Sabores de la Teoría de Números
II. La Teoría Analítica

Tim Gendron
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

27 junio 2017

Introducción

- La **Teoría Analítica de Números**

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.

La Teoría Analítica de Números

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.
- El tema empezó con la prueba de Dirichlet de la infinitud de primos en progresiones aritméticas

La Teoría Analítica de Números

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.
- El tema empezó con la prueba de Dirichlet de la infinitud de primos en progresiones aritméticas usando sus funciones L

La Teoría Analítica de Números

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.
- El tema empezó con la prueba de Dirichlet de la infinitud de primos en progresiones aritméticas usando sus funciones L y abarca resultados estadísticos como el Teorema del Número Primo

La Teoría Analítica de Números

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.
- El tema empezó con la prueba de Dirichlet de la infinitud de primos en progresiones aritméticas usando sus funciones L y abarca resultados estadísticos como el Teorema del Número Primo y problemas diofánticas como lo de Waring.
- En esta plática me tomo la libertad incluir en este tema la **Teoría de Números Trascendentes**

La Teoría Analítica de Números

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.
- El tema empezó con la prueba de Dirichlet de la infinitud de primos en progresiones aritméticas usando sus funciones L y abarca resultados estadísticos como el Teorema del Número Primo y problemas diofánticas como lo de Waring.
- En esta plática me tomo la libertad incluir en este tema la **Teoría de Números Trascendentes** ya que su técnica principal es la de aproximación diofántica.

La Teoría Analítica de Números

- La **Teoría Analítica de Números** se trata de la parte de la teoría de números que usa técnicas de análisis para solucionar problemas sobre enteros.
- El tema empezó con la prueba de Dirichlet de la infinitud de primos en progresiones aritméticas usando sus funciones L y abarca resultados estadísticos como el Teorema del Número Primo y problemas diofánticas como lo de Waring.
- En esta plática me tomo la libertad incluir en este tema la **Teoría de Números Trascendentes** ya que su técnica principal es la de aproximación diofántica. La última técnica será al corazón de la teoría cuántica de números.

Aproximación Diofántica

Búsqueda de una Teoría Algebraica de los Reales

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

Búsqueda de una Teoría Algebraica de los Reales

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p$$

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p$$

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

Búsqueda de una Teoría Algebraica de los Reales

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**:

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros:

Búsqueda de una Teoría Algebraica de los Reales

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros: el monoïde multiplicativo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} |\ |x| \leq 1\}$$

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros: el monoïde multiplicativo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} | \ |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros: el monoïde multiplicativo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} |\ |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

no es cerrado c.r.a. la suma.

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros: el monoïde multiplicativo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} | \ |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

no es cerrado c.r.a. la suma.

Pregunta Real. ¿Se podría definir el "anillo de $\mathbb{R}$-enteros"

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros: el monoïde multiplicativo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} | \ |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

no es cerrado c.r.a. la suma.

Pregunta Real. ¿Se podría definir el “anillo de $\mathbb{R}$-enteros” con el fin de desarrollar una “teoría de números algebraicos” para $\mathbb{R}$?

Búsqueda de una Teoría Algebraica de los Reales

Cada completación p-adica $\mathbb{Q}_p$ cuenta con sus enteros:

$$\mathbb{Z}_p = \text{completación de } \mathbb{Z} \text{ c.r.a.} |\cdot|_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\},$$

un anillo ya que $|\cdot|_p$ es **no arquimediano**: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.
Por otro lado $\mathbb{R}$ = la completación de $\mathbb{Q}$ c.r.al valor absoluto usual $|\cdot|$ no cuenta con un anillo de enteros: el monoïde multiplicativo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} | \ |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

no es cerrado c.r.a. la suma.

Pregunta Real. ¿Se podría definir el “anillo de $\mathbb{R}$-enteros” con el fin de desarrollar una “teoría de números algebraicos” para $\mathbb{R}$?

[1] Shai-Haran, M.J., *The Mysteries of the Real Prime*, **Oxford, 2003.**

Sea $\theta \in \mathbb{R}$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp \longrightarrow 0.$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^{\perp}\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^{\perp} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^{\perp}/n^i \longrightarrow \theta.$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^\perp / n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^{\perp}\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^{\perp} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^{\perp}/n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^{\perp}\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^{\perp} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^{\perp}/n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión entre el crecimiento de los “denominadores” $\{n_i\}$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^\perp / n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión entre el crecimiento de los "denominadores" $\{n_i\}$ y el decaimiento de los errores $\{\varepsilon_i\}$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^\perp / n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión entre el crecimiento de los "denominadores" $\{n_i\}$ y el decaimiento de los errores $\{\varepsilon_i\}$.

Teorema de Roth (Medalla de Fields, 1958). *Sea* $\theta \in \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^{\perp}\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^{\perp} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^{\perp}/n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión entre el crecimiento de los “denominadores” $\{n_i\}$ y el decaimiento de los errores $\{\varepsilon_i\}$.

Teorema de Roth (Medalla de Fields, 1958). *Sea $\theta \in \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$. Entonces para cada $\delta > 0$, existe un constante $C_{\theta,\delta} > 0$*

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^\perp / n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión entre el crecimiento de los "denominadores" $\{n_i\}$ y el decaimiento de los errores $\{\varepsilon_i\}$.

Teorema de Roth (Medalla de Fields, 1958). *Sea $\theta \in \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$. Entonces para cada $\delta > 0$, existe un constante $C_{\theta,\delta} > 0$ tal que*

$$C_{\theta,\delta} < \varepsilon_i n_i^{1+\delta}$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **aproximación diofántica** es una sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ tal que existe otra sucesión $\{n_i^\perp\} \subset \mathbb{Z}$ con

$$\varepsilon_i := n_i\theta - n_i^\perp \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$q_i := n_i^\perp / n^i \longrightarrow \theta.$$

Llamamos a $\{q_i\}$ la sucesión de **convergentes**. El foco de atención es la tensión entre el crecimiento de los "denominadores" $\{n_i\}$ y el decaimiento de los errores $\{\varepsilon_i\}$.

Teorema de Roth (Medalla de Fields, 1958). *Sea $\theta \in \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$. Entonces para cada $\delta > 0$, existe un constante $C_{\theta,\delta} > 0$ tal que*

$$C_{\theta,\delta} < \varepsilon_i n_i^{1+\delta}$$

para cada aproximación diofántica $\{n_i\}$ de θ.

