LA INTEGRAL LOGARÍTMICA Y APLICACIONES

MARCOS LÓPEZ GARCÍA

Abstract. En esta nota estudiamos algunas consecuencias de que una función tenga integral logarítmica finita y mostramos algunas aplicaciones de este hecho.

1. Preliminares

En el desarrollo de estas notas usaremos algunos resultados de Variable Compleja, una buena referencia es el texto [3]. Los resultados más avanzados se pueden encontrar en el texto [4].

El objetivo principal del minicurso es mostrar que bajo ciertas suposiciones sobre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x)dx \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica si $u \in C^2(\Omega)$ y satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Decimos que f es analítica en Ω, denotado por $f \in hol(\Omega)$, si es analítica en cada punto de Ω.

Observación 1. *Si $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica y $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es armónica, entonces $u \circ \psi$ es armónica en $\mathbb{D}$. (Ejercicio)*

Si f es analítica en una vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$, la fórmula integral de Cauchy (ver [3, pág. 46]) implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

En particular, para $z = 0$ y $\xi = e^{i\theta}$ tenemos $d\xi = ie^{i\theta}d\theta$ y

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\theta. \tag{1}$$

Dada la descomposición $f(z) = u(z) + iv(z)$, es decir $u = \Re f, v = \Im f$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann, ver [3, pág. 14]. Ahora es claro que u y v son funciones armónicas en Ω que toman valores reales.

Ejemplo 2. *Para cada $t \in (-\pi, \pi)$ la función*

$$R_t(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

es analítica en $\mathbb{D}$. Dado que

$$R_t(z) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} + i\frac{2\Im(ze^{-it})}{|z - e^{it}|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

se sigue que las funciones real-valuadas de la derecha son armónicas.

Sea $f \in L^1_{\mathbb{R}}(-\pi, \pi)$. En el Teorema 13 mostramos que la función

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t)dt, \quad z \in \mathbb{D},$$

es analítica en $\mathbb{D}$. Así que las funciones

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} f(t)dt, \quad \widetilde{u}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\Im(ze^{-it})}{|z - e^{it}|^2} f(t)dt \tag{2}$$

son armónicas en $\mathbb{D}$ y $F = u + i\widetilde{u}$. En este caso decimos que u es la transformada de Poisson de f y $\widetilde{u}$ es la transformada de Hilbert de f.

El siguiente resultado muestra que, bajo ciertas condiciones, una función armónica se reconstruye a través de sus valores en la frontera.

Teorema 3. *(Fórmula de Poisson) Sea u una función armónica en una vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} u(e^{it})dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Proof. Podemos suponer que la función u toma valores reales. Sea v una función armónica en una vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$ tal que $f = u + iv$ es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$, ver [3, pág. 209]. Tomando la parte real en (1) obtenemos

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})d\theta. \tag{3}$$

Así que el resultado se cumple para $z = 0$. Para $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ consideramos la función analítica $\psi_z : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dada por

$$\psi_z(w) = \frac{w + z}{\overline{z}w + 1}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Es fácil ver que

$$\psi_z^{-1}(\eta) = \frac{\eta - z}{-\overline{z}\eta + 1}, \quad \eta \in \mathbb{D}$$

y $\psi_z(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, así que podemos escribir $e^{i\theta} = \psi_z^{-1}(e^{it})$. Por lo tanto,

$$ie^{i\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{ie^{it} - i\overline{z}e^{2it} + i\overline{z}e^{2it} - ie^{it}|z|^2}{(1-\overline{z}e^{it})^2} = ie^{it}\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}e^{it})^2}.$$

Entonces

$$d\theta = \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}dt.$$

Finalmente, aplicamos (3) a la función armónica $u \circ \psi_z$:

$$u(z) = u(\psi_z(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\psi_z(e^{i\theta}))d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}u(e^{it})dt.$$

□

En particular,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}dt = 1, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

A continuación damos un criterio bastante útil para ver que una función continua es holomorfa, ver [3, pág. 72].

Teorema 4. *(Morera) Sea f una función continua en un conexo Ω tal que*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

para toda curva diferenciable cerrada simple $\gamma \subset \Omega$. Entonces f es analítica en Ω.

