# Representaciones y descomposiciones en Análisis de Fourier

## Escuela de Análisis

Martha Guzmán Partida

UNISON

Octubre de 2018

**COEFICIENTES DE FOURIER.**

Sabemos que si $f \in L^1(T)$ entonces $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_1$ y que $\widehat{f}(n) \to 0$ si $|n| \to \infty$.

Tres preguntas naturales son las siguientes:

1) ¿Es posible obtener una tasa de convergencia a cero para la sucesión de coeficientes de Fourier?

   Aunque no lo mostraremos aquí, la respuesta a esta pregunta es NO.

   Puede probarse que la sucesión de coeficientes de Fourier puede converger a cero de manera arbitrariamente lenta.

2) ¿Será cierto que cualquier sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to 0$ si $|n| \to \infty$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de alguna $f \in L^1(T)$?

3) ¿Cómo se reflejan las propiedades de una función en su sucesión de coeficientes de Fourier?

La pregunta 2 puede formularse también del modo siguiente:

2') ¿Es sobreyectivo el mapeo lineal $T : L^1(\mathbb{T}) \to c_0$, donde $T(f) = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$?

La respuesta a esta pregunta es NO, y lo mostraremos a continuación.

Observemos primeramente que los espacios $\left(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1\right)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ son de Banach.

Claramente, $T$ es un operador lineal acotado ya que

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Además, $T$ es inyectivo puesto que $T(f) = 0$ implica $\widehat{f}(n) = 0$ para toda $n$ y por el Teorema 1.8 de la Sesión 1 se tiene que $f = 0$.

Si $T$ fuera sobreyectivo, entonces sería una transformación lineal biyectiva y continua entre dos espacios de Banach, y por el Teorema del Mapeo Abierto, $T$ sería un isomorfismo topológico.

De este modo, tendríamos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \|f\|_1 \leq \|T(f)\|_\infty$$

para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Si $f = D_N$ el núcleo de Dirichlet, entonces

$$CL_N = C \|D_N\|_1 \leq \|T(D_N)\|_\infty = 1$$

y esta desigualdad se cumple para cada $N \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible pues $L_N \to \infty$.

Con respecto a la pregunta 3, mencionaremos algunos resultados sencillos sobre el orden de magnitud de los coeficientes de Fourier de funciones que cumplen ciertas condiciones de regularidad.

- Si $f \in L^1(T)$ es absolutamente continua, entonces

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ si } |n| \to \infty.$$

- Si $f$ es $k$ veces diferenciable y $f^{(k)} \in L^1(T)$ entonces

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \min_{0 \leq j \leq k} \frac{\left\|f^{(j)}\right\|_1}{|n|^j} \text{ para cada } n.$$

- Si $f$ es de variación acotada en $T$ entonces

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{\operatorname{Var}(f)}{2\pi\,|n|}$$

para cada $n$.

En la siguiente sección estudiaremos funciones armónicas en el disco unitario $D$ y representaciones de éstas para algunas clases especiales.

# Representación de funciones armónicas en D

- Recordemos que si $\Omega$ es una región del plano, una función $u \in C^2(\Omega)$ es *armónica*, si satisface la ecuación de Laplace $\triangle u = 0$ en $\Omega$, donde

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

- Si $F = u + iv$ es una función holomorfa en $\Omega$, entonces $F$ es una función armónica con valores en $\mathbb{C}$.

Esto es cierto porque $F$ es infinitamente diferenciable y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Consecuentemente, tanto $\mathrm{Re}\,(F)$ como $\mathrm{Im}\,(F)$ son funciones armónicas a valores reales cuando $F$ es holomorfa.

- También es cierto que si $\Omega$ es una región simplemente conexa del plano, entonces una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica si y solo si existe una función holomorfa $f$ en $\Omega$ tal que $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

En efecto, es suficiente considerar la función

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv U + iV.$$

La armonicidad de $u$ implica que $g$ es holomorfa en $\Omega$ y siendo éste simplemente conexo, $g$ posee una antiderivada $f$ ahí.

