La topología no es como la pintan
Una experiencia propia

José Luis Cisneros Molina

P. D.

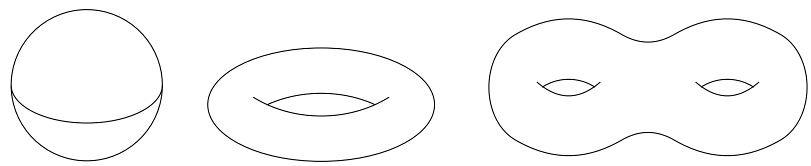
Hora libre. . . más bien horas libres, ya que en aquel entonces —algún día de 1985 por la mañana— las clases en el Instituto Tecnológico de la Paz eran de dos horas por materia. Cuando por alguna razón (de las muchas que hay) teníamos horas libres, cada quien las aprovechaba a su manera acostumbrada: unos iban a la cafetería a comer algo, algunos preferían sentarse en las jardineras, simplemente a platicar, otros las aprovechaban mejor adelantando los trabajos y tareas o repasando los apuntes. Por nuestra parte, Joel y yo solíamos ir a la biblioteca, no precisamente a estudiar, sino a hojear las revistas científicas, las enciclopedias o ver qué libro interesante nos encontrábamos perdido y olvidado en la estantería. Fue así como pasamos horas enteras leyendo: *La Recherche*, *Scientific American* o *Ciencia y Desarrollo*. Hubo un tiempo en que nos interesamos en la enciclopedia científica *Time Life* [1] disfrutando sobre todo de sus fotografías. Fue entonces (cuando leíamos el volumen de Matemáticas), que tuve mi primer contacto con la topología y que conocí a los toros gorditos y sin cuernos, a las bandas de un solo lado y a las botellas sin interior ni exterior. Inmediatamente el tema llamó mi atención pero no podía concebir que "eso" fuera matemáticas, más bien parecía una especie de juego con figuras raras, mapas y nudos.

Lo que no me pareció muy bien, fue que en el comienzo del capítulo concerniente a Topología decía: "el topólogo se define como la persona que no sabe distinguir una taza de café, de una dona", apoyando con esto el falso concepto que tiene la mayoría de la gente de los matemáticos y de los científicos en general, apartados de la vida cotidiana, encerrados en sí mismos pensando a todas horas en sus extravagancias, llegando casi a la locura; ya que los hombres de ciencia (y la mayoría de la gente lo olvida) también son personas como todos los demás, con necesidades, gustos, sentimientos, etc. y no pude imaginar de acuerdo a la "definición" dada en el libro, a un matemático vertiendo agua caliente sobre una dona y dándole mordidas a una

José Luis Cisneros-Molina
Unidad Cuernavaca, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México. Av. Universidad s/n, Lomas de Chamilpa, Cuernavaca, Mexico, e-mail: jlcisneros@im.unam.mx

taza de café.

En aquel libro, aprendí que dos figuras son topológicamente iguales, si mediante deformaciones continuas se podía transformar una en la otra, y que existía una clasificación de ellas, en la cual, las que son topológicamente iguales a una esfera, son de genero cero; las iguales a una dona (que en matemáticas recibe el curioso nombre de toro) son de genero uno; y en general, las superficies de n agujeros son de genero n (ver Figura 1), pero la definición del género no la daban en función del número de agujeros que tienen las superficies, diciendo que el género era el número de cortes que se le podían hacer a una figura sin que llegara a separarse en dos partes.



