Construyendo una Silla de Montar

Ramiro Carrillo Catalán José Luis Cisneros Molina
Noemí Santana Medina

1 Introducción

Generalmente usamos las matemáticas para estudiar el mundo que nos rodea y así, tratar de entenderlo. Esto se hace mediante la elaboración de modelos matemáticos que describan el fenómeno en cuestión. Un ejemplo muy sencillo de esto es el uso de las secciones conocías para describir ciertas situaciones física, así, la trayectoria de un proyectil sin fricción, puede ser descrita por una parábola y las órbitas de los planetas girando alrededor del sol, de acuerdo con las leyes de Kepler, siguen la trayectoria de una elipse, dónde el sol se encuentra en uno de sus focos.

A veces es bueno hacer el proceso inverso y valernos de los objetos del mundo concreto para entender mejor a los objetos abstractos de las matemáticas, por ejemplo, si queremos explicarle a un niño que es una esfera, en vez de decirle que es el conjunto de puntos en el espacio que equidistan de un punto fijo, bastará que le enseñemos una pelota y entenderá el concepto de esfera. De esta manera, si tenemos un "modelo concreto" de nuestros objetos matemáticos, será más fácil estudiarlos y entender sus propiedades.

En el presente artículo, se describe como construir un modelo físico de un paraboloide hiperbólico, y se mencionan algunos usos didácticos de dicho modelo, en el estudio de conceptos en geometría analítica y geometría diferencial.

El paraboloide hiperbólico es una superficie dada por la ecuación cuadrática

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{1}$$

que, cómo se puede apreciar en la Figura 1, es parecida a una "silla de montar", y es por ello que también se le conoce con este nombre.

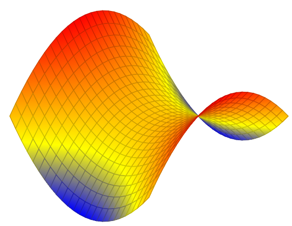


Figure 1: Paraboloide hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Escogimos la "silla de montar" por varias razones:

- Entre las superficies con ecuaciones cuadráticas (esferas, elipsoides, paraboloides, hiperboloides, etc.) el paraboloide hiperbólico es el más difícil de visualizar, aún después de haber calculado las trazas en los planos coordenadas y algunas curvas de nivel. Con un modelo físico de esta superficie es fácil identificar las curvas de nuvel y convencernos que la superficie corresponde a la ecuación (1).
- El paraboloide hiperbólico, (al igual que el hiperboloide de una hoja), es una *superficie reglada*, es decir, está constituida por una familia de rectas. Esta característica facilita su construcción, pues al sustituir las rectas por hilos y al amarrar a estos últimos adecuadamente a una estructura rígida, se obtiene el modelo.
- Los cálculos que se requieren, a pesar de ser un ejercicio elemental de geometría analítica y diferencial, son muy ilustrativos, pues requiere que se manejen muy bien los conceptos involucrados.
- La última razón es estética, pues el modelo que se obtiene es una bonita "escultura" que puede servir como adorno mientras no se usa con fines didácticos.

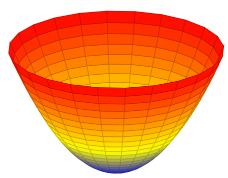
2 Superficies Cuádricas

El paraboloide hiperbólico pertenece a la familia de las superficies cuadricas. Una *superficie cuadrica* está formada por el conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ que satisfacen una *ecuación cuadrática*, es decir, una ecuación de la forma

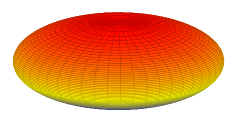
$$f(x, y, z) = 0$$

dónde $f(x, y, z)$ es un polinomio de segundo grado en x, y y z.