De este modo, la familia de funciones holomorfas $\mathrm{Re}\,(f) + c + i\,\mathrm{Im}\,(f)$ donde $c$ es una constante real, cumple lo requerido. ■

## Theorem (3.1)

*Sea $R > 0$ y $u$ una función armónica a valores reales definida en el disco abierto $D(0, R)$. Entonces, $u$ puede representarse de la siguiente manera*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}. \tag{1}$$

*Esta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0, R)$.*

**Demostración.** Existe una función holomorfa $F$ en $D(0, R)$ tal que $u = \mathrm{Re}(F)$.

Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

la representación en serie de Maclaurin de $F$. Usando que

$$u(z) = \frac{1}{2}\left(F(z) + \overline{F(z)}\right)$$

tenemos para $z = re^{i\theta}$

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} r^k e^{-ik\theta}\right)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

donde $a_k = c_k/2$ si $k > 0$, $a_0 = \mathrm{Re}\,(c_0)$ y $a_k = \overline{c_{-k}}/2$ si $k < 0$.

Además, la convergencia es uniforme en todo subconjunto compacto de $D\,(0, R)$ ya que lo es para $F$. ■

Supongamos que $R > 1$ en el Teorema 3.1.

Entonces (1) converge uniformemente para $r = 1$, esto es,

$$u\left(e^{it}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

converge uniformemente en $t \in [-\pi, \pi]$, por lo que $a_k$ es el coeficiente de Fourier correspondiente a la frecuencia $k$ de la función

$$t \mapsto u\left(e^{it}\right).$$

En virtud de esta observación y de la convergencia uniforme podemos escribir (1) como

$$\begin{aligned} u\left(re^{i\theta}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(e^{it}\right) e^{-ikt} dt \right) r^{|k|} e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(e^{it}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)} dt. \end{aligned}$$

Cuando $0 \leq r < 1$ la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}$ converge uniformemente y absolutamente y su suma es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} \\
&= 1 + 2\,\mathrm{Re}\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left(re^{it}\right)^k \right) \\
&= 1 + 2\,\mathrm{Re}\left( \frac{1}{1 - re^{it}} - 1 \right) \\
&= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión tiene un nombre especial y lo estudiamos en la Sesión 2.

### Definition

La función $P_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tal que

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$$

para $0 < r < 1$, se llama Núcleo de Poisson para el disco unitario $D$.

En virtud de los cálculos hechos previamente tenemos

### Theorem (3.2)

*Si $u$ es una función armónica real definida en el disco $D(0,R)$, $R > 1$, entonces*

$$\begin{aligned} u\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta - t)} u\left(e^{it}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, u\left(e^{it}\right) dt, \end{aligned}$$

*para $0 \leq r < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.*

Usaremos el Teorema 3.2 para obtener una representación para cierto tipo de funciones armónicas en $D$.

- Para ello, necesitaremos usar un teorema sobre compacidad, el Teorema de Banach-Alaoglu.

- Recordemos que en un espacio normado $Y$, una condición necesaria y suficiente para que la bola unitaria cerrada

$$\{y \in Y : \|y\|_Y \leq 1\}$$

sea compacta es que $\dim Y < \infty$.

- Si $X$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces $X^*$ también es un espacio normado de dimensión infinita, por tanto, la bola unitaria cerrada aquí tampoco puede ser compacta.

- La topología que nos resuelve este problema en $X^*$ es la topología débil-$*$, denotada por $\sigma(X^*, X)$.

- Por definición, la topología débil-$*$ en $X^*$ es la topología más débil (con menos abiertos) que hace continuas a las evaluaciones $\{e_x\}_{x\in X}$, esto es, a las funciones

$$\begin{array}{rcl} e_x & : & X^* \longrightarrow K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array}$$

- Esta topología no es una topología inducida por alguna norma, pero se puede demostrar que está inducida por seminormas.

- Además, si $\tau_{\|\cdot\|_{X^*}}$ representa la topología de la norma en $X^*$, entonces

$$\sigma(X^*, X) \subset \tau_{\|\cdot\|_{X^*}}.$$

- De hecho, se puede mostrar que la topología débil-$*$ en $X^*$ es la topología de la convergencia puntual en $X^*$, esto es, la red $\{f_i\}_{i\in I}$ converge a $f$ en esta topología, si y sólo si, $f_i(x) \longrightarrow f(x)$ en $K$ para cada $x \in X$.