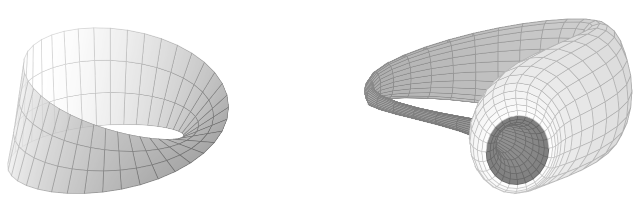
(a) Una esfera tiene género cero

(b) Un toro género uno

(c) Dos agujeros dan género dos

Figura 1: Superficies

Otras cosas que se mencionaban en dicho volumen eran: la existencia de una banda con un solo lado, llamada banda de Möbius (Figura 2(a)), que es bastante conocida pero en esa época yo no sabía que la estudiaba la Topología; y la de la botella de Klein (Figura 2(b)), que tiene la peculiaridad de ser una superficie cerrada que no tiene interior ni exterior y es el resultado de unir dos bandas de Möbius por su única orilla. Desafortunadamente sólo puede fabricarse teóricamente ya que se encuentra en un espacio de 4 dimensiones y al intentar dibujarla en 3 dimensiones forzosamente se tiene que cortar a sí misma.



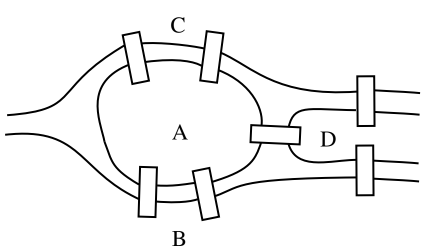
(a) Banda de Möbius

(b) Botella de Klein

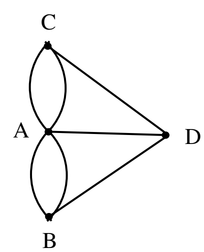
Figura 2: Superficies no orientables

Al seguir leyendo, de pronto me transporte a mis años de primaria al conocer el teorema de los cuatro colores, que dice que para colorear cualquier mapa en el plano, son necesarios y suficientes cuatro colores. ¿Quién no coloreo mapas en la primaria? De haber conocido este teorema entonces, me habría evitado la preocupación de buscar un número muy grande de colores que "me alcanzaran" para colorear un mapa "tan complicado" como el de África. Este teorema duro más de un siglo en calidad de conjetura, desde que fue propuesto como tal en 1850 aproximadamente. Hubo numerosos intentos de demostrarlo, e inclusive algunas demostraciones erróneas fueron aceptadas como válidas durante largos periodos de tiempo, hasta que en 1976 lo demostraron los matemáticos norteamericanos Appel y Haken mediante un riguroso análisis, caso por caso, llevado a cabo por computadora [6]. Por lo reciente de la demostración son pocos los libros donde se menciona que ya ha sido probado.

Lo anterior fue básicamente lo que leí aquella mañana en la biblioteca, pero anteriormente había estudiado tópicos de topología sin saberlo, al leer un folleto editado por la ANUIES titulado "Teoría de Graficas" [2] donde se planteaba el problema de los puentes de Königsberg, Prusia (ahora Kaliningrado, URSS[1]), que consistía en lo siguiente: la ciudad estaba dividida por las ramificaciones del Rio Pregel, formando dos islas, una de ellas llamada Kneiphof, las cuales estaban conectadas con las orillas entre sí, por un sistema de 7 puentes como se muestra en la Figura 3(a). Todos los domingos, los habitantes de la ciudad, en lugar de "boulevarear", acostumbraban pasear por la ciudad, y llegaron a preguntarse si era posible hacer un recorrido que cruzara todos los puentes una sola vez, y regresando al punto de partida.



(a) Mapa de Königsberg



(b) Gráfica de Euler

Figura 3: Problema de los puentes de Königsberg

El matemático suizo Leonard Euler, dio una respuesta negativa al problema, misma que publicó en 1736 y que dio origen al *Analisis Situs o Topología*, por lo que se le considera el padre de ésta. Euler representó a la ciudad, mediante una gráfica, mostrada en la Figura 3(b), asignando un punto a cada porción de tierra y uniéndolos

[1] Actualmente Rusia. Este artículo fue escrito antes de la caída de la URSS en 1991.