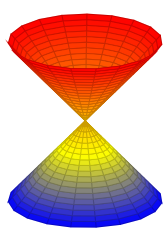
Mediante rotaciones y traslaciones, siempre es posible simplificar una ecuación cuadrática a alguna de las *formas canónicas*, las cuales se clasifican como *cuádricas con centro* o *cuádricas sin centro*, dependiendo de que el origen sea o no, centro de simetría de la superficie. Las cuádricas sin entro son el paraboloide elíptico (Figura 2(a)) y el paraboloide hiperbólico (Figura 1), que es nuestro caso de interés. La familia de las cuádricas con centro está formada por el cono (Figura 2(c)), el elipsoide (Figura 2(b)), los hiperboloides de una hoja (Figura 2(d)) y de dos hojas (Figura 2(e)).



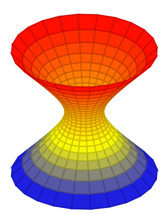
(a) Paraboloide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$



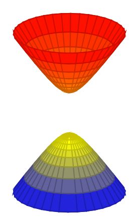
(b) Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$



(c) Cono circular: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



(d) Hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



(e) Hiperboloide de dos hojas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Figure 2: Superficies cuádricas

3 El paraboloide hiperbólico visto como una Superficie Reglada

El paraboloide hiperbólico es una superficie reglada y este hecho es el que nos permitirá construir un modelo usando hilos que representen las reglas.

Una *superficie reglada* es una superficie generada por líneas rectas llamadas *reglas*, es decir, por cada punto de la superficie pasa una recta que está totalmente contenida en la superficie. Una superficie reglada puede ser descrita por una parametrización de la forma

$$x(t,s) = \alpha(t) + sv(t), \tag{2}$$

donde α es una curva sobre la superficie, llamada *directriz* y $v(t)$ es un campo vectorial no nulo. La interpretación de esta parametrización es la siguiente: para cada t y $s = 0$, nos encontramos con el punto $\alpha(t)$ de la directriz y al variar s, se recorre la regla que pasa por $\alpha(t)$ la cuál es paralela al vector $v(t)$.

Ejemplos obvios de superficies regladas son:

(a) El cono circular, dónde la directriz, es un círculo y todas las reglas pasan por el vértice (Figura 2(c));

(b) El cilindro circular, dónde la directriz, es nuevamente un círculo sobre un plano y las reglas son perpendiculares a dicho plano (Figura 3).

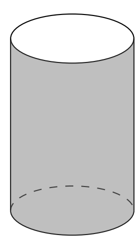


Figure 3: Superficie reglada: cilindro

Para profundizar en el estudio de las superficies regladas sugerimos consultar [2, 3, 5, 4].

Ahora, encontraremos una parametrización del paraboloide hiperbólico cómo superficie reglada, es decir de la forma (2). Para facilitar la lectura, recordemos que

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{3}$$

es la ecuación canónica del paraboloide hiperbólico. Escogeremos cómo directriz, a la parábola que se obtiene al “cortar” el paraboloide hiperbólico con el plano $x = h$, esto es, a la parábola cuya ecuación está dada por

$$z = \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Luego observe que la parametrización de esta parábola se obtiene tomando $x = h$, $y = t$ y el valor de z de acuerdo a la ecuación anterior, esto es,

$$\alpha(t) = \left(h, t, \frac{h^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}\right). \tag{4}$$

Entonces la ecuación (2) tomara la forma:

$$\begin{aligned} x(t, v) &= \left(h, t, \frac{h^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}\right) + s\big(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\big) \\ &= \left(h + sv_1(t), t + sv_2(t), \frac{h^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} + sv_3(t)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Puesto que buscamos una representación del paraboloide hiperbólico, debe satisfacerse su ecuación canónica (3). Entonces, sustituyendo (5) en (3), se obtiene la relación

$$\frac{(h + sv_1(t))^2}{a^2} - \frac{(t + sv_2(t))^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} + sv_3(t),$$

la cual puede simplificarse a

$$\frac{2hv_1(t)}{a^2} - \frac{2tv_2(t)}{b^2} + \Big(\frac{v_1^2(t)}{a^2} - \frac{v_2^2(t)}{b^2}\Big)s = v_3(t), \tag{6}$$