## Theorem (3.3)

*(Banach-Alaoglu) Si $X$ es un espacio normado, la bola unitaria cerrada*

$$B^* = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$$

*es compacta en la topología débil-$*$.*

## Corollary (3.4)

*Si $X$ es separable y $K$ es un subconjunto débil-$*$ compacto de $X^*$, entonces $K$ es metrizable en la topología débil-$*$. Por consiguiente, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada respecto a la norma de $X^*$, esto es, $\|f_n\|_{X^*} \leq M$ para alguna $M > 0$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $f \in X^*$ tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \text{ si } k \to \infty$$

*para cada $x \in X$.*

Ya tenemos las herramientas para demostrar el siguiente resultado:

**Theorem (3.5)**

*Sea $u$ una función armónica en el disco unitario $D$ tal que*

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(re^{it}\right)\right|^{p} dt < \infty$$

*para alguna $1 < p < \infty$.*
*Entonces, existe una función $f \in L^{p}\left(T\right)$ tal que*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r\left(\theta - t\right) f\left(t\right) dt. \tag{2}$$

**Demostración.** Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ tal que $r_n \uparrow 1$.

Consideremos las funciones definidas en $[-\pi, \pi]$

$$f_n(t) = u\left(r_n e^{it}\right).$$

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_p \leq \left(\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p} \equiv M$$

tenemos una sucesión acotada en el espacio $L^p(T) \simeq \left(L^{p'}(T)\right)^*$ donde $1/p + 1/p' = 1$.

Como $L^{p'}(T)$ es separable, se sigue del Corolario 3.4 que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $f \in L^p(T)$ tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{n_k}(t)\, g(t)\, dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

cuando $k \longrightarrow \infty$ para cada $g \in L^{p'}(T)$.

Ahora notamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $z \mapsto u\left(r_{n_k} z\right)$ es armónica en el disco $D\left(0, r_{n_k}^{-1}\right)$ de radio mayor que 1.

En virtud del Teorema 3.2 podemos escribir para $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} u\left(r_{n_k} re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, u\left(r_{n_k} e^{it}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f_{n_k}(t)\, dt \qquad (3) \end{aligned}$$

El lado izquierdo de (3) tiende a $u\left(re^{i\theta}\right)$ cuando $k \longrightarrow \infty$, mientras que el lado derecho de (3) tiende a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f(t)\, dt$$

cuando $k \to \infty$ debido a que el núcleo de Poisson es una función continua, por tanto en $L^{p'}(T)$.

Así concluimos que

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f(t)\, dt$$

para alguna $f \in L^p(T)$. ■

Con la misma prueba, pero ahora usando que

$$L^{\infty}(T) \simeq \left(L^{1}(T)\right)^{*}$$

podemos demostrar el siguiente resultado.

## Theorem (3.6)

*Sea u una función armónica en el disco unitario D tal que*

$$\sup_{0\leq r<1}\left\|u\left(re^{i\cdot}\right)\right\|_{\infty}<\infty.$$

*Entonces, existe una función $f \in L^{\infty}(T)$ tal que*

$$u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\,f(t)\,dt. \tag{4}$$

- Una pregunta natural es si el Teorema 3.5 es válido para $p = 1$, esto es, ¿existe una $f \in L^1(T)$ tal que se tenga la representación (2)?

- La respuesta a esta pregunta es NO. La razón de fondo es que el espacio $L^1(T)$ no es un espacio dual (hecho que no probaremos aquí).

- Sin embargo, podemos observar lo siguiente:

Si $M(T)$ representa el espacio de medidas de Borel complejas en $T$, con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(T),$$

el cual es un espacio de Banach, la función

$$\begin{array}{rcl} L^1(T) & \rightarrow & M(T) \\ f & \mapsto & d\mu_f(t) \equiv f(t)\,dt \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico en su imagen ya que

$$\|\mu_f\| = \|f\|_1 .$$

Esto nos proporciona un modo de "incluir" $L^1(T)$ en $M(T)$.

Ahora notamos que

$$L^1(T) \hookrightarrow M(T) \simeq C(T)^*$$

y repitiendo la prueba del Teorema 3.5 con las modificaciones apropiadas, obtenemos el siguiente resultado.