mediante líneas que correspondían a los puentes, reduciendo el problema, a trazar la gráfica sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada línea y regresando al punto de partida. La imposibilidad de realizar dicho trazo, lo demostró con dos teoremas que dicen lo siguiente:

Teorema 1 *Una gráfica admite un paseo euleriano cerrado si y solo si es conexa y el orden de cada uno de sus vértices es par.*

Teorema 2 *Una gráfica admite un paseo euleriano si y solo si es conexa y a lo más dos de sus vértices tienen orden impar.*

En los teoremas anteriores, hemos manejado los siguientes términos:

Gráfica Es un conjunto de puntos llamados vértices, y segmentos de recta llamados aristas que conectan a esos vértices.

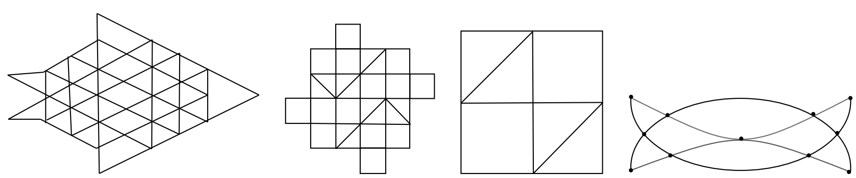
Gráfica conexa Es una gráfica que consiste de un solo pedazo.

Paseo Euleriano Un trazo contínuo que recorre toda la gráfica, sin pasar por ninguna arista más de una vez.

Paseo Euleriano Cerrado Uno cuyo vértice final coincide con el inicial.

Orden de un vértice Número de aristas que llegan a ese vértice.

Como se puede apreciar, en la Figura 3(b), la gráfica que hizo Euler tiene los cuatro vértices de orden impar y de acuerdo con el **Teorema 1** es imposible encontrar un paseo Euleriano cerrado. Con estos dos teoremas, no solo se da respuesta al problema de los puentes de Königsberg, sino de manera general, se puede saber si una gráfica cualquiera, tiene un paseo Euleriano (ya sea cerrado o no) sin tener que hacer ningún caso. Por ejemplo las gráficas de la Figura 4 (inténtelo el lector).



(a) (b) (c) (d)

Figura 4: ¿Cuáles de estas gráficas tienen un paseo Euleriano?

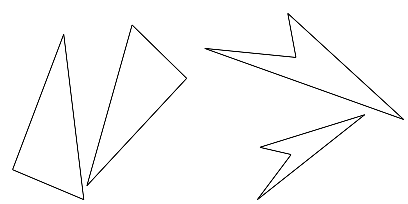
Con todo lo anterior, leído en libros no especializados en Topología, mi conocimiento se reducía a saber que existe una rama de las matemáticas que estudia las deformaciones de las cosas, algunas superficies raras, como colorear mapas y trazar graficas sin despegar el lápiz, sin encontrar ninguna relación entre ellas y mucho menos la relación que tienen con las demás ramas de la matemática.

Al concluir la preparatoria, después de las indecisiones que todo el mundo sufre para determinar que va a estudiar (ya sea porque nos gusta todo o no nos gusta nada), elegí la Licenciatura en Matemáticas, y fue así como ingresé a la **Universidad de Sonora**, donde me topé nuevamente con la topología, como curso optativo del sexto semestre del plan de estudios de la carrera, al que asistí como oyente en el cuarto semestre, ya que mi curiosidad por conocer más acerca del tema seguía latente. Fue un curso excelente, que estuvo a cargo de la maestra María Luisa Pérez Seguí de la Facultad de Ciencias de la UNAM, quien estaba en ese semestre en calidad de profesor visitante en mi universidad.