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con parte entera a_0

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con parte entera a_0 i.e.

$$\theta = a_0 + \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, 1).$$

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con parte entera a_0 i.e.

$$\theta = a_0 + \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, 1).$$

Sea a_1 la parte entera de θ_1^{-1}, etc.

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con parte entera a_0 i.e.

$$\theta = a_0 + \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, 1).$$

Sea a_1 la parte entera de θ_1^{-1}, etc. De este modo obtenemos

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con parte entera a_0 i.e.

$$\theta = a_0 + \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, 1).$$

Sea a_1 la parte entera de θ_1^{-1}, etc. De este modo obtenemos

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

donde la expresión del lado derecho se llama la **fracción continua** de θ.

Sea $0 < \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con parte entera a_0 i.e.

$$\theta = a_0 + \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, 1).$$

Sea a_1 la parte entera de θ_1^{-1}, etc. De este modo obtenemos

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

donde la expresión del lado derecho se llama la **fracción continua** de θ. Escribimos

$$\theta := [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**,

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0,$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1,$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0,$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^{\perp} = 1,$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^{\perp} = 1, n_1^{\perp} = a_1,$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^\perp = 1, n_1^\perp = a_1, n_2^\perp = a_2 n_1^\perp + n_0^\perp,$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^\perp = 1, n_1^\perp = a_1, n_2^\perp = a_2 n_1^\perp + n_0^\perp, \ldots, n_i^\perp = a_i n_{i-1}^\perp + n_{i-2}^\perp.$$

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^\perp = 1, n_1^\perp = a_1, n_2^\perp = a_2 n_1^\perp + n_0^\perp, \ldots, n_i^\perp = a_i n_{i-1}^\perp + n_{i-2}^\perp.$$

“Mejores” puesto que para cada $m < n_i$,

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^\perp = 1, n_1^\perp = a_1, n_2^\perp = a_2 n_1^\perp + n_0^\perp, \ldots, n_i^\perp = a_i n_{i-1}^\perp + n_{i-2}^\perp.$$

"Mejores" puesto que para cada $m < n_i$, $d(\theta n_i, \mathbb{Z}) = |\varepsilon_i| < d(\theta m, \mathbb{Z})$.

La sucesión de **mejores aproximaciónes**, definida

$$n_0 = a_0, n_1 = a_1 n_0 + 1, n_2 = a_2 n_1 + n_0, \ldots, n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2},$$

es una aproximación diofántica con

$$n_0^{\perp} = 1, n_1^{\perp} = a_1, n_2^{\perp} = a_2 n_1^{\perp} + n_0^{\perp}, \ldots, n_i^{\perp} = a_i n_{i-1}^{\perp} + n_{i-2}^{\perp}.$$

"Mejores" puesto que para cada $m < n_i$, $d(\theta n_i, \mathbb{Z}) = |\varepsilon_i| < d(\theta m, \mathbb{Z})$. Los convergentes satisfacen

$$q_i = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}}.$$

Decimos que θ y η son **equivalentes**

Decimos que θ y η son **equivalentes** y escribimos $\theta \sim \eta$

Decimos que θ y η son **equivalentes** y escribimos $\theta \sim \eta$ si existe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

Decimos que θ y η son **equivalentes** y escribimos $\theta \sim \eta$ si existe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

tal que

$$\theta = A(\eta) := \frac{a\eta + b}{c\eta + d}.$$

Decimos que θ y η son **equivalentes** y escribimos $\theta \sim \eta$ si existe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

tal que

$$\theta = A(\eta) := \frac{a\eta + b}{c\eta + d}.$$

Teorema (Serret). *Sean*

$$\theta = [a_0, a_1, \dots], \ \eta = [b_0, b_1, \dots] \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Decimos que θ y η son **equivalentes** y escribimos $\theta \sim \eta$ si existe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$$

tal que

$$\theta = A(\eta) := \frac{a\eta + b}{c\eta + d}.$$

Teorema (Serret). *Sean*

$$\theta = [a_0, a_1, \ldots], \; \eta = [b_0, b_1, \ldots] \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Entonces $\theta \sim \eta$

Decimos que θ y η son **equivalentes** y escribimos $\theta \sim \eta$ si existe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

tal que

$$\theta = A(\eta) := \frac{a\eta + b}{c\eta + d}.$$

Teorema (Serret). *Sean*

$$\theta = [a_0, a_1, \dots], \ \eta = [b_0, b_1, \dots] \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Entonces $\theta \sim \eta \Leftrightarrow$ *existe* l *tal que*

$$a_m = b_{m+l}$$

para m *suficiente grande.*

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático*

Cuadrádicos y Números Mal Aproximados

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ *es eventualmente periódico.*

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea.

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \ldots]$

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \ldots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \dots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado**

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \ldots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado** si satisface el *Principio de Incertidumbre*:

Cuadrádicos y Números Mal Aproximados

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \dots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado** si satisface el *Principio de Incertidumbre*: existe un constante $\hbar_\theta > 0$

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \ldots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado** si satisface el *Principio de Incertidumbre*: existe un constante $\hbar_\theta > 0$ tal que

$$\hbar_\theta < n_i \varepsilon_i$$

para cada aproximación diofántica n_i.

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \ldots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado** si satisface el *Principio de Incertidumbre*: existe un constante $\hbar_\theta > 0$ tal que

$$\hbar_\theta < n_i \varepsilon_i$$

para cada aproximación diofántica n_i.

Teorema. $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es mal aproximado*

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \ldots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado** si satisface el *Principio de Incertidumbre*: existe un constante $\hbar_\theta > 0$ tal que

$$\hbar_\theta < n_i \varepsilon_i$$

para cada aproximación diofántica n_i.

Teorema. $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ *es mal aproximado* $\Leftrightarrow$ *existe* M *tal que* $a_i < M$ *para cada* i.

Cuadrádicos y Números Mal Aproximados

Teorema de Euler-Lagrange. $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es cuadrático* $\Leftrightarrow$ $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ *es eventualmente periódico.*

Ejemplo. Sea $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ la razón áurea. Entonces $\varphi = [1, 1, \dots]$ y $n_i = F_i$ es la sucesión de números de Fibonacci.

Decimos que $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es **mal aproximado** si satisface el *Principio de Incertidumbre*: existe un constante $\hbar_\theta > 0$ tal que

$$\hbar_\theta < n_i \varepsilon_i$$

para cada aproximación diofántica n_i.