## Theorem (3.7)

*Sea u una función armónica en el disco unitario D tal que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(re^{it}\right) \right| dt < \infty.$$

*Entonces, existe una medida* $\mu \in M(T)$ *tal que*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t). \tag{5}$$

En la Sesión 2, describimos el comportamiento del Núcleo de Poisson.

A continuación, lo generalizamos en la siguiente definición.

## Definition (3.8)

Una identidad aproximada en $T$ es una familia de funciones $2\pi$-periódicas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en $L^1(T)$, donde $I$ es un conjunto dirigido, la cual satisface las siguientes tres condiciones:

1. $\sup\limits_{\alpha\in I} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\alpha(t)|\, dt \equiv K < \infty.$
2. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\alpha(t)\, dt = 1$ para cada $\alpha \in I$.
3. Para cada $\delta > 0$ se verifica
$$\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\varphi_\alpha(t)|\, dt \to 0.$$

Claramente, la familia $\{P_r\}_{r\in(0,1)}$ es una identidad aproximada en $T$ y tiene todavía mejores propiedades. Por ejemplo, el hecho de que $P_r(t) > 0$ para cada $t \in T$ y que cumpla 2) de la Definición 3.8, nos permite obtener resultados recíprocos de los Teoremas 3.5, 3.6 y 3.7.

## Theorem (3.9)

*Sea $f \in L^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, y sea $u = P(f)$ su integral de Poisson, esto es,*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f(t)\, dt,$$

*donde $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.*
*Entonces, $u$ es armónica en $D$. Además:*
*Si $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$\sup_{0 \leq r < 1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq \|f\|_p .$$

*Si $p = \infty$ se tiene que*

$$\sup_{z \in D}|u(z)| \leq \|f\|_\infty .$$

**Demostración.** Por convergencia uniforme tenemos

$$\begin{aligned} u\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} f(t)\, dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

donde $a_k = \widehat{f}(k)$ para cada $k$.

Si $f$ toma valores reales entonces $a_0$ es real y $a_{-k} = \overline{a_k}$ por lo que

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right).$$

Así, $u$ es armónica en $D$.

Si $f$ toma valores complejos, simplemente separamos en parte real e imaginaria y obtenemos de nuevo que $u$ es armónica en $D$.

Ahora supongamos que $1 \leq p < \infty$.

Escribiendo

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r\left(t\right) f\left(\theta - t\right) dt$$

y usando la desigualdad integral de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned} \left\| u\left(re^{i\cdot}\right)\right\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r\left(t\right)\left\| f\left(\cdot - t\right)\right\|_p dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r\left(t\right)\left\| f\right\|_p dt = \left\| f\right\|_p \end{aligned}$$

uniformemente en $r \in (0, 1)$.

El caso $p = \infty$ es aún más sencillo. $\blacksquare$

## Theorem (3.10)

*Sea $\mu \in M(T)$, y sea $u = P(\mu)$ su integral de Poisson, esto es,*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t),$$

*donde $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.*
*Entonces, u es armónica en D y*

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(re^{it}\right)\right| dt \leq |\mu|(T).$$

**Demostración.** Si $a_k = \widehat{\mu}(k)$, esto es,

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t),$$

igual que en el Teorema 3.9 podemos mostrar que

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}$$

y que $u$ es armónica en $D$.

Además, por el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r\left(\theta-t\right)d\left|\mu\right|(t)\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r\left(\theta-t\right)d\theta\right)d\left|\mu\right|(t)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\left|\mu\right|(t)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente teorema.

## Theorem (3.11)

*Para* $1 < p \leq \infty$*, una función* $u$ *es armónica en* $D$ *y satisface la condición*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(re^{it}\right) \right|^{p} dt < \infty \text{ si } 1 < p < \infty$$

*o bien,* $u$ *es acotada si* $p = \infty$*, si y solamente si* $u$ *es la integral de Poisson de alguna* $f \in L^{p}(T)$*.*
*Para* $p = 1$*, una función* $u$ *es armónica en* $D$ *y satisface la condición*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(re^{it}\right) \right| dt < \infty,$$

*si y solamente si existe una medida de Borel compleja* $\mu \in M(T)$ *tal que* $u$ *es la integral de Poisson de* $\mu$*.*

# Comportamiento frontera de integrales de Poisson

- Estudiaremos valores frontera de estas funciones en diferentes sentidos: respecto a la norma, débilmente y puntualmente.