Teorema 5. *(Diferenciación de Lebesgue,* [1, pág. 112]*). Sea $f \in L^1_{loc}(a,b)$. Entonces*

$$f(x) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(\tau)d\tau, \quad \textit{para casi todo } x \in (a,b).$$

En estas notas denotamos por $\mathbb{H}$ al semiplano superior abierto, i.e

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$$

Ejemplo 6. *(Transformación de Cayley, ver* [3, pág. 21]*) La función*

$$w = \varphi(z) = \frac{i-z}{i+z}, \quad z \in \mathbb{H}$$

es un mapeo biholomorfo de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{D}$ tal que $\varphi(\partial\mathbb{H}) \subset \partial\mathbb{D}$.

A menudo usaremos el cambio de variable,

$$e^{i\tau} = \varphi(t) = \frac{i-t}{i+t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $w = \varphi(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1-|w|^2}{|e^{i\tau}-w|^2} &= \frac{1-\left|\frac{i-z}{i+z}\right|^2}{\left|\frac{i-t}{i+t}-\frac{i-z}{i+z}\right|^2}\\ &= \frac{(|i+z|^2-|i-z|^2)|i+t|^2}{|(i-t)(i+z)-(i+t)(i-z)|^2}\\ &= \frac{4(1+t^2)\Im z}{|2i(z-t)|^2} = \frac{\Im z}{|z-t|^2}(1+t^2).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$ie^{i\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2i}{(i+t)^2} \Longrightarrow \frac{d\tau}{dt} = -\frac{2}{(i-t)(i+t)} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Lo anterior implica

$$\frac{1-|w|^2}{|e^{i\tau}-w|^2}d\tau = \frac{2\Im z}{|z-t|^2}dt. \tag{4}$$

De manera similar tenemos

$$\frac{e^{i\tau}+w}{e^{i\tau}-w}d\tau = 2\frac{1+tz}{(1+t^2)(z-t)}dt.$$

Proposition 7. *Sea $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(t)|}{1+t^2}dt < \infty.$$

Entonces para $w=\varphi(z)$, $z\in\mathbb{H}$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|w|^2}{|e^{i\tau}-w|^2}(u\circ\varphi^{-1})(e^{i\tau})d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}u(t)dt,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\tau}+w}{e^{i\tau}-w}(u\circ\varphi^{-1})(e^{i\tau})d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{t}{1+t^2}\right)u(t)dt,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\Im(we^{-i\tau})}{|w-e^{i\tau}|^2}(u\circ\varphi^{-1})(e^{i\tau})d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Re z-t}{|z-t|^2}+\frac{t}{1+t^2}\right)u(t)dt.$$

Proof. Basta notar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(u\circ\varphi^{-1})(e^{i\tau})|d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(t)|}{1+t^2}dt < \infty.$$

□

2. Representación de funciones armónicas como integrales de Poisson

Teorema 8. *Sea V una función armónica y positiva en $\mathbb{D}$. Existe una medida ν en $[-\pi,\pi]$ tal que*

$$V(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}d\nu(t).$$

Proof. Para $0<r<1$ la fórmula de Poisson implica

$$V(rz) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}V(re^{it})dt, \quad z\in\mathbb{D}.$$

En particular,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V(re^{it})dt = V(0) < \infty, \quad \text{para todo } 0<r<1.$$

Por lo tanto $\{V(re^{it})dt\}_{0<r<1}$ es una familia de medidas positivas en $[-\pi,\pi]$ que es uniformemente acotada. Por el principio de selección de Helly se sigue que existe una medida ν y una sucesión $r_n\to 1^-$ tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)V(r_ne^{it})dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\nu(t)$$

para toda función $f \in C([-\pi,\pi])$. De lo anterior se sigue

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} V(r_n z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2} d\nu(t).$$

$\square$

Teorema 9. *Sea $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Entonces la función*

$$u(z) = u(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} f(t)dt$$

es armónica en $\mathbb{D}$ y

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = f(\theta) \quad \textit{existe para casi todo } \theta. \tag{5}$$

La función u es la llamada transformación de Poisson de la función f.

Proof. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $\theta = 0$ es un punto de Lebesgue para f.