Al principio del curso, la maestra dio una motivación, presentándonos algunos conceptos de manera intuitiva, antes de definir formalmente lo que es un espacio topológico. En esta etapa, vimos que en topología, al igual que en otras ramas de la ciencia, nos interesan las propiedades que tienen en común los objetos de estudio, por ejemplo, en Zoología, no existe diferencia alguna entre dos gatos (aunque existan muchas razas: angora, siamés,. . .), pero si la hay entre un gato y un perro, y en general dos animales son iguales si ocupan el mismo lugar dentro de la clasificación taxonómica, es decir, que pertenezcan al mismo género y especie, que en nuestro ejemplo serian: *Felis domesticus* y *Canis familiaris* respectivamente. De manera similar, en teoría de Grupos, dos grupos isomorfos tienen la misma estructura, aunque uno sea multiplicativo y el otro aditivo, estableciéndose la relación mediante una función biyectiva que preserve las operaciones (Figura 5(a)). Por otro lado en Geometría, existe una forma diferente de comparación, donde dos figuras son iguales si tienen las mismas dimensiones (Figura 5(b)) sin importar su posición, o de manera un poco más general, si tienen la misma forma (Figura 5(c)), sin importar su tamaño.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}_4,+) & & (G,\cdot) \\ \mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\} & & G=\{1,i,-1,-i\} \\ & & \\ 0 & \leftrightarrow & 1 \\ 1 & \leftrightarrow & i \\ 2 & \leftrightarrow & -1 \\ 3 & \leftrightarrow & -i \end{array}$$

(a) Isomorfismo



(b) Congruencia (c) Semejanza

Figura 5

Análogamente, en Topología existen formas de comparar los espacios topológicos, pero sin importar su "forma" o las operaciones entre ellos. Un espacio topológico es un conjunto en el que de alguna manera se ha establecido la noción de "cercanía" entre los elementos del conjunto y se dice que son homeomorfos si son esencialmente iguales. Durante la motivación nos restringimos a un tipo particular de espacios topológicos: los cuerpos, superficies y curvas en $\mathbb{R}^3$, donde la “cercanía” es la usual del espacio euclidiano y vimos de manera intuitiva que dos de esas figuras son homeomorfas, si las imaginábamos hechas de un hule muy elástico y podíamos deformar la primera en una idéntica a la segunda, ya sea estirando, encogiendo (sin que dos puntos que eran distintos se peguen en uno solo), e inclusive cortándolos siempre y cuando después de alguna operación (desanudar por ejemplo) se vuelven a pegar los mismos puntos que estaban “cerca” antes del corte. Se muestra un ejemplo en la Figura 6.