**Theorem (3.12)**

*Sea* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una identidad aproximada en* $T$. *Entonces*

a) *Si* $f \in L^p(T)$ *con* $1 \leq p < \infty$ *y* $f_\alpha = f * \varphi_\alpha$, *esto es,*

$$f_\alpha(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\, \varphi_\alpha(t)\, dt,$$

*entonces* $f_\alpha \longrightarrow f$ *en* $L^p(T)$.

b) *Si* $f \in C(T)$ *entonces* $f_\alpha \longrightarrow f$ *uniformemente en* $T$.

**Demostración.** Usando que para cada $\alpha \in I$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{\alpha}(t)\,dt = 1$$

podemos escribir

$$f_{\alpha}(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta - t) - f(\theta)]\,\varphi_{\alpha}(t)\,dt.$$

Usando la desigualdad integral de Minkowski tenemos

$$\left\|f_{\alpha} - f\right\|_{p} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|f(\cdot - t) - f(\cdot)\right\|_{p}\left|\varphi_{\alpha}(t)\right|dt. \tag{6}$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $g \in C(T)$ tal que

$$\left\|f - g\right\|_{p} < \varepsilon/3.$$

Además, puesto que $g$ es uniformemente continua en $T$, podemos hallar

$\delta > 0$ tal que para cada $\theta \in T$

$$|g(\theta - t) - g(\theta)| < \varepsilon/3 \text{ si } |t| < \delta.$$

De este modo

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p &\leq \|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\|_p + \|g(\cdot - t) - g(\cdot)\|_p \\ &\quad + \|g - f\|_p \\ &= \|(f - g)(\cdot - t)\|_p + \|g(\cdot - t) - g(\cdot)\|_p \\ &\quad + \|g - f\|_p \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $|t| < \delta$.

Ahora escribimos la integral de (6) como sigue:

$$
\begin{aligned}
\left\| f_{\alpha} - f \right\|_{p} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| f\left(\cdot - t\right) - f\left(\cdot\right) \right\|_{p} \left| \varphi_{\alpha}\left(t\right) \right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \left\| f\left(\cdot - t\right) - f\left(\cdot\right) \right\|_{p} \left| \varphi_{\alpha}\left(t\right) \right| dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} \left\| f\left(\cdot - t\right) - f\left(\cdot\right) \right\|_{p} \left| \varphi_{\alpha}\left(t\right) \right| dt \\
&\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \varphi_{\alpha}\left(t\right) \right| dt + 2 \left\| f \right\|_{p} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} \left| \varphi_{\alpha}\left(t\right) \right| dt \\
&\leq K\varepsilon + \frac{\left\| f \right\|_{p}}{\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} \left| \varphi_{\alpha}\left(t\right) \right| dt \\
&< K\varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}
$$

si $\alpha$ es “suficientemente grande”.

Esto muestra la parte (a).

Para mostrar (b), notemos que como ahora $f \in C(T)$ entonces $f$ es uniformemente continua ahí.

Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|s-t| < \delta$ implica $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Luego

$$
\begin{aligned}
|f_\alpha(\theta) - f(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} |f(\theta - t) - f(\theta)|\,|\varphi_\alpha(t)|\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| < \pi} |f(\theta - t) - f(\theta)|\,|\varphi_\alpha(t)|\,dt \\
&< \varepsilon K + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta \leq |t| < \pi} |\varphi_\alpha(t)|\,dt \\
&< \varepsilon K + \varepsilon
\end{aligned}
$$

si $\alpha$ es “suficientemente grande”. ■

Puesto que el núcleo de Poisson $\{P_r\}_{0<r<1}$ es una identidad aproximada, tenemos el siguiente resultado.