Para cualquier $\delta \in (0,\pi)$ tenemos

$$\left|\int_{\delta<|t|\le\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} f(t)dt\right| \le \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt,$$

y el último término tiende a cero cuando $r \to 1^-$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe $\delta_0 \in (0,\pi/2)$ tal que

$$\frac{1}{2t}\left|\int_{-t}^{t} f(\tau)d\tau - f(0)\right| < \varepsilon \quad \text{para todo } 0 < t \le \delta_0.$$

Ahora ponemos

$$h(r,t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}, \quad J(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Claramente $h(r,t) \to 0$ cuando $r \to 1^-$ para todo $0 < t < \pi/2$.

Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^{\delta_0} h(r,t)f(t)dt = h(r,t)J(t)|_{t=0}^{\delta_0} - \int_0^{\delta_0} \frac{\partial h}{\partial t}(r,t)J(t)dt,$$

$$\int_{-\delta_0}^{0} h(r,t)f(t)dt = -h(r,t)J(-t)|_{t=0}^{\delta_0} + \int_0^{\delta_0} \frac{\partial h}{\partial t}(r,t)J(-t)dt.$$

Sumando las igualdades previas obtenemos

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0} h(r,t)f(t)dt = h(r,\delta_0)\int_{-\delta_0}^{\delta_0} f(\tau)d\tau - \int_0^{\delta_0} \frac{\partial h}{\partial t}(r,t)\int_{-t}^{t} f(\tau)d\tau dt.$$

Notamos que

$$u(r) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\delta_0<|t|\le\pi} + \int_{-\delta_0}^{\delta_0}\right) h(r,t)f(t)dt,$$

por lo tanto

$$\lim_{r\to 1^-} u(r) = -\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta_0} \frac{\partial h}{\partial t}(r,t)\int_{-t}^{t} f(\tau)d\tau dt.$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta_0} 2t\frac{\partial h}{\partial t}(r,t)dt &= \frac{2\delta_0}{2\pi}h(r,\delta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_0}^{\delta_0} h(r,t)dt \\ &= \frac{\delta_0}{\pi}h(r,\delta_0) - 1 + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0<|t|\le\pi} h(r,t)dt,\end{aligned}$$

de donde se sigue que converge a -1 cuando $r\to 1^-$. Finalmente, la observación anterior junto con la igualdad

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta_0} 2t\frac{\partial h}{\partial t}(r,t)\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(\tau)d\tau - f(0)\right)dt + \frac{f(0)}{2\pi}\int_0^{\delta_0} 2t\frac{\partial h}{\partial t}(r,t)dt$$

implican que

$$\left|\lim_{r\to 1^-} u(r) - f(0)\right| \le C\varepsilon.$$

□

Observación 10. *Sea μ una medida compleja en $[-\pi,\pi]$ y consideramos su primitiva $\mu(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t)$. Sea*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}d\mu(t), \quad z = re^{i\theta}\in\mathbb{D}.$$

Entonces

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \mu'(\theta) \tag{6}$$

siempre que exista $\mu'(\theta)$, i.e para casi todo θ (por el teorema de Lebesgue).

Teorema 11. *Sea V una función armónica y positiva en $\mathbb{D}$. Entonces existe $\lim_{r\to 1^-} V(re^{i\theta})$ para casi todo θ.*

Proof. Existe una medida ν finita y positiva en $[-\pi,\pi]$ tal que

$$V(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}d\nu(t).$$

El teorema de Lebesgue afirma que existe

$$\nu'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta d\nu(t)$$

para casi todo θ. El resultado se sigue de la observación anterior. □

Corolario 12. *(Fatou) Sea f analítica y acotada en $\mathbb{D}$. Entonces existe $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ para casi todo θ.*

Proof. Existe $M>0$ tal que $|f|\le M$ en $\mathbb{D}$. Entonces $\Re f + M$ y $\Im f + M$ son armónicas y positivas en $\mathbb{D}$. Basta aplicar el resultado anterior. □

Teorema 13. *Sea $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Entonces la función*

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)dt$$

es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$\lim_{r\to 1^-} G(re^{i\theta}) \quad \textit{existe para casi todo } \theta. \tag{7}$$

Proof. De la estimación

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)\right| dt \leq \frac{2}{1-|z|}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \infty$$

se sigue que la función $G(z)$ está bien definida para cada $z \in \mathbb{D}$.

