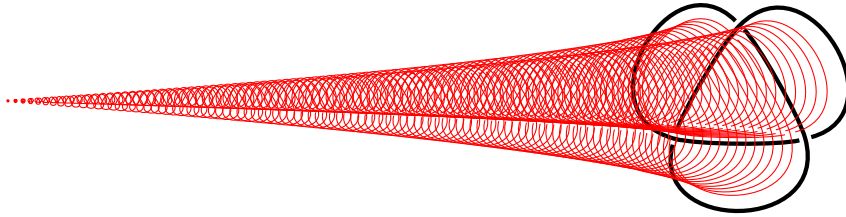
Si definimos

$$\begin{aligned} \phi: S^1 &\rightarrow K \\ e^{\frac{it}{pq}} &\mapsto (e^{\frac{it}{p}}, e^{\frac{it}{q}}) \end{aligned}$$

entonces ϕ es un homeomorfismo y por lo tanto K es un nudo tórico.

Además es de tipo (p, q) pues al correr t de 0 a $2pq\pi$, K da q vueltas alrededor de la primera coordenada y p vueltas alrededor de la segunda.

Ejemplo 26. Por ejemplo, una vecindad de la singularidad $z_1^2 + z_2^3 = 0$ es el cono sobre el nudo trébol (Figura 3.3(b)), que esquemáticamente se ve así, pues en realidad está en $\mathbb{C}^2$.



En general, dada una curva plana $V(f)$ definida por el polinomio f , su aureola es un nudo tórico, o un **nudo o enlace tórico iterado**, también llamando **nudo o enlace cable** [4, §8.3 Theorem 12]. No pueden ser **nudos hiperbólicos**, por ejemplo, el nudo 8 (Figura 3.3(c)).

3.2.2. Aureolas de superficies

El caso $n = 2$ se remonta a Felix Klein en [11] donde estudia las superficies complejas obtenidas como cocientes de $\mathbb{C}^2$ por un grupo finito. Su trabajo implica que toda variedad de la forma S^3/Γ donde Γ es un subgrupo finito de $SU(2)$ es la aureola de una superficie compleja en $\mathbb{C}^3$. Las correspondientes singularidades son los puntos dobles racionales; los cuales han sido estudiados por

muchos autores, ver por ejemplo [6] o [24, Chapter 3]. Por ejemplo, la aureola de la función:

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 ,$$

es la famosa esfera homológica de Poincaré, la cual es difeomorfa a $SO(3)$ dividido por el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ que preservan un icosaedro, donde $SO(3)$ es el grupo de rotaciones del espacio Euclidiano de dimensión 3 y es isomorfo a $SU(2)$ dividido por su centro.

Ejemplo 27. Para $n = 3$, las aureolas son *graph manifolds* encajados en la 5-esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ [18]. Por ejemplo, la aureola de la singularidad $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ es la 3-esfera homológica de Poincaré (ver [10, Description 3, p. 116]). No puede haber variedades hiperbólicas, por ejemplo, el complemento del nudo ocho (see [19]).

En general, dado un germen de función holomorfa $f: (\mathbb{C}^3, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, la aureola L_f siempre es una 3-variedad de Waldhausen conexa con forma de intersección negativa definida (ver [18] para más detalles). Si además f es casi-homogenea, entonces su conjunto de ceros V es un conjunto invariante de la restricción de la acción de $\mathbb{C}^*$ a $\mathbb{S}^1$, como en la Propiedad 3 en Sección 3.1. Esta acción de $\mathbb{S}^1$ también deja invariantes a cada esfera centrada en el origen, por lo tanto la aureola L_V es una 3-variedad de Seifert. Estas variedades fueron estudiadas por Seifert en [25] y están determinadas por un conjunto de invariantes numéricos llamados *invariantes de Seifert* (ver también [20]). En [21] Orlik y Wegreich probaron que si V es una superficie en $\mathbb{C}^3$ dada por un polinomio casi-homogéneo $f(z_1, z_2, z_3)$, hay una deformación analítica equivariante de V en una superficie definida por una de cinco clases de polinomios, que induce un difeomorfismo equivariante de las aureolas correspondientes, por lo que es suficiente calcular los invariantes de Seifert de las aureolas de estas cinco clases de polinomios. Los polinomios $z_1^p + z_2^q + z_3^r$, como en el ejemplo anterior, son uno de esos cinco tipos de singularidades casi-homogéneas en $\mathbb{C}^3$.