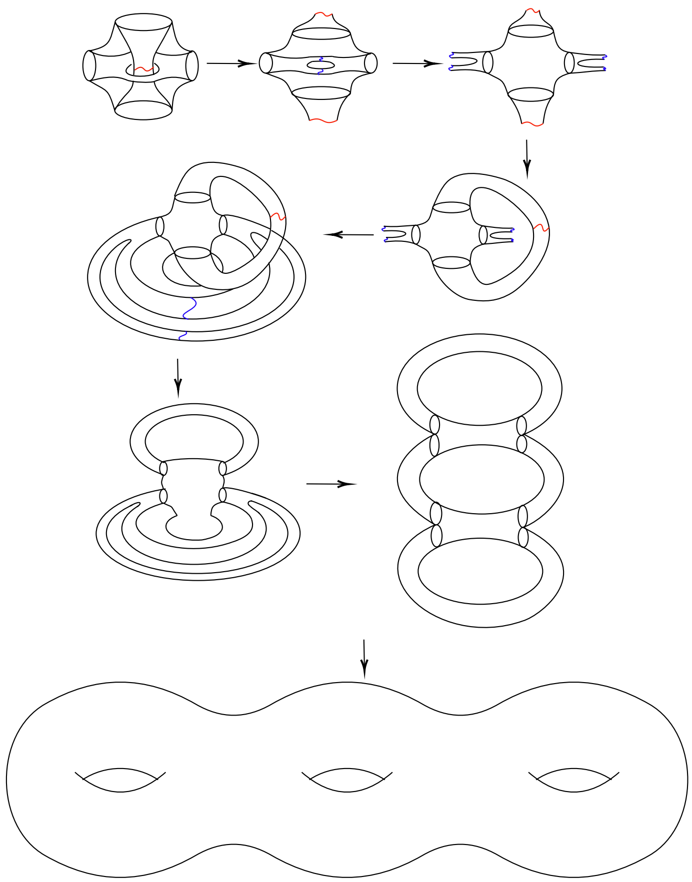


Figura 6: Un hoyo através de otro hoyo dentro de un hoyo

Los espacios topológicos que más manejamos fueron superficies, las cuales para estudiarlas más fácilmente es conveniente representarlas como si estuvieran “desenrolladas" (generalmente en una dimensión menor) mediante un polígono (frecuentemente un cuadrado) donde se señalan los lados que se van a identificar (unir) mediante flechas que indican en qué sentido se van a "pegar" dichos lados. En la Figura 7 se enlistan las principales superficies con su respectiva representación.

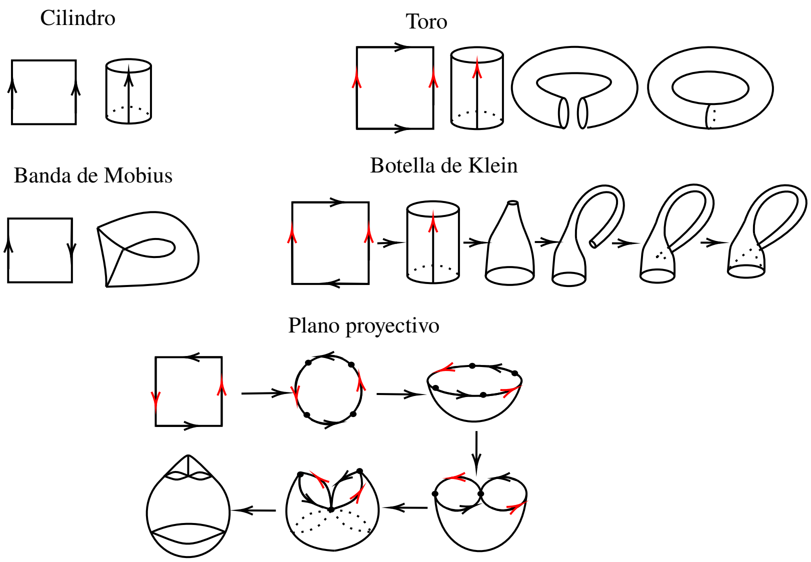


Figura 7: Representación de superficies mediante polígonos

Al igual que la botella de Klein, el plano proyectivo sólo puede representarse en el espacio de dimensión 3 con autointersecciones, como un sombrero de obispo.

A continuación, vimos algunos resultados de teoría de gráficas, empezando por el problema de los puentes de Königsberg y posteriormente el concepto de gráfica **aplanable**, es decir, la que se puede representar en el plano sin que exista intersección entre sus aristas (tomando en cuenta que una gráfica es un concepto abstracto y no una figura dibujada de una manera especial). En la Figura 8 se muestran dos gráficas aplanables con su respectiva representación plana. En teoría de gráficas, existen dos teoremas muy importantes, uno de ellos es el **Teorema de Kuratowski** que nos permite saber si una gráfica es aplanable o no, y el otro es de Euler y se basa en que una representación plana de una gráfica (aplanable por supuesto) divide al plano en regiones, incluyendo la región no acotada (la región exterior) [5]. En la Figura 8(b) se muestran las distintas regiones en las que la representación plana de la gráfica de la Figura 8(a) divide al plano.