Al derivar la ecuación anterior con respecto a la variable s se obtiene

$$\frac{v_1^2(t)}{a^2} - \frac{v_2^2(t)}{b^2} = 0,$$

lo cual implica que

$$v_2(t) = \frac{b}{a} v_1(t). \tag{7}$$

Ahora, sustituyendo (7) en (6), se obtiene

$$v_3(t) = \Big(\frac{2h}{a^2} - \frac{2t}{ab}\Big) v_1(t) \tag{8}$$

Por lo tanto, de (7) y (8), la función vectorial $v(\cdot)$ en la parametrización (2) toma la forma

$$v(t) = \Big(1, \frac{b}{a}, \frac{2h}{a^2} - \frac{2t}{ab}\Big) v_1(t). \tag{9}$$

Es oportuno observar que la elección de la función escalar $v_1(\cdot)$ es libre, es decir, podemos elegirla de manera arbitraria. Sin embargo, es natural tomar $v_1(\cdot)$ lo más simple que sea posible y que además proporcione información geométrica inmediata; por ejemplo, podemos pedir que para algún t_0 fijo la parametrización

$$x(t_0, s) = \alpha(t_0) + sv(t_0)$$

describa una recta específica de antemano.

Una elección razonable es la recta $y = \frac{b}{a}x$, pues esta resulta al cortar al paraboloide hiperbólico con el plano $z = 0$. Con esta elección en mente, observe que por (4), los puntos

$$\alpha\Big(\frac{b}{a}h\Big) = \Big(h, \frac{b}{a}h, 0\Big) \quad \text{y} \quad (0,0,0)$$

se encuentran tanto sobre el paraboloide hiperbólico como en la recta. Ahora, busquemos $v_1(\cdot)$ de forma que la parametrización $x(\frac{b}{a}h, s)$ pase por estos dos puntos. Esto puede hacerse pidiendo que se satisfaga la relación

$$x\Big(\frac{b}{a}h, 1\Big) = \alpha\Big(\frac{b}{a}h\Big) + v\Big(\frac{b}{a}h\Big) = (0,0,0),$$

o, equivalentemente,

$$\Big(h, \frac{b}{a}h, 0\Big) + \Big(1, \frac{b}{a}, 0\Big)v_1\Big(\frac{b}{a}h\Big) = (0,0,0),$$

de donde se desprende que $v_1(\frac{b}{a}h) = -h$, lo cual a su vez nos invita a tomar $v_1(t) = -h$. Entonces, de (9) tenemos que

$$v(t) = \Big(-h, -\frac{hb}{a}, \frac{2ht}{ab} - \frac{2h^2}{a^2}\Big),$$

que junto con (5), la parametrización del paraboloide hiperbólico está dada por

$$\begin{aligned} x(t,v) &= \Big(h, t, \frac{h^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}\Big) + \Big(-h, -h\frac{b}{a}, \frac{2th}{ab} - \frac{2h^2}{a^2}\Big)s \\ &= \Big(h - sh, t - sh\frac{b}{a}, \frac{h^2}{a^2}(1-2s) - \frac{t^2}{b^2} + \frac{2sth}{ab}\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

4 Una ecuación para $\mathcal{P}$

Hasta ahora, todos los cálculos se han referido a cualquier paraboloide hiperbólico cuya ecuación esté en forma canónica, es decir, con su punto silla en el origen y sus ejes, paralelos a los ejes coordenados. En esta sección precisaremos las dimensiones del paraboloide hiperbólico que usaremos para la construcción del modelo, al cual llamaremos $\mathcal{P}$, y encontraremos su ecuación, es decir, encontraremos los valores de a y b.

Queremos que el punto silla del paraboloide hiperbólico $\mathcal{P}$ se encuentre en el origen, que las parábolas que lo delimiten estén separadas una distancia $2h$ y que estén inscritas en un cuadrado cuyo lado mida $2l$. Además, pediremos que la hipérbola de su base, la cual está en el plano $z = -l$, esté inscrita en un rectángulo con dimensiones $2h \times 2l$. Por razones estéticas queremos que dicho rectángulo sea áureo, es decir

$$\frac{h}{l} = \phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

dónde ϕ es la razón áurea. Los requerimientos anteriores se ilustran en la Figura 4.