Capítulo 4

Fibración de Milnor

Las Propiedades 5 y 3 en Sección 3.1 generalizan, respectivamente, las dos versiones del Teorema de Fibración de Milnor clásico para singularidades complejas.

4.1. Fibración en la esfera

La primera versión dice lo siguiente:

Teorema 4.1 (Teorema de Fibración en la esfera). *Sea U una vecindad abierta del origen $\underline{0} \in \mathbb{C}^{n+1}$ y $f : (U, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una aplicación analítica compleja. Sean $V := f^{-1}(0)$ y $L_V := V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ donde $\mathbb{S}_\varepsilon$ es una esfera suficientemente pequeña en U centrada en $\underline{0}$. Entonces,*

$$\varphi := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus L_V \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad (4.1)$$

es un haz fibrado C^∞ .

La prueba de Milnor en [16] usa el Lema de Selección de Curva, primero para mostrar que la aplicación φ no tiene puntos críticos y después para construir un campo vectorial completo w en $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus L_V$ que se proyecta bajo φ sobre el campo vectorial unitario tangente a $\mathbb{S}^1$. Su flujo define un subgrupo de difeomorfismos a 1-parámetro

$$h_t : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus L_V \rightarrow \mathbb{S}_\varepsilon \setminus L_V \quad (4.2)$$

tal que

$$h_t(F_\theta) = F_{\theta+t}. \quad (4.3)$$

Esto muestra la trivialidad local de φ , es decir, que cada fibra de φ tiene una vecindad, la cual es un producto (Figura 4.1).

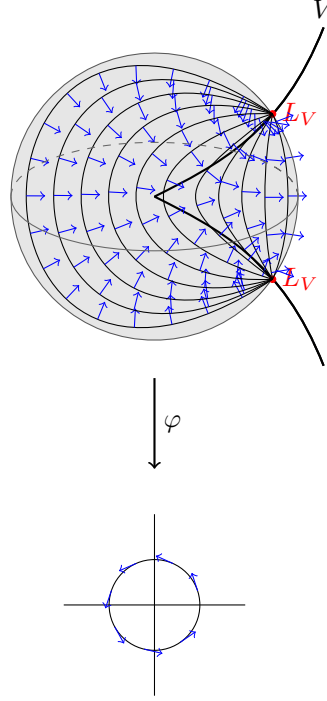


Figura 4.1: Fibras de φ y campo vectorial trivializador w en $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus L_V$.

4.2. Fibración en el tubo

Actualmente, la prueba más común del Teorema 4.1 sigue el método original de Milnor bosquejado en un artículo previo que no fue publicado [15]. El punto de partida es el siguiente:

Teorema 4.2 (Teorema de Fibración en el tubo). *Con las hipótesis y notación anteriores, sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño respecto a ε , tal que para cada $t \in \mathbb{C}$ con $|t| \leq \delta$ la fibra $f^{-1}(t)$ intersecta a la esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ transversalmente. Sea $\mathbb{D}_\delta$ el disco en $\mathbb{C}$ de radio δ y centro en 0; sea $\partial\mathbb{D}_\delta \cong \mathbb{S}^1$ su subconjunto frontera y sea $N(\varepsilon, \delta) := f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$, donde $\mathbb{B}_\varepsilon$ es la bola abierta en $\mathbb{C}^{n+1}$ cuya frontera es $\mathbb{S}_\varepsilon$. Entonces,*

$$f|_{N(\varepsilon, \delta)} : N(\varepsilon, \delta) \longrightarrow \partial\mathbb{D}_\delta, \quad (4.4)$$

es un haz fibrado C^∞ , (esencialmente) isomorfo al del Teorema 4.1.

Definición 29. La variedad con frontera $N(\varepsilon, \delta)$ es llamada un *tubo de Milnor* (Figura 4.2).

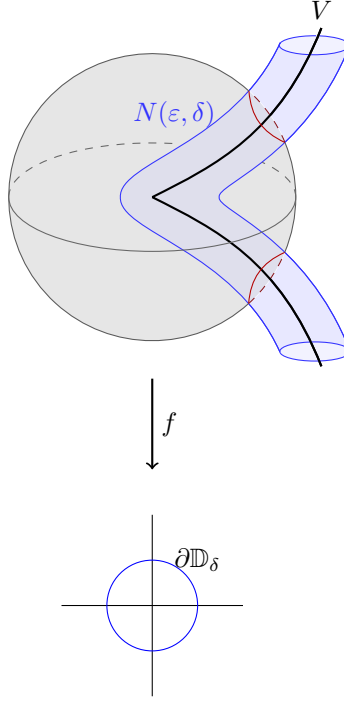


Figura 4.2: Fibración en el tubo de Milnor $N(\varepsilon, \delta)$.