Sea $(z_n) \subset \mathbb{D}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{D}$. La estimación anterior junto con el teorema de la convergencia dominada implican que $\lim_{z_n \to z} G(z_n) = G(z)$. Así que G es una función continua en $\mathbb{D}$.

Sea $\gamma \subset \mathbb{D}$ una curva diferenciable cerrada simple, entonces el teorema de Fubini implica

$$\oint_\gamma G(z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\oint_\gamma \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dz\, f(t)dt = 0,$$

dado que la función $f_t(z) = (e^{it}+z)(e^{it}-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{D}$, es analítica en $\mathbb{D}$.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f \geq 0$. Notamos que

$$\Re G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{-it}|^2} f(t)dt \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{D}.$$

La función

$$F(z) = \frac{G(z)-1}{G(z)+1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

es analítica y dado que $\Re G \geq 0$ se sigue que $|F| \leq 1$ en $\mathbb{D}$. Del resultado anterior se sigue que existe

$$F(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) \quad \text{existe para casi todo } \theta.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{r\to 1^-} G(re^{i\theta}) = \frac{1+F(e^{i\theta})}{1-F(e^{i\theta})},$$

siempre que $F(e^{i\theta}) \neq 1$. El lema que se encuentra en la página 44 en [**?**, **?**, koosis] asegura que $F(e^{i\theta}) = 1$ en a lo más un conjunto de medida cero. □

Corolario 14. *Sea $f \in L^1_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$. Entonces*

$$\lim_{r\to 1^-} \widetilde{u}(re^{i\theta}) := \widetilde{H}f(\theta), \quad \textit{existe para casi todo } \theta. \tag{8}$$

Proof. Esto se sigue de (2) y el teorema anterior. □

Sea $e^{i\theta}$ un punto fijo. Consideramos el sector con vértice en $e^{i\theta}$ y apertura $0 < \alpha < \pi/2$ dado por

$$S_\alpha(e^{i\theta}) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1-e^{-i\theta}z)| \leq \alpha\}.$$

Observación 15. *En Teorema 9, Observación 10, Teorema 11, Corolario 12, Teorema 13 y Corolario 14, en realidad el resultado es más general, no solo existen los respectivos límites radiales, sino que existen los límites cuando $z \to e^{i\theta}$ de manera uniforme en $S_\alpha(e^{i\theta})$, para cualquier apertura $0 < \alpha < \pi/2$.*

Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(t)|}{1+t^2} dt < \infty$$

Entonces la integral

$$F(z) := \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{1+t^2} \right) u(t) dt$$

converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{H}$. (Ejercicio)

Usando el teorema de la convergencia dominada tenemos que $\lim_{z_n \to z} F(z_n) = F(z)$ para toda sucesión $(z_n) \subset \mathbb{H}$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{H}$. Por lo tanto, F es continua en $\mathbb{H}$.

Ahora sea $\gamma \subset \mathbb{H}$ una curva diferenciable cerrada simple, entonces

$$\oint_\gamma F(z)dz = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \oint_\gamma \left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{1+t^2} \right) dz\, u(t)dt = 0,$$

dado que la función $f_t(z) = (z-t)^{-1}$, $z \in \mathbb{H}$, es analítica en $\mathbb{H}$. Así que el teorema de Morera implica que F es analítica en $\mathbb{H}$.

Consideramos la funciones

$$U(z) := \Re F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} u(t) dt, \tag{9}$$

y

$$\widetilde{U}(z) := \Im F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Re z - t}{|z-t|^2} + \frac{t}{1+t^2} \right) u(t) dt, \tag{10}$$

las cuales son funciones armónicas en $\mathbb{H}$ y que toman valores reales.

Así que tenemos la descomposición $F = U + i\widetilde{U}$ en $\mathbb{H}$, i.e $\widetilde{U}$ es la única conjugada armónica de U en $\mathbb{H}$ tal que $\widetilde{U}(i) = 0$.