Teorema. $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ *es mal aproximado* $\Leftrightarrow$ *existe* M *tal que* $a_i < M$ *para cada* i.

Corolario. *Los cuadráticos son mal aproximados.*

Denotemos

$$\mathsf{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Denotemos

$$\mathsf{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Conjetura. $\mathsf{Mal} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \{\textit{números cuadráticos}\}.$

Denotemos

$$\mathsf{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Conjetura. $\mathsf{Mal} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \{$*números cuadráticos*$\}$*.*

Conjetura de Littlewood. *Para cada par* $\theta, \eta \in \mathsf{Mal}$,

Denotemos

$$\mathsf{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Conjetura. $\mathsf{Mal} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \{$*números cuadráticos*$\}$*.*

Conjetura de Littlewood. *Para cada par* $\theta, \eta \in \mathsf{Mal}$*, existe* $\{n_i\}$ *una aproximación diofántica simultánea con errores* ε_i^θ*,* ε_i^η

Conjeturas

Denotemos

$$\mathsf{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Conjetura. $\mathsf{Mal} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \{$*números cuadráticos*$\}$.

Conjetura de Littlewood. *Para cada par* $\theta, \eta \in \mathsf{Mal}$, *existe* $\{n_i\}$ *una aproximación diofántica simultánea con errores* ε_i^θ, ε_i^η *tal que*

$$\lim n_i \varepsilon_i^\theta \varepsilon_i^\eta = 0.$$

Denotemos

$$\mathrm{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Conjetura. $\mathrm{Mal} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \{$*números cuadráticos*$\}$.

Conjetura de Littlewood. *Para cada par* $\theta, \eta \in \mathrm{Mal}$, *existe* $\{n_i\}$ *una aproximación diofántica simultánea con errores* ε_i^θ, ε_i^η *tal que*

$$\lim n_i \varepsilon_i^\theta \varepsilon_i^\eta = 0.$$

Teorema (Einsiedler-Katok-Lindenstrauss (Medalla de Fields, 2010)). *La dimensión de Hausdorff de los pares* $(\theta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ *que contradicen Littlewood es cero.*

Denotemos

$$\text{Mal} = \{\theta \text{ mal aproximado}\}.$$

Conjetura. $\text{Mal} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \{$*números cuadráticos*$\}$.

Conjetura de Littlewood. *Para cada par* $\theta, \eta \in \text{Mal}$, *existe* $\{n_i\}$ *una aproximación diofántica simultánea con errores* ε_i^θ, ε_i^η *tal que*

$$\lim n_i \varepsilon_i^\theta \varepsilon_i^\eta = 0.$$

Teorema (Einsiedler-Katok-Lindenstrauss (Medalla de Fields, 2010)). *La dimensión de Hausdorff de los pares* $(\theta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ *que contradicen Littlewood es cero.*

[2] Lang, Serge, *Introduction to Diophantine Approximations*, Springer-Verlag, 2003.

[3] , Queffélec, Martine, An Introduction to Littlewood's conjecture, *Seminaires & Congrès* **20**, (2009), 129–152.

Grupos de Aproximaciones Diofánticas

Un **ultrafiltro**

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles")

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$${}^*\mathbb{Z}$$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$ {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} $$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$ {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} / \sim, $$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$ {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim, \quad \{n_i\} \sim \{n_i'\} $$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$ {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim, \quad \{n_i\} \sim \{n'_i\} \Leftrightarrow \{i : \ n_i = n'_i\} \in \mathfrak{u}. $$

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim, \quad \{n_i\} \sim \{n_i'\} \Leftrightarrow \{i : \ n_i = n_i'\} \in \mathfrak{u}.$$

Hay un encaje

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow {}^*\mathbb{Z}$$

por sucesiónes constantes.

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$ {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim, \quad \{n_i\} \sim \{n_i'\} \Leftrightarrow \{i : \ n_i = n_i'\} \in \mathfrak{u}. $$

Hay un encaje

$$ \mathbb{Z} \hookrightarrow {}^*\mathbb{Z} $$

por sucesiónes constantes. ${}^*\mathbb{Z}$ es un **modelo no estándar** de $\mathbb{Z}$:

Un **ultrafiltro** es una colección $\mathfrak{u}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ("colas admisibles") tal que

1. $\mathfrak{u}$ es cerrado c.r.a. intersección.
2. Si $X \in \mathfrak{u}$ y $Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathfrak{u}$.
3. $\emptyset \notin \mathfrak{u}$.
4. $\mathfrak{u}$ es maximal.

La **ultrapotencia** de $\mathbb{Z}$ es

$$ {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{Z}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim, \quad \{n_i\} \sim \{n_i'\} \Leftrightarrow \{i : \; n_i = n_i'\} \in \mathfrak{u}. $$

Hay un encaje

$$ \mathbb{Z} \hookrightarrow {}^*\mathbb{Z} $$

por sucesiónes constantes. ${}^*\mathbb{Z}$ es un **modelo no estándar** de $\mathbb{Z}$: satisface las mismas afirmaciones de la lógica del primer orden que $\mathbb{Z}$.

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$:

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$${}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}}$$

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$ {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{ {}^*r \in \mathbb{R} | $$

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$${}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{{}^*r \in \mathbb{R}|\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$${}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}} = \{{}^*r \in \mathbb{R} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es

Sea $^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$^*\mathbb{R}_{\text{fin}} = \{^*r \in \mathbb{R} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$^*\mathbb{R}_{\varepsilon}$$

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$ {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{{}^*r \in \mathbb{R} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\} $$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$ {}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{{}^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} | $$

Sea $^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$^*\mathbb{R}_{\text{fin}} = \{^*r \in \mathbb{R}|\ ^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}|\ ^*r \text{ es clase de una sucesión } \to 0\}.$$

Los Reales No estándares

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$${}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{{}^*r \in \mathbb{R} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$${}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{{}^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión } \to 0\}.$$

Tenemos

$${}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}}/{}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \cong \mathbb{R}.$$

Sea $^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{^*r \in \mathbb{R} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión } \rightarrow 0\}.$$

Tenemos

$$^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}}/^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \cong \mathbb{R}.$$

El cociente

$$^\bullet\mathbb{R} := {}^*\mathbb{R}/^*\mathbb{R}_{\varepsilon}$$

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$${}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{{}^*r \in \mathbb{R} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$${}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{{}^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión } \rightarrow 0\}.$$