## Corollary (3.13)

*Sea $f$ una función $2\pi$-periódica y $u = P(f)$.*

a) *Si $f \in L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$ entonces $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(re^{it}\right) - f(t) \right|^p dt \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 1$.*

b) *Si $f \in C(T)$ entonces $u\left(re^{it}\right) \rightarrow f(t)$ uniformemente en $t \in T$ si $r \rightarrow 1$.*

La parte b) de este corolario nos permite resolver el problema de Dirichlet clásico.

## PROBLEMA DE DIRICHLET EN $D$

Dada $f \in C(\partial D)$, encontrar una función $u$ definida en $\overline{D}$ tal que $u$ sea continua en $\overline{D}$, armónica en $D$ y $u_{|\partial D} = f$.

La función $u$ definida en $\overline{D}$ del modo siguiente:

$$u\left(re^{it}\right) = \begin{cases} P_r * f(t) & \text{si } r < 1 \\ f(t) & \text{si } r = 1, \end{cases}$$

es armónica en $D$ y la continuidad en $\overline{D}$ es consecuencia del Corolario 3.13, parte b).

## Theorem (3.14)

*Sea* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una identidad aproximada en* $T$*.*

a) *Si* $f \in L^\infty(T)$ *y* $f_\alpha = f * \varphi_\alpha$*, entonces* $f_\alpha \to f$ *en la topología débil-*$*$ *de* $L^\infty(T)$*.*

b) *Si* $\mu \in M(T)$ *y* $f_\alpha = \mu * \varphi_\alpha$ *entonces* $f_\alpha \to \mu$ *en la topología débil-*$*$ *de* $M(T)$*.*

**Demostración.** En la parte a) debemos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta$$

para cada $\psi \in L^1(T)$.

Notemos que por el teorema de Fubini podemos escribir

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\,\varphi_\alpha(\theta - t)\,d\theta\right] f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\psi * \varphi_\alpha(-\cdot))(t) f(t)\, dt \tag{7}$$

Usando el hecho de que $\{\varphi_\alpha(-\cdot)\}_{\alpha \in I}$ es una identidad aproximada y por tanto $\psi * \varphi_\alpha(-\cdot) \to \psi$ en $L^1(T)$, tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\psi * \varphi_\alpha(-\cdot))(t) f(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) f(t)\, dt \right| \\ \leq \; & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\psi * \varphi_\alpha(-\cdot))(t) f(t) - \psi(t) f(t)|\, dt \\ \leq \; & \|f\|_\infty \|\psi * \varphi_\alpha - \psi\|_1 \to 0, \end{aligned}$$

de aquí que la expresión (7) converge a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) f(t)\, dt$$

como deseábamos mostrar.

Para mostrar b), debemos probar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\,d\mu(\theta)$$

para cada $\psi \in C(T)$.

Notando que $\psi * \varphi_\alpha(-\cdot) \to \psi$ uniformemente en $T$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\,d\mu(\theta)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|(\psi * \varphi_\alpha(-\cdot))(t) - \psi(t)\right| d|\mu|(t) \\
\to\ & 0. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Igual que antes, puesto que $\{P_r\}_{0<r<1}$ es una identidad aproximada, tenemos el siguiente resultado.

## Corollary (3.15)

*Sea $f$ una función $2\pi$-periódica.*

a) *Si $f \in L^\infty(T)$ y $u = P(f)$ entonces $u\left(re^{i\cdot}\right) \to f$ si $r \to 1$, en la topología débil-$*$ de $L^\infty(T)$.*

b) *Si $\mu \in M(T)$ y $u = P(\mu)$ entonces $u\left(re^{i\cdot}\right) \to \mu$ si $r \to 1$, en la topología débil-$*$ de $M(T)$.*

Para finalizar esta sesión, esbozaremos algunas ideas relativas al comportamiento frontera puntual de la integral de Poisson.