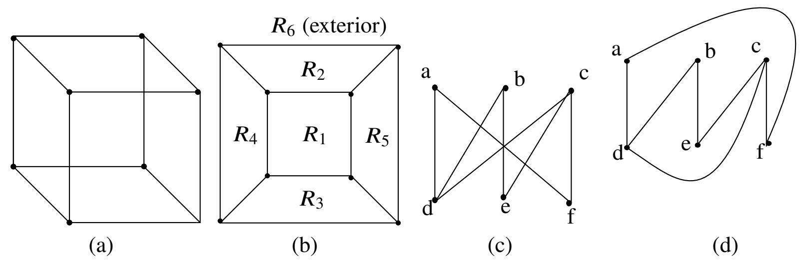


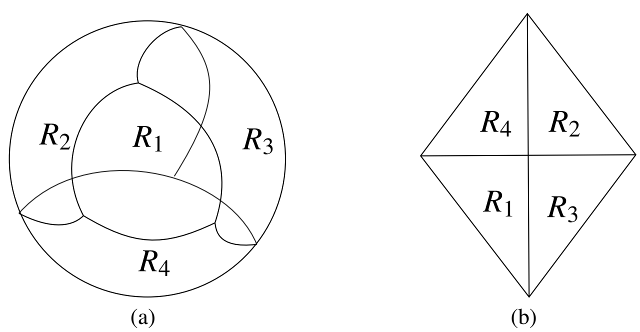
Figura 8: Dos gráficas con su respectiva representación plana

El teorema establece una relación entre el número de vértices, aristas y regiones.

Teorema 3 *Sea G una gráfica aplanable conexa, con v vértices, a aristas y r el número de regiones en una representación plana de G, entonces:*

$$v - a + r = 2$$

Este teorema también es válido si dibujamos la representación plana de la gráfica sobre una esfera. "Achatando" esta esfera dividida en regiones, podemos obtener un poliedro cuyos vértices y aristas sean los respectivos vértices y aristas de la gráfica y las caras las regiones formadas, como se muestra en la Figura 9.



$$v = 4 \quad a = 6 \quad r = 4$$

$$v - a + r = 2$$

Figura 9: La esfera es homeomorfa al tetraedro

Decimos que una superficie es triangulable si es posible subdividirla en un número finito de aristas, vértices y caras como en el caso anterior, llamándole a dicha subdivisión una triangulación.

Euler publico este resultado en 1752 y posteriormente, en 1890 el matemático francés Henri Poincaré demostró que al hacer una triangulación en otro tipo de superficies, la relación $v - a + r$ también era constante para cualquier triangulación, pero la constante era diferente para cada tipo de superficie: 2 para la esfera, 0 para el toro, -2 para el toro con 2 hoyos, etc. A esta constante se le llama la **característica de Euler-Poincaré**, y se puede demostrar que dos superficies con la misma característica son homeomorfas entre sí.

Al final de la motivación vimos que un mapa es una triangulación ya sea en el plano, en la esfera o cualquier otra superficie. La maestra nos enunció el teorema de los cuatro colores y demostramos basándonos en la características de Euler-Poincaré que 5 colores eran suficiente para colorear cualquier mapa en el plano. Asimismo, vimos que para colorear un mapa en un toro son necesarios y suficientes 7 colores, y para un plano proyectivo 6. La diferencia en el número de colores necesarios estriba en que poseen diferentes características de Euler-Poincaré.

Hasta aquí he dicho como "pintan" a la Topología viéndola de manera intuitiva, que es la manera más accesible para la mayoría de la gente. A continuación trataré de explicar que "es" la Topología aunque indudablemente tal vez no lo logre en un sentido estricto, y la "pinté" a su vez de alguna manera, ya que todavía me falta mucho por aprender.

Después de la motivación, la maestra nos dejó caer la bomba (como ella misma dijo) dándonos la definición de espacio topológico que más o menos era así:

Definición Sea X un conjunto y $x \in X$. Una vecindad de x es un subconjunto de X de tal forma que si $\mathcal{N}_x$ es el conjunto de todas las vecindades de x, entonces $\mathcal{N}_x$ satisface:

(N_0) $x \in N$ con $N \in \mathcal{N}_x$
(N_1) $N, N' \in \mathcal{N}_x$, entonces $N \cap N' \in \mathcal{N}_x$
(N_2) Si $N \in \mathcal{N}_x$, y $N \subset S$, entonces $S \in \mathcal{N}_x$
(N_3) $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$

Si en un conjunto X para cada x damos un subconjunto del conjunto potencia $P(X)$ llamado $\mathcal{N}_x$ que satisfaga $(N_0), (N_1), (N_2), (N_3)$ entonces tenemos una topología para X.