Tenemos

$${}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}}/{}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \cong \mathbb{R}.$$

El cociente

$${}^\bullet\mathbb{R} := {}^*\mathbb{R}/{}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \supset \mathbb{R},$$

Sea $^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{^*r \in \mathbb{R} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión } \to 0\}.$$

Tenemos

$$^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}}/{}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \cong \mathbb{R}.$$

El cociente

$$^\bullet\mathbb{R} := {}^*\mathbb{R}/{}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \supset \mathbb{R},\ ^*\mathbb{Z}$$

Sea ${}^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_{\mathfrak{u}}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$ {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} = \{ {}^*r \in \mathbb{R} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión acotada} \} $$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$ {}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{ {}^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} |\ {}^*r \text{ es clase de una sucesión } \to 0 \}. $$

Tenemos

$$ {}^*\mathbb{R}_{\mathsf{fin}} / {}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \cong \mathbb{R}. $$

El cociente

$$ {}^{\bullet}\mathbb{R} := {}^*\mathbb{R} / {}^*\mathbb{R}_{\varepsilon} \supset \mathbb{R},\ {}^*\mathbb{Z} $$

se llama los **reales extendidos**.

Los Reales No estándares

Sea $^*\mathbb{R} = {}^*\mathbb{R}_\mathfrak{u}$ la ultrapotencia de $\mathbb{R}$ c.r.a. $\mathfrak{u}$: un campo que cuenta con un anillo local

$$^*\mathbb{R}_{\text{fin}} = \{^*r \in \mathbb{R} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión acotada}\}$$

cuyo ideal máximo es el **ideal de infinitesimales**

$$^*\mathbb{R}_\varepsilon = \{^*r \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}} |\ ^*r \text{ es clase de una sucesión } \to 0\}.$$

Tenemos

$$^*\mathbb{R}_{\text{fin}}/{}^*\mathbb{R}_\varepsilon \cong \mathbb{R}.$$

El cociente

$$^\bullet\mathbb{R} := {}^*\mathbb{R}/{}^*\mathbb{R}_\varepsilon \supset \mathbb{R},\ {}^*\mathbb{Z}$$

se llama los **reales extendidos**. No es campo sino un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

Decimos que ${}^{*}n \in {}^{*}\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica**

Decimos que ${}^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^*n^{\perp} \in {}^*\mathbb{Z}$

Decimos que ${}^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^*n^{\perp} \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que

$$ {}^*\varepsilon := {}^*n\theta - {}^*n^{\perp} $$

Grupos de Aproximaciones Diofánticas

Decimos que ${}^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^*n^{\perp} \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que

$$ {}^*\varepsilon := {}^*n\theta - {}^*n^{\perp} \in {}^*\mathbb{R}_{\varepsilon}. $$

Decimos que ${}^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^*n^{\perp} \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que

$$ {}^*\varepsilon := {}^*n\theta - {}^*n^{\perp} \in {}^*\mathbb{R}_{\varepsilon}. $$

El conjunto

$$ {}^*\mathbb{Z}(\theta) $$

Decimos que ${}^{*}n \in {}^{*}\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^{*}n^{\perp} \in {}^{*}\mathbb{Z}$ tal que

$$ {}^{*}\varepsilon := {}^{*}n\theta - {}^{*}n^{\perp} \in {}^{*}\mathbb{R}_{\varepsilon}. $$

El conjunto

$$ {}^{*}\mathbb{Z}(\theta) = \{{}^{*}n \in {}^{*}\mathbb{Z} | $$

Decimos que ${}^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^*n^\perp \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que

$$ {}^*\varepsilon := {}^*n\theta - {}^*n^\perp \in {}^*\mathbb{R}_\varepsilon . $$

El conjunto

$$ {}^*\mathbb{Z}(\theta) = \{ {}^*n \in {}^*\mathbb{Z} | \ {}^*n \text{ una aproximación diofántica} \} $$

Introducción
Aproximación Diofántica
Grupos de Aproximaciones Diofánticas
Modelos No estándares
Los Reales No estándares
Grupos de Aproximaciones Diofánticas
Foliaciones de Kronecker
${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ Como Grupo Fundamental
Aritmética
$\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ Como Grupo de Galois
Funciones Zeta y Funciones L
Números Nolineales

Decimos que ${}^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe ${}^*n^\perp \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que

$$ {}^*\varepsilon := {}^*n\theta - {}^*n^\perp \in {}^*\mathbb{R}_\varepsilon . $$

El conjunto

$$ {}^*\mathbb{Z}(\theta) = \{ {}^*n \in {}^*\mathbb{Z} |\ {}^*n \text{ una aproximación diofántica} \} $$

es un subgrupo de ${}^*\mathbb{Z}$,

Grupos de Aproximaciones Diofánticas

Decimos que $^*n \in {}^*\mathbb{Z}$ es una **aproximación diofántica** si existe $^*n^\perp \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que

$$^*\varepsilon := {}^*n\theta - {}^*n^\perp \in {}^*\mathbb{R}_\varepsilon .$$

El conjunto

$$^*\mathbb{Z}(\theta) = \{{}^*n \in {}^*\mathbb{Z} |\ {}^*n \text{ una aproximación diofántica}\}$$

es un subgrupo de $^*\mathbb{Z}$, un ideal $\Leftrightarrow \theta \in \mathbb{Q}$.

Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro y $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro y $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. La **foliación de Kronecker**

$$\mathcal{F}(\theta)$$

Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro y $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. La **foliación de Kronecker**