La palabra “esencialmente” en el enunciado anterior es porque las fibras de (4.4) son compactas, mientras que las de (4.1) son variedades abiertas. Para tener un isomorfismo entre las dos fibraciones debemos restringir la fibración (4.4) a la bola abierta.

Milnor probó este teorema en [15] cuando la función f tiene un punto crítico aislado. En el caso general, Milnor demostró en [16] que las fibras de (4.4) (restringidas a la bola abierta) son difeomorfas a las de (4.1). Para probar que se tiene un haz fibrado en Teorema 4.2 debemos garantizar que dada $\varepsilon > 0$ como antes, existe un δ como la indicada, tal que todas las fibras $f^{-1}(t)$ con $|t| \leq \delta$ intersectan a la esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ transversalmente. Esto no era sabido hasta 1977 cuando Hironaka probó en [9] que todas las aplicaciones holomorfas con valores complejos tienen una estratificación de Thom. De hecho en [8, Théorème 1.2.4], Hamm y Le prueban la existencia de una *buena estratificación* la cual es equivalente a la condición a_f de Thom. Usando el resultado de Hironaka, Lê Dũng Tráng en [12] probó el Teorema 4.2 en un contexto más general, por lo que ahora la fibración (4.4) es llamada la *fibración de Milnor-Lê*.

Para demostrar el Teorema 4.2 restringimos a f a una bola abierta suficientemente pequeña $\mathbb{B}_r$ centrada en $\mathbf{0}$ tal que $0 \in \mathbb{C}$ es su único valor crítico. Equipamos a $\mathbb{B}_r$ con una estratificación de Thom [9], tal que V es una unión de estratos y suponemos que el $\mathbf{0}$ mismo es un estrato. Sea $\mathbb{S}_\varepsilon \subset \mathbb{B}_r$ una esfera de Milnor para f como se definió en la Definición 27, tal que toda esfera de radio $\leq r$ intersecta transversalmente cada estrato en V ; esto es posible por el Teorema 3.1. Por compacidad, esto implica que existe $\delta > 0$ tal que para cada $t \in \mathbb{C}$ con $0 < |t| \leq \delta$, la fibra $f^{-1}(t)$ intersecta a $\mathbb{S}_\varepsilon$ transversalmente. Por lo

tanto, todas las fibras de (4.4) en Teorema 4.2 son variedades suaves compactas con frontera. La prueba de la trivialidad local sigue la prueba del Teorema de Fibración de Ehresmann, levantando usando la Jacobiana f campos vectoriales apropiados en $\mathbb{C}$ a campos vectoriales en $\mathbb{B}_\varepsilon$ los cuales son normales a la fibra. La única cosa adicional que tenemos que hacer, es escoger los levantamientos de tal manera que los campos vectoriales sean tangentes a $\mathbb{S}_\varepsilon$, lo que es posible porque las fibras son transversales a la esfera (ver [24, 28]).

4.3. Equivalencia de las fibraciones

El siguiente paso para probar el Teorema 4.1 es análogo a la Propiedad 6 en Sección 3.1 y está implícito en [15]: inflamamos el tubo de Milnor, llevando la fibración en el tubo a la fibración en la esfera. Esto se basa en el Lema de Selección de Curva. La clave es construir un campo vectorial como el descrito en el siguiente lema (Figura 4.3).

Lema 4.3. *Existe un campo vectorial integrable ξ en $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus V$ tal que:*

1. *Sus líneas integrales son transversales a todos los tubos de Milnor $f^{-1}(\mathbb{S}_r^1)$;*
2. *Sus líneas integrales son transversales a todas las esferas centradas en $\underline{0}$;*
3. *Sus líneas integrales viajan sobre puntos donde f tiene argumento constante. Es decir, si z, w son puntos en $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus V$ que están sobre la misma línea integral de ξ , entonces $f(z)/|f(z)| = f(w)/|f(w)|$.*

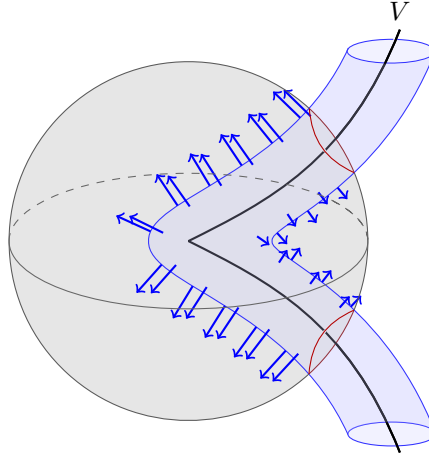


Figura 4.3: El campo vectorial ξ que manda un tubo de Milnor a la esfera.