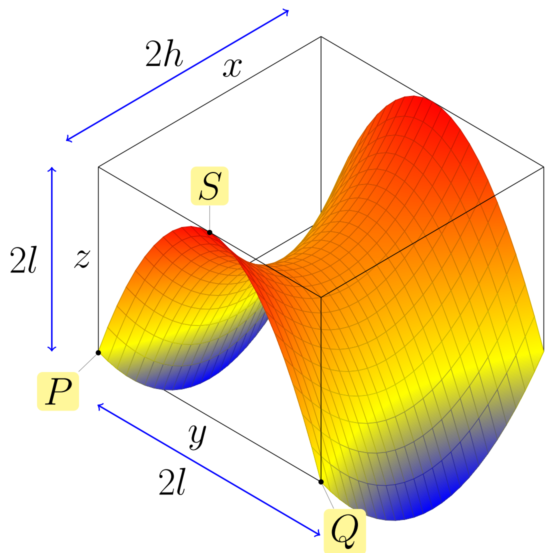


Figure 4: Dimensiones de $\mathcal{P}$

Para obtener la ecuación de $\mathcal{P}$, primero observe que los puntos P, Q y S tienen coordenadas $(h, -l, -l)$, $(h, l, -l)$ y $(h, 0, l)$ respectivamente. Luego note que S es el vértice de la parábola (delimitadora) que se obtiene al cortar a $\mathcal{P}$ con el plano $x = h$; en consecuencia, puesto que el eje de esta parábola es paralelo aleje Z, su ecuación es de la forma

$$z = -py^2 + l \tag{11}$$

Ahora, sustituyendo las coordenadas de $P = (h, -l, -l)$ en (11) se obtiene la ecuación $-l = -pl^2 + l$; esto es, $p = 2/l$. Entonces,

$$z = -\frac{2}{l}y^2 + l. \tag{12}$$

Por otra parte, al sustituir $x = h$ en la ecuación del paraboloide hiperbólico (3) se obtiene

$$z = -\frac{1}{b^2}y^2 + \frac{h^2}{a^2}. \tag{13}$$

Combinando (12) y (13) se deduce que

$$a^2 = \frac{h^2}{l} \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{l}{2};$$

equivalentemente,

$$a = \frac{h}{\sqrt{l}} = \frac{\phi l}{\sqrt{l}} = \phi\sqrt{l} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\frac{l}{2}}. \tag{14}$$

En consecuencia, ha quedado especificada la ecuación para el paraboloide hiperbólico $\mathcal{P}$

$$z = \frac{x^2}{\phi^2 l} - \frac{2y^2}{l}. \tag{15}$$

La ecuación de la hipérbola base se obtiene al cortar (15) con el plano $z = -l$:

$$\frac{2y^2}{l^2} - \frac{x^2}{\phi^2 l^2} = 1.$$

Para concluir esta sección, observe que la ecuación (13) también representa a la otra parábola delimitadora del modelo, pero ésta se encuentra en el plano $x = -h$.

5 Puntos de intersección de las reglas con las parábolas y la hipérbola

La hipérbola base y las parábolas delimitadoras formarán la estructura que soportará al modelo. Recuerde que estas curvas se obtienen al cortar el paraboloide hiperbólico con los planos $z = -l$ y $x = \pm h = \pm\phi l$. Para construir el modelo usando hilos como reglas, necesitamos conocer los lugares precisos donde se atarán sus extremos. Por ejemplo, si elegimos que los extremos "iniciales" de los hilos se encuentren en la parábola $x = h$ es necesario conocer lo puntos donde se atarán los extremos "finales", los cuales pueden localizarse en la otra parábola delimitadora o sobre la hipérbola base. Esta información, como veremos en los desarrollos siguientes, la proporcionan los puntos de intersección de líneasreglas con la hipérbola base y las parábolas delimitadoras.