$$\mathcal{F}(\theta)$$

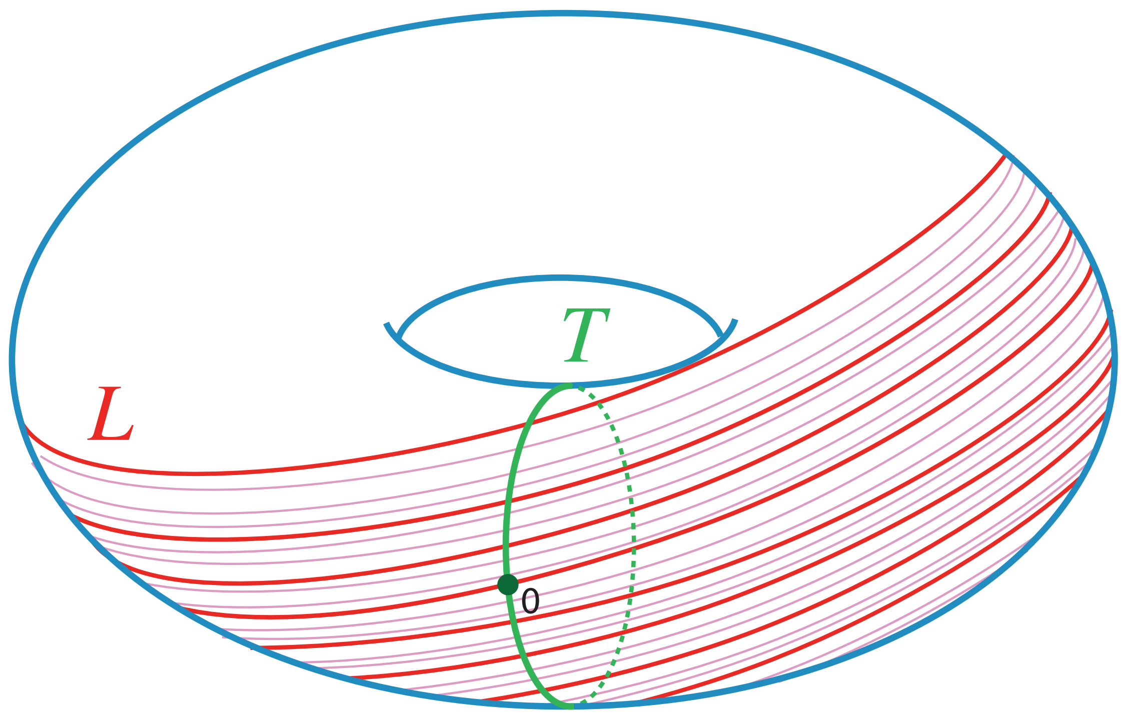
es $\mathbb{T}^2$ dotado con la imagen de la familia de lineas de pendiente θ.

Foliaciones de Kronecker

Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro y $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. La **foliación de Kronecker**

$$\mathcal{F}(\theta)$$

es $\mathbb{T}^2$ dotado con la imagen de la familia de lineas de pendiente θ.



Podemos identificar el cociente ${}^{\bullet}\mathbb{R}/{}^{*}\mathbb{Z}$

Podemos identificar el cociente ${}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Podemos identificar el cociente ${}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea* $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Podemos identificar el cociente ${}^{\bullet}\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea* $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces*

$$^{\bullet}\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta).$$

Podemos identificar el cociente $^\bullet\mathbb{R}/^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces*

$$^\bullet\mathbb{R}/^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta).$$

Mas precisamente, las "hojas" $^\bullet r + \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$

Podemos identificar el cociente $^\bullet\mathbb{R}/^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea* $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces*

$$^\bullet\mathbb{R}/^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta).$$

Mas precisamente, las "hojas" $^\bullet r + \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$ *mapean a las hojas de* $\mathcal{F}(\theta)$.

Podemos identificar el cociente ${}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea* $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces*

$$ {}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta). $$

Mas precisamente, las "hojas" ${}^\bullet r + \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$ *mapean a las hojas de* $\mathcal{F}(\theta)$.

La proyección $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ induce un "cubriente generalizado"

$$ \mathcal{F}(\theta) \to \mathbb{S}^1 $$

Podemos identificar el cociente ${}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces*

$$ {}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta). $$

Mas precisamente, las “hojas” ${}^\bullet r + \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$ mapean a las hojas de $\mathcal{F}(\theta)$.

La proyección $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ induce un “cubriente generalizado”

$$ \mathcal{F}(\theta) \rightarrow \mathbb{S}^1 $$

indexado por el subgrupo ${}^*\mathbb{Z}(\theta) \subset {}^*\mathbb{Z}$.

Podemos identificar el cociente ${}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces*

$$ {}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta). $$

Mas precisamente, las “hojas” ${}^\bullet r + \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$ mapean a las hojas de $\mathcal{F}(\theta)$.

La proyección $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ induce un “cubriente generalizado”

$$ \mathcal{F}(\theta) \to \mathbb{S}^1 $$

indexado por el subgrupo ${}^*\mathbb{Z}(\theta) \subset {}^*\mathbb{Z}$. Así que ${}^*\mathbb{Z}$ proporciona una nueva teoría de grupo fundamental

Podemos identificar el cociente ${}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema. *Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces*

$$^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong \mathcal{F}(\theta).$$

Mas precisamente, las "hojas" ${}^\bullet r + \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$ mapean a las hojas de $\mathcal{F}(\theta)$.

La proyección $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ induce un "cubriente generalizado"

$$\mathcal{F}(\theta) \to \mathbb{S}^1$$

indexado por el subgrupo ${}^*\mathbb{Z}(\theta) \subset {}^*\mathbb{Z}$. Así que ${}^*\mathbb{Z}$ proporciona una nueva teoría de grupo fundamental en la cual

$$\pi_1\mathcal{F}(\theta) = {}^*\mathbb{Z}(\theta).$$

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son "aproximaciones diofánticas" de ideales.

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son “aproximaciones diofánticas” de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa “parcial” para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son “aproximaciones diofánticas” de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa “parcial” para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son “aproximaciones diofánticas” de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa “parcial” para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

$$\{{}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu}\},$$

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son “aproximaciones diofánticas” de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa “parcial” para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

$$\{{}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu}\},$$

donde μ acota el crecimiento de ${}^*n$

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son “aproximaciones diofánticas” de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa “parcial” para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

$$\{{}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu}\},$$

donde μ acota el crecimiento de ${}^*n$ y ν acota el decaimiento de ${}^*\varepsilon$.

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son "aproximaciones diofánticas" de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa "parcial" para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

$$\{{}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu}\},$$

donde μ acota el crecimiento de ${}^*n$ y ν acota el decaimiento de ${}^*\varepsilon$. Luego podemos formar los productos parciales

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son “aproximaciones diofánticas” de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa “parcial” para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

$$\{{}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu}\},$$

donde μ acota el crecimiento de ${}^*n$ y ν acota el decaimiento de ${}^*\varepsilon$. Luego podemos formar los productos parciales

$${}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu} \cdot {}^*\mathbb{Z}(\eta)^{\nu}_{\mu} \subset {}^*\mathbb{Z}(\theta\eta).$$

[4] Gendron, T.M., The Algebraic Theory of the Fundamental Germ, *Bull. Braz. Math. Soc.* **37** (2006), 49–87.