Ahora estamos interesados en el comportamiento en la frontera de las funciones $U, \widetilde{U}$. Si $y \to 0^+ \Rightarrow z \to x \in \mathbb{R} \Rightarrow w = \varphi(z) \to \varphi(x)$ en un cierto sector con vértice en $\varphi(x)$. De la Proposición 7, el Teorema 9, el Corolario 14 y la Observación 15 tenemos que

$$\lim_{y\to 0^+} U(x+iy) = u(x), \quad \lim_{y\to 0^+} \widetilde{U}(x+iy) = \mathcal{H}u(x)$$

existen para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Existen casos en que es fácil establecer la existencia de $\lim_{y\to 0^+} \widetilde{U}(t+iy)$. Supongamos que la integral

$$\int_0^1 \frac{u(x_0-\tau)-u(x_0+\tau)}{\tau} d\tau$$

es absolutamente convergente. Por ejemplo, esto ocurre cuando u es Lipschitz (Hölder) continua en una vecindad de x_0:

$$\int_0^\delta \left| \frac{u(x_0-\tau)-u(x_0+\tau)}{\tau} \right| d\tau \leq 2Lip(f) \int_0^\delta d\tau \leq 2Lip(f)\delta.$$

Entonces escribimos

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x_0) \quad := \quad & \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u(x_0-\tau)-u(x_0+\tau)}{\tau} d\tau \\ & + \int_{x_0-1}^{x_0+1} \frac{tu(t)}{1+t^2} dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t-x_0|>1} \left(\frac{1}{x_0-t} + \frac{t}{1+t^2} \right) u(t) dt, \end{aligned}$$

y notamos que las tres cantidades están bien definidas.

Dado que

$$\widetilde{U}(x_0+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_0-t}{(x_0-t)^2+y^2} + \frac{t}{1+t^2} \right) u(t) dt$$

tenemos que $\lim_{y\to 0^+} \widetilde{U}(x_0+iy) = \widetilde{u}(x_0)$.

El siguiente resultado será útil y se puede encontrar en [2, pág. 33].
Desigualdad de Jensen. Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces

$$\varphi\left(\int_X g d\mu \right) \leq \int_X \varphi \circ g d\mu,$$

siempre que $g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mu)$.

3. El criterio de Krein

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(f(x))}{1+x^2} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f(x)dx < \infty, \; n \geq 1. \tag{11}$$

Consideramos las funciones $U, \widetilde{U}$ definidas en (9) y (10) con $u = \ln f$. Por lo tanto,

$$\lim_{y\to 0^+} U(x+iy) = \ln(f(x)), \quad \lim_{y\to 0^+} \widetilde{U}(x+iy) = \mathcal{H}(\ln f)(x)$$

para casi todo $t \in \mathbb{R}$.

La función $G(z) := \exp(U(z) + i\widetilde{U}(z))$ es analítica en $\mathbb{H}$ y cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(z)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(U(x+iy))dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{ydx}{(x-t)^2+y^2} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

para todo $y > 0$.
Por lo tanto, G está en el espacio de Hardy H^1. Por el Lema 3.7 en [2, pág. 59] tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{ixt}dx = 0 \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Derivando n veces respecto a la variable t y haciendo $t = 0$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n G(x)dx = 0 \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Por otro lado, $G(x) = \lim_{y\to 0^+} G(x+iy) = f(x)\exp(i\mathcal{H}(\ln f)(x))$. Tomando la parte real e imaginaria de G obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\cos(\mathcal{H}(\ln f)(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\sin(\mathcal{H}(\ln f)(x))dx = 0 \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

El siguiente resultado apareció publicado en el artículo [5].

Teorema 16. *Sea f una función que satisface las condiciones en (11). Si $g(x) = f(x)(1+\cos(\mathcal{H}(\ln f)(x))$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x)dx \quad \textit{para todo } n \geq 0.$$

References

[1] Axler, Sheldon. Measure, integration & real analysis. Graduate Texts in Mathematics, 282. Springer, Cham, 2020. xviii+411 pp.

[2] Garnett, John B. Bounded analytic functions. Revised first edition. Graduate Texts in Mathematics, 236. Springer, New York, 2007. xiv+459 pp.

[3] Greene, Robert E.; Krantz, Steven G. Function theory of one complex variable. Third edition. Graduate Studies in Mathematics, 40. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. x+504 pp.

[4] Koosis, Paul The logarithmic integral. I. Corrected reprint of the 1988 original. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 12. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. xviii+606 pp.

[5] López-García, Marcos Krein condition and the Hilbert transform. Electron. Commun. Probab. 25 (2020), Paper No. 71, 7 pp.