La parametrización que corresponde al paraboloide hiperbólico $\mathcal{P}$ se obtiene substituyendo $h = \phi l$ y los valores de a y b dados en (14), en la paraetrización "general" (10). Después de realizar cálculos simples se obtiene que la parametrización para $\mathcal{P}$ es la siguiente:

Sustituyendo $h = rl$ y los valores de a y b dados por (**??**) en (**??**) obtenemos una parametrización de $\mathcal{P}$ cómo superficie reglada:

$$\begin{aligned} x(t,s) &= \alpha(t) + sv(t) \\ &= \Big(\phi l, t, l - \frac{2t^2}{l}\Big) + \Big(-\phi l, -\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{4t}{\sqrt{l}} - 2l\Big)s \\ &= \Big(rl(1-s), t - \frac{sl}{\sqrt{2}}, l(1-2s) - \frac{2t^2}{l} + 2\sqrt{2}st\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Intersección de la regla con la parábola $x = -\phi l$

Para cada valor fijo t, la parametrización (16) describe la regla que pasa por $\alpha(t)$. Para que esta regla intersecte a la parábola $x = -\phi l$ necesitamos que su primera coordenada sea precisamente $-\phi l$; de (16), tenemos que $\phi l(1-s) = -\phi l$

de dónde obtenemos que $s = 2$. Sustituyendo este valor de s en (16), obtenemos el punto de intersección requerido, al cual denotaremos por P_t:

$$P_t = \Big(-\phi l, t - 2\sqrt{2}l, -3l - \frac{2t^2}{l} + 4\sqrt{2}t\Big) \tag{17}$$

Intersección de la regla con la hipérbola $z = -l$

Procediendo de la misma forma, fijemos t en la parametrización (10) para obtener la intersección de la regla con la hipérbola. Esto ocurre cuando la tercer coordenada es igual a $-l$; entonces, usando de nuevo (16), tenemos

$$l(1 - 2s) - \frac{2t^2}{l} + 2\sqrt{2}st = -l$$

de donde se deduce que el valor de s para el cual la regla intersecta a la hipérbola es

$$s_t = \frac{l^2 - t^2}{l(l - \sqrt{2}t)}. \tag{18}$$

Sustituyendo s_t en (16), obtenemos el punto de intersección al cual denotamos por H_t:

$$H_t = \Big(\phi l\Big(1 - \frac{l^2 - t^2}{l(l - \sqrt{2}t)}\Big), t - \frac{l^2 - t^2}{\sqrt{2}l - 2t}, -l\Big). \tag{19}$$

Finalmente, note que el valor de t para el cual la ecuación (18) queda indeterminada, es decir, el denominador se hace cero, corresponde a los puntos en la parábola, cuyas reglas pasan por el origen y son paralelas al plano $z = -l$, por lo que dichas reglas no intersectan a la hipérbola, o podríamos decir que se intersectan en el infinito, cuando $s = \infty$.

6 Construcción del modelo

Reunidos ya los elementos analíticos para construir el modelo del paraboloide hiperbólico, pasamos a los requerimientos materiales. Necesitamos *dos* tablas cuadradas de madera que contengan un cuadrado con lados de longitud $2l$, cómo se muestra en la Figura 5, las dimensiones de los márgenes son al gusto.

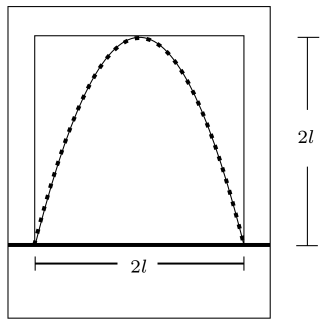


Figure 5: Dimensiones de las parábolas

En el cuadrado inscribimos a las parábolas. Cómo en la parametrización de la parábola dada por (4), el parámetro t es igual al valor de y, tenemos que los valores que toma t para recorrer la parábola inscrita en el cuadrado están en el intervalo $[-l, l]$. Si dividimos este intervalo en n partes iguales obtendremos los siguientes $n+1$ puntos

$$t_i = -l + \frac{2li}{n} \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{20}$$

Sustituyendo los valores de t_i en al parametrización (4), obtendremos $n+1$ puntos $\alpha(t_i)$ en la parábola, los cuales marcamos en *una* de las tablas y ponemos un pequeño clavo en cada uno de ellos. Está parábola será la que corresponde a $x = \phi l$.