Idea. Los ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ son "aproximaciones diofánticas" de ideales. Desarrollar una aritmética multiplicativa "parcial" para los grupos ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$.

Existe una bifiltración por subgrupos de ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$,

$$\{{}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu}\},$$

donde μ acota el crecimiento de ${}^*n$ y ν acota el decaimiento de ${}^*\varepsilon$. Luego podemos formar los productos parciales

$${}^*\mathbb{Z}(\theta)^{\mu}_{\nu} \cdot {}^*\mathbb{Z}(\eta)^{\nu}_{\mu} \subset {}^*\mathbb{Z}(\theta\eta).$$

[4] Gendron, T.M., The Algebraic Theory of the Fundamental Germ, *Bull. Braz. Math. Soc.* **37** (2006), 49–87.

[5] Gendron, T.M., The Arithmetic of Diophantine Approximation Groups I: Linear Theory, arXiv:1208.4334.

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$,

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los "ideales" ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los “ideales” ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ de modo parecido como lo de los grupos de Galois clásicos,

$\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ Como Grupo de Galois

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los "ideales" ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ de modo parecido como lo de los grupos de Galois clásicos, que permutan los primos $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}$.

$\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ Como Grupo de Galois

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los "ideales" ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ de modo parecido como lo de los grupos de Galois clásicos, que permutan los primos $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}$.

Nota. Sea Mod $:= (\mathbb{C} - \mathbb{R})/\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ la **superficie modular**.

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los "ideales" ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ de modo parecido como lo de los grupos de Galois clásicos, que permutan los primos $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}$.

Nota. Sea $\mathrm{Mod} := (\mathbb{C} - \mathbb{R})/\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ la **superficie modular**. Existe un biholomorfismo

$$j : \mathrm{Mod} \cup \{\infty\} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los “ideales” ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ de modo parecido como lo de los grupos de Galois clásicos, que permutan los primos $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}$.

Nota. Sea $\mathrm{Mod} := (\mathbb{C} - \mathbb{R})/\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ la **superficie modular**. Existe un biholomorfismo

$$j : \mathrm{Mod} \cup \{\infty\} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

dado por el **invariante modular** j.

Si $\theta \sim \eta$ por $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, A induce un isomorfismo

$$A : {}^*\mathbb{Z}(\theta) \cong {}^*\mathbb{Z}(\eta).$$

Así que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ permuta los "ideales" ${}^*\mathbb{Z}(\theta)$ de modo parecido como lo de los grupos de Galois clásicos, que permutan los primos $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}$.

Nota. Sea $\mathrm{Mod} := (\mathbb{C} - \mathbb{R})/\mathrm{GL}_2\mathbb{Z}$ la **superficie modular**. Existe un biholomorfismo

$$j : \mathrm{Mod} \cup \{\infty\} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

dado por el **invariante modular** j. Así que podemos definir

$$\pi_1^{\mathrm{geom}}\hat{\mathbb{C}} := \mathrm{GL}_2\mathbb{Z}.$$

Funciones Zeta y Funciones L

La **función zeta de Riemann** es

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

La **función zeta de Riemann** es

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

una función holomorfa y no cero en el plano derecho $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$.

La **función zeta de Riemann** es

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

una función holomorfa y no cero en el plano derecho $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Fórmula Producta de Euler. *En* $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

La **función zeta de Riemann** es

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

una función holomorfa y no cero en el plano derecho $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Fórmula Producta de Euler. *En* $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

$\zeta(s)$ tiene una continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$ con un polo simple en $s = 1$.

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Teorema (Eccuación Funcional)**.** $\hat{\zeta}(s)$ *satisface*

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Teorema (Eccuación Funcional). $\hat{\zeta}(s)$ *satisface*

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Tomando en cuenta que el eje de simetría de la eccuación funcional es $\mathrm{Re}(z) = 1/2$,

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Teorema (Eccuación Funcional). $\hat{\zeta}(s)$ *satisface*

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Tomando en cuenta que el eje de simetría de la eccuación funcional es $\mathrm{Re}(z) = 1/2$, Riemann conjeturó:

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Teorema (Eccuación Funcional). $\hat{\zeta}(s)$ *satisface*

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Tomando en cuenta que el eje de simetría de la eccuación funcional es $\mathrm{Re}(z) = 1/2$, Riemann conjeturó:

La Hipótesis de Riemann. *Los ceros de $\zeta(s)$ en $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ están ubicados a lo largo de la linea $\mathrm{Re}(z) = 1/2$.*

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Teorema (Eccuación Funcional). $\hat{\zeta}(s)$ *satisface*

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Tomando en cuenta que el eje de simetría de la eccuación funcional es $\mathrm{Re}(z) = 1/2$, Riemann conjeturó:

La Hipótesis de Riemann. *Los ceros de* $\zeta(s)$ *en* $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ *están ubicados a lo largo de la linea* $\mathrm{Re}(z) = 1/2$.

Nota. A. Weil demostró en 1943 la análoga de la Hipótesis de Riemann para $K/\mathbb{F}(T)$

Consideremos la variación

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Teorema (Eccuación Funcional). $\hat{\zeta}(s)$ *satisface*

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Tomando en cuenta que el eje de simetría de la eccuación funcional es $\mathrm{Re}(z) = 1/2$, Riemann conjeturó:

La Hipótesis de Riemann. *Los ceros de $\zeta(s)$ en $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ están ubicados a lo largo de la linea $\mathrm{Re}(z) = 1/2$.*

Nota. A. Weil demostró en 1943 la análoga de la Hipótesis de Riemann para $K/\mathbb{F}(T)$ usando la geometría de la curva Σ_K asociada.

Sea

$$\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

un homomorfismo.