Como se podrá notar, es justificado el compararlo con una bomba, después de haber estado trabajando en un nivel puramente intuitivo y pasar a un plano totalmente abstracto.

De la definición anterior surgieron dos nuevos conceptos que fueron la base de la mayor parte del curso:

Conjunto abierto Dada una topología en X y $U \subset X$ decimos que U es abierto (según esa topología) si U es vecindad de todos sus puntos.

Conjunto cerrado Un conjunto $C \subset X$ es cerrado si $X - C$ es abierto

A partir de los cuales surgieron dos definiciones equivalentes para espacio topológico. Durante el curso en sí, vimos diferentes topologías que se podían dar a un conjunto, algunos ejemplos son: la topología discreta, la indiscreta, la cofinita, la inducida en un subespacio, la topología del orden, la del producto, la dada por una métrica, etc.

De ahora en adelante daré las definiciones formales de los conceptos que hemos manejado intuitivamente para poder hacer una comparación.

Formalmente, dos espacios topológicos son **homeomorfos** si es posible establecer una función biyectiva entre ellos tal que ella y su inversa manden conjuntos abiertos en abiertos, que a simple vista no tiene nada que ver con la deformación de una superficie. Otro concepto que se vio en la parte intuitiva es la de **género** que formalmente se define como $g = 1 - \frac{1}{2}\chi(M)$, donde g es el género de la superficie M y $\chi(M)$ es su característica de Euler-Poincaré. Si nos hubieran dado únicamente esta definición de género no hubiéramos podido relacionarlo con el número de hoyos que tiene la superficie. De manera intuitiva se define un espacio topológico conexo análogamente a grafica conexa, es decir, que es de un solo pedazo, de esta manera podemos darnos una idea de cómo es la superficie, lo que no sucede conociendo únicamente la definición formal que es la siguiente: un espacio topológico X es **conexo** si y sólo si no existe un subconjunto propio U de X distinto del vacío, que sea abierto y cerrado. Se dice también que una superficie es conexa por trayectorias, si dados dos puntos cualesquiera en ella se pueden unir mediante una trayectoria totalmente contenida en la superficie. Los siguientes dos conceptos son nuevos y los emplearemos más adelante: una superficie es **cerrada** si no tiene bordes, ejemplo de ellas son: el toro, la botella de Klein y el plano proyectivo; y se dice también que una superficie es **orientable** si alrededor de un punto fijo determinamos una dirección de rotación y al movernos sobre la superficie y regresar al mismo punto, la dirección no ha cambiado, algunos ejemplos de superficies orientables son el toro, el cilindro y la esfera. Las superficies que no cumplen con esta propiedad se llaman **no orientables** dentro de las cuales se encuentran: la banda de Möbius, la botella de Klein y el plano proyectivo. Otra manera de decir que una superficie es no orientable es viendo si contiene por lo menor una banda de Möbius, por ejemplo la botella de Klein es la unión de dos de ellas.