Cómo segundo paso, necesitaremos una tabla rectangular que contenga al rectángulo de dimensiones $2l \times 2\phi l$, dónde inscribiremos a la hipérbola, cómo se muestra en la Figura 6

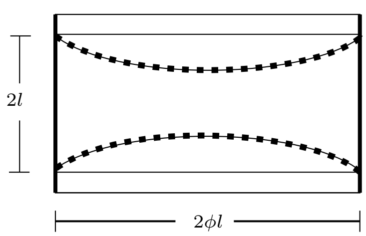


Figure 6: Dimensiones de la hipérbola

A continuación, ponemos las tablas con las parábolas frente a frente en posición vertical y las unimos mediante la tabla de la hipérbola, poniendo está entre las dos anteriores en posición horizontal y clavándolas en la parte marcada por la línea gruesa.

Para cada uno de los puntos marcados en la parábola $x = \phi l$ tenemos que saber si la regla intersecta primero a la parábola $x = -\phi l$ o a la hipérbola $z = -l$, para amarrar un hilo del punto $\alpha(t_i)$ a dicho punto de intersección. Para saber cual de estas situaciones se presenta, recuerde que cuando $s = 2$, la regla intersecta a la parábola $x = -\phi l$. Entonces, calculemos el valor s_{t_i} de acuerdo a(18) y observemos que

$$\begin{aligned} s_{t_i} > 2 &\Rightarrow \text{la regla intersecta primero a la parábola,} \\ s_{t_i} < 2 &\Rightarrow \text{la regla intersecta primero a la hipérbola} \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso para cada uno de los puntos $\alpha(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$, se obtiene el modelo del paraboloide hiperbólico.

El paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada, es decir, es generada por dos familias de rectas. Para encontrar la otra familia, únicamente tenemos que hacer el proceso simétrico respecto al eje x, es decir, la parábola que consideramos como $x = rl$ ahora será la $x = -rl$ y viceversa. De esta manera la segunda familia de hilos se entretejerá con la anterior.

Para evitar que la tensión de los hilos doble la parte superior del modelo, se recomienda clavar una varilla de madera de longitud $2\phi l$ en la parte superior de las parábolas.

7 Usos didácticos

En esta sección mencionaremos algunas formas en las que se puede usar el modelo del paraboloide hiperbólico para mostrar o explicar conceptos de geometría analítica y diferencial. No explicaremos en detalle los conceptos mencionados, por lo que se sugiere consultar [2, 3, 5] para mayor información.

Superficie. En primer lugar, el modelo es un ejemplo de superficie más compleja que los ejemplos usuales, v. g. el plano y la esfera. Para evidenciar que el modelo es una superficie (esto es, cada punto de la superficie tiene una pequeña vecindad que es homeomorfa a un disco en el plano), se colocan pequeños círculos de papel sobre la superficie y se hace notar que se ajustan casi perfectamente. Claro, entre más pequeños sean los círculos el ajuste será mucho mejor.

Superficie cuádrica. Es fácil ver qué la superficie del modelo corresponde a un paraboloide hiperbólico dado por su ecuación en forma canónica. Para mostrar esto, se sugiere calcular las curvas de nivel de la ecuación canónica y, luego, ver que corresponden a curvas de nivel del modelo. Para ver las curvas de nivel del modelo se puede hacer lo siguiente:

- Con una navaja hacer una pequeña ranura en una diapositiva totalmente opaca, de manera que sea posible proyectar un plano de luz. Si se carece de proyector de diapositivas, se puede usar una lámpara de mano potente, y un cartón con una ranura.

- En un cuarto obscuro, al cortar con dicho plano de luz al modelo, se dibujan las curvas de nivel.