Sea

$$\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

un homomorfismo. El **carácter de Dirichlet** asociado es la función completamente multiplicativa

$$\chi : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{C},$$

Sea

$$\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

un homomorfismo. El **carácter de Dirichlet** asociado es la función completamente multiplicativa

$$\chi : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{C}, \quad \chi(n) = \begin{cases} \bar{\chi}(n \mod m\mathbb{Z}) & \text{si } (n, m) = 1 \\ 0 & \text{si } (n, m) \neq 1. \end{cases}$$

Sea

$$\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

un homomorfismo. El **carácter de Dirichlet** asociado es la función completamente multiplicativa

$$\chi : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{C}, \quad \chi(n) = \begin{cases} \bar{\chi}(n \mod m\mathbb{Z}) & \text{si } (n, m) = 1 \\ 0 & \text{si } (n, m) \neq 1. \end{cases}$$

La **función L de Dirichlet** es

$$L(\chi, s) = \sum \chi(n) n^{-s}.$$

Funciones L de Dirichlet

Sea

$$\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

un homomorfismo. El **carácter de Dirichlet** asociado es la función completamente multiplicativa

$$\chi : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{C}, \quad \chi(n) = \begin{cases} \bar{\chi}(n \mod m\mathbb{Z}) & \text{si } (n,m) = 1 \\ 0 & \text{si } (n,m) \neq 1. \end{cases}$$

La **función L de Dirichlet** es

$$L(\chi, s) = \sum \chi(n) n^{-s}.$$

Usando sus funciones L, Dirichlet demostró el famoso

Teorema de Dirichlet Sobre Primos en Progresiones Aritméticas. *Para cada* $a, m \in \mathbb{N}$, $(a,m) = 1$, *existe un número infinito de primos* p *con* $p \equiv a \mod m$.

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$.

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})},$$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}] = d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}),$$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}] = d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K}=\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}):=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}] = d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s = 1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)$$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}] = d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s = 1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_K(s) = \frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula,

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula, $t=2$ o 2π si $K\subset\mathbb{R}$ o no,

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K}=\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})},\quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}):=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula, $t=2$ o 2π si $K\subset\mathbb{R}$ o no, $w_K=\#$ raices de 1

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K}=\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})},\quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}):=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula, $t=2$ o 2π si $K\subset\mathbb{R}$ o no, $w_K=\#$ raices de 1 y

- $\mathbb{T}_K=\mathbb{C}^d/\mathcal{O}_K$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K}=\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})},\quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}):=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. *$\zeta_K(s)$ tiene una continuación meromorfa en $\mathbb{C}$ con un polo simple en $s=1$ cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula, $t=2$ o 2π si $K\subset\mathbb{R}$ o no, $w_K=\#$ raices de 1 y

- $\mathbb{T}_K=\mathbb{C}^d/\mathcal{O}_K$ es el **toro de Minkowski**.
-

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K}=\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})},\quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}):=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula, $t=2$ o 2π si $K\subset\mathbb{R}$ o no, $w_K=\#$ raices de 1 y

- $\mathbb{T}_K=\mathbb{C}^d/\mathcal{O}_K$ es el **toro de Minkowski**.
- $\mathcal{T}_K=V/(\mathcal{O}_K^\times/(\text{torsion}))$

Sea $K/\mathbb{Q}$ de Galois, $[K:\mathbb{Q}]=d$. La función

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K}=\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})},\quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}):=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a}),$$

se llama la **función zeta de Dedekind**.

Fórmula del Número de Clase. $\zeta_K(s)$ *tiene una continuación meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $s=1$ *cuyo residuo es:*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{t^d h_K \mathrm{Vol}(\mathcal{T}_K)}{w_K \mathrm{Vol}(\mathbb{T}_K)}.$$

En la fórmula, $t=2$ o 2π si $K\subset\mathbb{R}$ o no, $w_K=\#$ raices de 1 y

- $\mathbb{T}_K=\mathbb{C}^d/\mathcal{O}_K$ es el **toro de Minkowski**.
- $\mathcal{T}_K=V/(\mathcal{O}_K^\times/(\text{torsion}))$ es el **“toro de Dirichlet”**.

Números Nolineales

Aunque las funciones zeta de Dedekind y las funciones L de Dirichlet son objetos analíticos,

Aunque las funciones zeta de Dedekind y las funciones L de Dirichlet son objetos analíticos, están llenas con invariantes y información profunda sobre la aritmética de campos de números algebraicos.

Aunque las funciones zeta de Dedekind y las funciones L de Dirichlet son objetos analíticos, están llenas con invariantes y información profunda sobre la aritmética de campos de números algebraicos.

Idea. Para cada $K/\mathbb{Q}$, incorporar estas funciones como "números"

Aunque las funciones zeta de Dedekind y las funciones L de Dirichlet son objetos analíticos, están llenas con invariantes y información profunda sobre la aritmética de campos de números algebraicos.

Idea. Para cada $K/\mathbb{Q}$, incorporar estas funciones como “números” en un objeto extensión que generaliza el concepto de campo.

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

$$(f \oplus g)(z)$$

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

$$(f \oplus g)(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q z^q \cdot \sum_{q\in\mathbb{Q}} b_q z^q$$

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

$$(f \oplus g)(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q \cdot \sum_{q \in \mathbb{Q}} b_q z^q = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \left(\sum_{q_1 + q_2 = q} a_{q_1} b_{q_2} \right) z^q$$

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

$$(f \oplus g)(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q \cdot \sum_{q \in \mathbb{Q}} b_q z^q = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \left(\sum_{q_1 + q_2 = q} a_{q_1} b_{q_2} \right) z^q$$

y el **producto de Dirichlet**:

$$(f \otimes g)(z)$$

Producto de Cauchy y Dirichlet

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

$$(f \oplus g)(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q z^q \cdot \sum_{q \in \mathbb{Q}} b_q z^q = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \left(\sum_{q_1 + q_2 = q} a_{q_1} b_{q_2} \right) z^q$$

y el **producto de Dirichlet**:

$$(f \otimes g)(z) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \left(\sum_{q_1 q_2 = q} a_{q_1} b_{q_2} \right) z^q$$

Producto de Cauchy y Dirichlet

Sea $L^2[\mathbb{Q}]$ el espacio de series de Puisieux de cuadrada sumable

$$f(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q z^q, \quad z^q := \exp(2\pi i q s).$$

En $L^2[\mathbb{Q}]$ definimos el **producto de Cauchy**:

$$(f \oplus g)(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q z^q \cdot \sum_{q\in\mathbb{Q}} b_q z^q = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \left(\sum_{q_1+q_2=q} a_{q_1} b_{q_2} \right) z^q$$

y el **producto de Dirichlet**:

$$(f \otimes g)(z) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \left(\sum_{q_1 q_2=q} a_{q_1} b_{q_2} \right) z^q$$

siempre que las sumas en los lados derecho convergen.

Campos de Números Nolineales

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos.