Esto nos permite inflar el tubo a la esfera obteniendo un homeomorfismo

$$h: N(\varepsilon, \eta) \longrightarrow \overline{\mathbb{S}_\varepsilon \setminus N(\varepsilon, \eta)},$$

de la manera obvia: para cada $z \in N(\varepsilon, \eta)$ consideramos la única línea integral de ξ que pasa por z ; recorremos esta línea integral hasta llegar a la esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$. Entonces obtenemos un haz fibrado $\varphi: \mathbb{S}_\varepsilon \setminus L_V \rightarrow \mathbb{S}^1$ con proyección $\varphi := f \circ h^{-1}$.

La parte difícil es que dicho campo vectorial satisfaga la tercera condición. Esto garantiza que la proyección en el Teorema 4.1 sea $\varphi = f/|f|$ y que las dos fibraciones sean equivalentes. $\square$

Tener estos dos haces fibrado equivalentes asociados a una función trae mucha riqueza. La primera fibración es interesante para la topología y la geometría diferencial. Tiene relaciones importantes con teoría de nudos, descomposiciones de libro abierto, geometría simpléctica y de contacto. La segunda fibración es más propicia para generalizaciones, y tiene una fuerte relación con geometría algebraica, al exhibir a la fibra especial V como el límite de una familia plana de variedades complejas que degeneran en V .

4.4. La fibra de Milnor

Respecto a la topología de la fibra, Milnor en [15, Theorems 5.1, 6.5] probó:

Teorema 4.4. *Si V es el lugar de ceros de una aplicación analítica $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con una singularidad aislada en el origen, entonces la fibra F de la fibración de Milnor de V es una variedad suave paralelizable de dimensión $2n$ que tiene el tipo de homotopía de una cuña de esferas $\bigvee \mathbb{S}^n$ de dimensión n . El número μ de esferas en la cuña es estrictamente positivo, al menos que V sea suave.*

Definición 30. El número $\mu = \mu(f)$ es llamado el *número de Milnor* de f .

El número $\mu(f)$ puede calcularse topológicamente como el *índice de Poincaré-Hopf* de su campo vectorial gradiente $\nabla f(z) = (\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z))$ [15, §7], y algebraicamente como la dimensión compleja del *álgebra Jacobiana*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\} / \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right\rangle.$$

4.5. Descomposición de libro abierto

La fibración de Milnor $\phi: \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$ junto con la aureola K dan una estructura de libro abierto a la esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$, donde K es *el lomo* y las fibras de la fibración de Milnor son *las páginas*.

La definición formal de libro abierto fue introducida por Winkelnkemper en [27] y se ha convertido en un concepto importante en topología (ver por ejemplo [23, Appendix]). Los libros abiertos permiten describir a una variedad cerrada arbitraria en términos de variedades de dimensión menor.

Definición 31 ([24, Def. 5.1]). Sea M una variedad suave cerrada de dimensión n y sea N una subvariedad de M de codimensión 2 con haz normal trivial. Sea

$$\pi: M \setminus N \rightarrow \mathbb{S}^1$$

una aplicación tal que

- π es una fibración localmente trivial y
- existe una vecindad tubular de N difeomorfa a $N \times \mathbb{D}^2$ tal que la restricción de π a $N \times (\mathbb{D}^2 \setminus \{0\})$ es la aplicación $(x, y) \mapsto y/||y||$.

La aplicación π es llamada una **fibración de libro abierto** de M , N es llamada el **lomo** y las fibras de π son llamadas las **páginas**.

Se sigue que las páginas son todas difeomorfas y cada página $\mathcal{F}$ puede ser compactificada al agregar el lomo N como su frontera, obteniendo una variedad compacta con frontera.