Conociendo las definiciones anteriores, podemos enunciar un teorema sobre superficies muy importante en Topología [4]:

Teorema de clasificacion de superficies *Toda superficie cerrada, conexa y orientable es homeomorfa, ya sea a una esfera, a un toro con uno, dos o n hoyos.*

El teorema anterior clasifica totalmente a las superficies cerradas, conexas y orientables y es muy importante ya que proporciona una lista completa de los objetos de estudio. Su demostración se basa en la triangulación de las superficies y de su característica de Euler-Poincaré. Mediante la triangulabilidad, el problema de la clasificación de superficies se reduce a un problema combinatorio finito, que consiste en representar a las superficies por medio de polígonos y mediante algunas operaciones que equivaldrían a cortar y pegar varias superficies, se llega a la representación de las superficies ya conocidas. Si designamos con una letra a cada vértice del polígono, a esta se le puede asignar una ecuación compuesta por dichas letras y las manipulaciones antes mencionadas se convertirían en manipulaciones puramente algebraicas entre las ecuaciones, con las cuales se puede demostrar que la botella de Klein está compuesta por dos bandas de Möbius y que el plano proyectivo es la unión de un disco y una banda de Möbius.

Durante el curso muchas dudas que tenía acerca de la Topología se despejaron y surgieron muchas más que me impulsan a seguir estudiándola. De pronto apareció aquella relación que no existía para mí entre los objetos de estudio de la Topología y encontré a su vez que está íntimamente relacionada con otras ramas de la matemática, ya que requerí conocimientos solidos de Teoría de Conjuntos para comprenderla y me ha servido enormemente en mis cursos de Calculo IV y Análisis Matemático. Pero todo esto son sólo los primeros pasos de un vasto camino por recorrer.

La experiencia que he relatado hasta ahora, la puedo resumir con una analogía, donde la Topología es un gran iceberg que flota sobre el océano de la Matemática donde sobresale una pequeña porción que es la que ve la gente de manera intuitiva, pero en el fondo existe una enorme teoría que podemos conocer, aprendiendo poco a poco a bucear en el mar de las matemáticas para llegar cada vez más profundo, aunque la mayoría de las veces el primer clavado (paso de lo intuitivo a lo abstracto) puede confundirnos un poco.

Los libros no especializados como las enciclopedias, brindan a la gente que no se dedica a la matemática una idea de cómo es ésta, pero muchas veces no dicen realmente lo que es. Este tipo de libros son importante por dos razones principalmente, una es atraer la atención de las personas que gustan de las matemáticas para que posiblemente se dediquen a ellas (como en mi caso) o simplemente para divulgar lo que hacen los matemáticos de una manera accesible a todo el mundo. Desafortunadamente, para dar a conocer la matemática a personas que no están en contacto con ella, es necesario traducirla de su lenguaje natural, a un lenguaje más entendible, perdiendo con ello de manera inevitable parte de su belleza. Pero pedir a la gente que estudie Matemáticas para poder apreciarla totalmente sería, como dice Robert March en su libro Física para poetas [3], “tan poco razonable (o tan razonable) como pedirle que estudie el italiano para aprender a apreciar debidamente a Dante”.

Antes de terminar quisiera aclarar que el presente artículo no va dirigido a ningún tipo de lector en especial, ya que en algunas partes planteo los conceptos de manera elemental, accesible a las personas no especializadas, mientras que en otras menciono conceptos entendibles solamente para los que conocen al respecto. Sólamente trato de expresar una experiencia propia que consiste en decir como descubrí que **la topología no es como la pintan**.

Agradecimientos Esta es una versión actualizada del artículo publicado en el *Boletín del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, No. 11, 14-22, Noviembre 1988. El formato en LaTeX y la re-elaboración de las figuras estuvo a cargo de Marco Antonio Gutierrez Garduño, estudiante de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, durante su Servicio Social en abril del 2023.

Referencias

1. David Bergamini. *Metemáticas*. Colección Científica de Time-Life. Time-Life, 1966. 1
2. Santiago López de Medrano. *Teoría de Gráficas*. Temas Básicos. ANUIES, 1973. 3
3. Robert H. March. *Física para poetas*. Siglo Veintiuno Editores, 2019. 11
4. Elías Micha. *Introducción a la topología (clasificación de superficies)*. CINVESTAV, 1983. Notas del III Coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV. 10
5. Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 7 edition, 2012. 7
6. Lynn Arthur Steen, editor. *Mathematics today*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. Twelve informal essays. 3