Campos de Números Nolineales

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}],$$

Campos de Números Nolineales

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}], \quad q \mapsto z^q.$$

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}], \quad q \mapsto z^q.$$

Nota. $\otimes$ NO distribuye sobre $\oplus$.

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}], \quad q \mapsto z^q.$$

Nota. $\otimes$ NO distribuye sobre $\oplus$. Llamamos a $W[\mathbb{Q}]$ un **campo nolineal de números**.

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}], \quad q \mapsto z^q.$$

Nota. $\otimes$ NO distribuye sobre $\oplus$. Llamamos a $W[\mathbb{Q}]$ un **campo nolineal de números**.

Nota. El producto de Dirichlet corresponde al producto ordinario de funciones L de Dirichlet:

Campos de Números Nolineales

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}], \quad q \mapsto z^q.$$

Nota. $\otimes$ NO distribuye sobre $\oplus$. Llamamos a $W[\mathbb{Q}]$ un **campo nolineal de números**.

Nota. El producto de Dirichlet corresponde al producto ordinario de funciones L de Dirichlet:

$$\sum a_n n^{-s} \cdot \sum b_n n^{-s} = \sum_n \Big(\sum_{n_1 n_2 = n} a_{n_1} b_{n_1} \Big) n^{-s}$$

Hay un subespacio $W[\mathbb{Q}] \subset L^2[\mathbb{Q}]$ donde $\oplus$ y $\otimes$ son siempre definidos. $W[\mathbb{Q}]$ es un doble algebra y hay un encaje monomorfico

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow W[\mathbb{Q}], \quad q \mapsto z^q.$$

Nota. $\otimes$ NO distribuye sobre $\oplus$. Llamamos a $W[\mathbb{Q}]$ un **campo nolineal de números**.

Nota. El producto de Dirichlet corresponde al producto ordinario de funciones L de Dirichlet:

$$\sum a_n n^{-s} \cdot \sum b_n n^{-s} = \sum_n \Big(\sum_{n_1 n_2 = n} a_{n_1} b_{n_1} \Big) n^{-s}$$

así que toda “la aritmética” de funciones L se está incorporada en $W[\mathbb{Q}]$.

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$.

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

es un $\otimes$ grupo

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

es un $\otimes$ grupo que admite un flujo

$$\Psi : \mathbb{R}^\times \times \mathbf{D}[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathbf{D}[\mathbb{N}]$$

por $\otimes$ homomorfismos:

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

es un $\otimes$ grupo que admite un flujo

$$\Psi : \mathbb{R}^{\times} \times \mathbf{D}[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathbf{D}[\mathbb{N}]$$

por $\otimes$ homomorfismos: el **flujo de Dirichlet**.

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

es un $\otimes$ grupo que admite un flujo

$$\Psi : \mathbb{R}^\times \times \mathbf{D}[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathbf{D}[\mathbb{N}]$$

por $\otimes$ homomorfismos: el **flujo de Dirichlet**. Los elementos que están en un periodo de Ψ forman un subgrupo $\mathbf{P}[\mathbb{N}]$

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

es un $\otimes$ grupo que admite un flujo

$$\Psi : \mathbb{R}^\times \times \mathbf{D}[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathbf{D}[\mathbb{N}]$$

por $\otimes$ homomorfismos: el **flujo de Dirichlet**. Los elementos que están en un periodo de Ψ forman un subgrupo $\mathbf{P}[\mathbb{N}]$ y el cociente

$$\mathfrak{C}^{\mathrm{ap}}[\mathbb{N}] := \mathbf{D}[\mathbb{N}]/\mathbf{P}[\mathbb{N}]$$

Grupo de Clases de Aperiodos

Sea $D[\mathbb{N}] \subset W[\mathbb{Q}]$ el subespacio de series indexados por $\mathbb{N}$ y con un inverso para $\otimes$. La proyectivizacion

$$\mathbf{D}[\mathbb{N}] := (D[\mathbb{N}] - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

es un $\otimes$ grupo que admite un flujo

$$\Psi : \mathbb{R}^\times \times \mathbf{D}[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathbf{D}[\mathbb{N}]$$

por $\otimes$ homomorfismos: el **flujo de Dirichlet**. Los elementos que están en un periodo de Ψ forman un subgrupo $\mathbf{P}[\mathbb{N}]$ y el cociente

$$\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}] := \mathbf{D}[\mathbb{N}]/\mathbf{P}[\mathbb{N}]$$

es el **grupo de clases de aperiodos**.

Un **carácter idelico**

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

El conjunto de caracteres idelicos es un grupo

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}).$$

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

El conjunto de caracteres idelicos es un grupo

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}).$$

Teorema (Gendron-Verjovsky). *Cada carácter idelico induce un automorfismo de $\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]$*

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

El conjunto de caracteres idelicos es un grupo

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}).$$

Teorema (Gendron-Verjovsky). *Cada carácter idelico induce un automorfismo de $\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]$ y hay un monomorfismo*

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]).$$

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

El conjunto de caracteres idelicos es un grupo

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}).$$

Teorema (Gendron-Verjovsky). *Cada carácter idelico induce un automorfismo de $\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]$ y hay un monomorfismo*

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]).$$

Idea. Usar el grupo no abeliano $\mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}])$ para indexar extensiones de Galois no abelianas de $\mathbb{Q}$

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

El conjunto de caracteres idelicos es un grupo

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}).$$

Teorema (Gendron-Verjovsky). *Cada carácter idelico induce un automorfismo de $\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]$ y hay un monomorfismo*

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]).$$

Idea. Usar el grupo no abeliano $\mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}])$ para indexar extensiones de Galois no abelianas de $\mathbb{Q}$ i.e. como un $\pi_1\mathbb{Q}$ para una teoría de campos de clase no abeliana.

Un **carácter idelico** es un homomorfismo

$$\chi : C_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

El conjunto de caracteres idelicos es un grupo

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}).$$

Teorema (Gendron-Verjovsky). *Cada carácter idelico induce un automorfismo de $\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]$ y hay un monomorfismo*

$$\mathsf{Car}(C_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}]).$$

Idea. Usar el grupo no abeliano $\mathsf{Aut}(\mathfrak{C}^{\mathsf{ap}}[\mathbb{N}])$ para indexar extensiones de Galois no abelianas de $\mathbb{Q}$ i.e. como un $\pi_1\mathbb{Q}$ para una teoría de campos de clase no abeliana.

[4] Gendron, T.M. & Verjovsky, A., *Nonlinear Number Fields*, Boletin SMM, 2015.