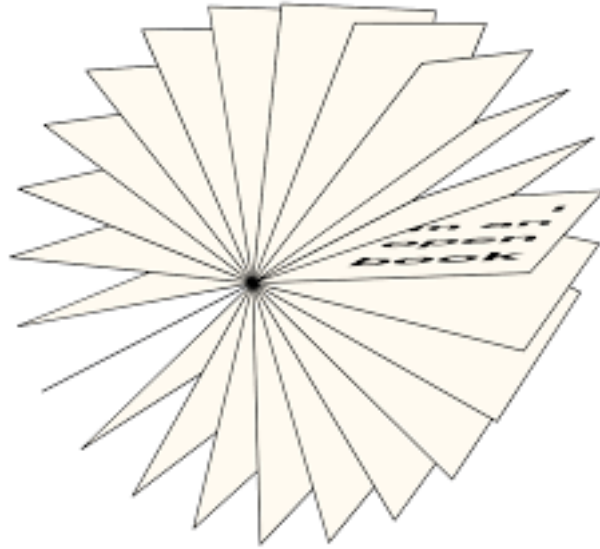


Figura 4.4: Descomposición de libro abierto

Bibliografía

- [1] Ralph Abraham, J. E. Marsden, and Tudor Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences 75. Springer Verlag, second edition, 1988. [10](#), [18](#), [29](#), [32](#)
- [2] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974. [12](#)
- [3] Egbert Brieskorn. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. Math.*, 2:1–14, 1966. [34](#)
- [4] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986. Translated from the German original by John Stillwell, [2012] reprint of the 1986 edition. [44](#)
- [5] Th. Bröcker and Jänich. *Introduction to Differential Topology*. Cambridge University Press, 1982. [10](#), [28](#)
- [6] Alan H. Durfee. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *Enseign. Math. (2)*, 25(1-2):131–163, 1979. [45](#)
- [7] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., 1974. [10](#)
- [8] Helmut A. Hamm and Lê Dũng Tráng. Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:317–355, 1973. [48](#)
- [9] Heisuke Hironaka. Stratification and flatness. In *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, pages 199–265. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977. [48](#)
- [10] R. C. Kirby and M. G. Scharlemann. Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere. In James C. Cantrell, editor, *Geometric Topology*, pages 113–146. Academic Press, 1977. Proceedings of the 1977 Georgia Topology Conference. [45](#)
- [11] Felix Klein. *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*. Dover, 1956. English translation from the 1884 original. [44](#)
- [12] Dung Tráng Lê. Some remarks on relative monodromy. In P. Holm, editor, *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, pages 397–403. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977. [48](#)

- [13] J. Milnor. *Morse Theory*. Study 51. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963. [10](#)
- [14] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia Charlottesville, 1965. [10](#)
- [15] John Milnor. On isolated singularities of hypersurfaces. Preprint, June 1966. [47](#), [48](#), [49](#), [50](#)
- [16] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968. [35](#), [37](#), [38](#), [46](#), [48](#)
- [17] James R. Munkres. *Topology A first Course*. Prentice-Hall, Inc., 2003. [10](#)
- [18] Walter D. Neumann. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 268(2):299–344, 1981. [45](#)
- [19] Walter D. Neumann. 3-manifolds and links of singularities. In *Introduction to Lipschitz geometry of singularities*, volume 2280 of *Lecture Notes in Math.*, pages 73–86. Springer, Cham, [2020] ©2020. [45](#)
- [20] Peter Orlik. *Seifert manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 291. [45](#)
- [21] Peter Orlik and Philip Wagreich. Isolated singularities of algebraic surfaces with C^* action. *Ann. of Math. (2)*, 93:205–228, 1971. [45](#)
- [22] Frédéric Pham. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bull. Soc. Math. France*, 93:333–367, 1965. [34](#)
- [23] Andrew Ranicki. *High-dimensional knot theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. Algebraic surgery in codimension 2, With an appendix by Elmar Winkelnkemper. [50](#)
- [24] José Seade. *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*, volume 241 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. [45](#), [49](#), [50](#)
- [25] H. Seifert. Topologie Dreidimensionaler Gefaseter Räume. *Acta Math.*, 60(1):147–238, 1933. [45](#)
- [26] Hassler Whitney. Elementary structure of real algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 66(3):545–556, novembre 1957. [33](#)
- [27] H. E. Winkelnkemper. Manifolds as open books. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79:45–51, 1973. [50](#)
- [28] Joseph A. Wolf. Differentiable fibre spaces and mappings compatible with Riemannian metrics. *Michigan Math. J.*, 11:65–70, 1964. [32](#), [49](#)