Superficie reglada. Una vez que nos hemos convencido que el modelo es un paraboloide hiperbólico, es inmediato ver qué es una superficie reglada, pues está construido con hilos que representan reglas. De hecho, está superficie es doblemente reglada por qué posee dos familias de rectas que la generan.

Puntos hiperbólicos. El paraboloide hiperbólico, al ser una superficie reglada (no desarrollable), todos sus puntos son *hiperbólicos*, es decir tienen *curvatura negativa*. Intuitivamente esto quiere decir que si dibujamos un "circulo" sobre la superficie con centro el punto en cuestión, el área de dicho "circulo" será mayor que el de un círculo plano del mismo radio.
El fenómeno contrario ocurre con los puntos de una esfera, si dibujamos un "circulo" en la esfera, este tendrá menor área que un círculo plano del mismo radio. Por lo que se dice que los puntos de la esfera tienen *curvatura positiva* y son llamados *puntos elípticos*. En ambos casos, el área de los "círculos" en la silla de montar y en la esfera se acercará a la del círculo plano entre más pequeño sea el radio de éstos.

Línea de estricción. Con platilina o cinta adhesiva, únanse tres palillos por uno de sus extremos de forma que los tres sean perpendiculares entre sí. Sobre un punto de la superficie pongamos nuestro pequeño marco ortogonal, de forma que dos de los palillos sean tangentes a la superficie y el tercero sea normal a la superficie apuntando hacia afuera. Si es necesario, cierrese el ángulo de los palillos tangentes para que cada uno coincida con alguna de las dos reglas que pasan por el punto escogido. Si recorremos nuestro marco de referencia, a lo largo de una de las reglas, se podrá observar que el palillo que es normal a la superficie tendera a una dirección límite, y que si recorremos el marco de referencia sobre la misma regla pero en el sentido opuesto, la dirección límite será la misma pero en sentido contrarió. El punto que está sobre dicha regla, cuyo vector normal es perpendicular a la dirección límite se denomina *punto de estricción* y se puede pensar como el "punto medio" de la regla. Es fácil convencerse que los puntos de estricción se encuentran en las reglas horizontales que pasan por el origen. Por esta razón a estas reglas se les llama *líneas de estricción*, las cuales tiene propiedades importantes para el estudio de la superficie.

Estás son algunas de lás formas en que se puede usar el modelo del paraboloide hiperbólico, seguramente al lector se le ocurrirán muchas más. En la Figura 7 se pueden apreciar varias vistas del modelo terminado.

Figure 7: Modelo de la Silla de Montar terminado

Agradecimientos El presente artículo está basado parcialmente en notas manuscritas de Patricia Murguía. Se desarrollo como parte del curso de Geometría Diferencial, impartido por el segundo autor, en la Licenciatura de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM) y sirvió a los otros dos autores para acreditar el tema de superficies regladas en el curso antes mencionado.

El segundo autor participó previamente en la construcción de dos sillas de montar: la primera con la colaboración de Miguel Ángel Piazaña López, la cual fue donada a la Biblioteca de Instituto de Matemáticas de la UNAM, y la segunda con la colaboración de Patricia Murguía Romero, la cual fue donada a la sección de matemáticas del Museo UNIVERSUM de la UNAM.

Esta es una versión actualizada del artículo [1]. El formato en LaTeX y la re-elaboración de las figuras estuvo a cargo de Marco Antonio Gutierrez Garduño, estudiante de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, durante su Servicio Social en mayo del 2023.

Bibliografía

[1] José Luis Cisneros Molina, Ramiro Carrillo Catalán, and Noemi Santana Medina. Construyendo una silla de montar. *Arenario*, 1(1):24–38, 2001. 13

[2] Manfredo P. do Carmo. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial, 1994. 4, 11

[3] Abraham Goetz. *Introduction to Differential Geometry*. 1970. 4, 11

[4] Alfred Gray, Elsa Abbena, and Simon Salamon. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica®*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, third edition, 2006. 4

[5] Ana Irene Ramírez Galarza. *Geometría analítica. Una introducción a la geometría*. Prensas de Ciencias, 2011. 4, 11