## Theorem (3.16)

*Sean $\mu \in M(T)$, $u = P(\mu)$ y defínase para $\theta \in T$*

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t).$$

*Sea $\theta_1$ un punto en $T$ en el cual existe $F'(\theta_1)$. Entonces, $u(z)$ converge a $F'(\theta_1)$ cuando $z$ tiende a $e^{i\theta_1}$ no tangencialmente.*

La expresión

"$u(z)$ converge a $F'(\theta_1)$ cuando $z$ tiende a $e^{i\theta_1}$no tangencialmente"

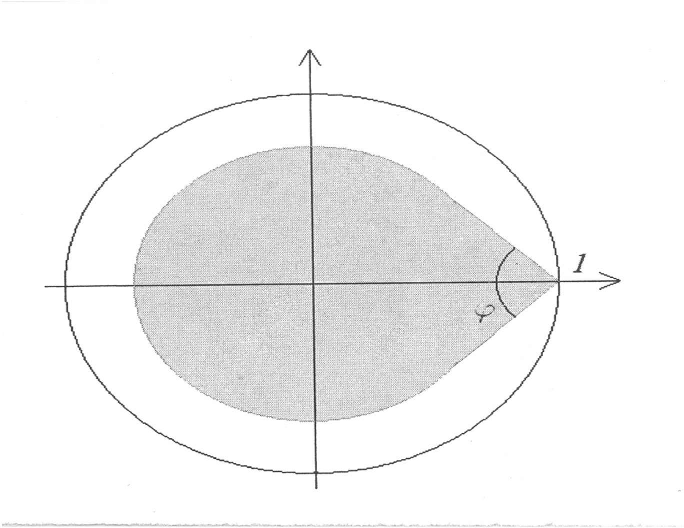
significa que para cada $c > 0$, $u(z) \to F'(\theta_1)$ cuando $z = re^{i\theta} \to e^{i\theta_1}$ permaneciendo dentro de la región

$$\Omega_{c,\theta_1} = \left\{ re^{i\theta} : |\theta - \theta_1| < c(1-r) \right\}.$$

Este tipo de convergencia se denota así:

$$u(z) \to F'(\theta_1) \text{ si } z \overset{\text{N.T.}}{\longrightarrow} e^{i\theta_1}$$

$c = 1,\ \theta_1 = 0$




$\Omega_{1,0}$

**Demostración** (esbozo muy general)**.**

Se puede suponer SPG que $\theta_1 = 0$ y que $F'(0) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| < \delta \Longrightarrow |F(t)| < \varepsilon |t|. \tag{8}$$

Se elige $r$ suficientemente cerca de 1 de modo que

$$|\theta| < c(1-r) < \delta/4. \tag{9}$$

De este modo

$$\begin{aligned} u\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| < \pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)\, d\mu(t). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\delta\leq|t|<\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu(t)\right| &\leq \left[\sup_{\delta/2<|t|\leq\pi} P_r(t)\right]\int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t)\\ &\to 0 \text{ si } r\to 1.\end{aligned}$$

Estimar la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta-t)\,d\mu(t) \tag{10}$$

es la parte difícil de la prueba.

El truco es integrar por partes tres veces subdividiendo adecuadamente la integral (10) en tres integrales y usar las relaciones (8) y (9).

Con ello se logra mostrar que (10) es menor que $\varepsilon$. ■

## Comentarios Finales.

- El teorema de diferenciación de Lebesgue establece que para $f \in L^1(T)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{\theta-h}^{\theta+h} f(t)\,dt = f(\theta)$$

para casi toda $\theta \in T$.

- Lo anterior implica que para tales $f$, la derivada $\dfrac{d}{d\theta} \int_0^\theta f(t)\,dt$ existe para casi toda $\theta \in T$ y es igual a $f(\theta)$.

- Así, para $f \in L^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, si $u = P(f)$ entonces $u(z) \to f(\theta)$ si $z \overset{\mathrm{N.T.}}{\longrightarrow} e^{i\theta}$.

- Cuando una función armónica $u$ satisface la condición

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(re^{it}\right)\right|^{p} dt < \infty$$

para algún $p \in (1,\infty)$, entonces la función $u$ puede recuperarse a partir de su función límite frontera puntual $f$.

En tal caso

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r\left(\theta - t\right) f\left(t\right) dt.$$

- Sin embargo, si la función armónica $u$ solo satisface la condición

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty$$

entonces, ya no necesariamente podremos recuperar a $u$ a partir de sus valores frontera puntuales:

Consideremos, por ejemplo, la función

$$u\left(re^{it}\right) = P_r\left(t\right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}.$$

Claramente su límite frontera puntual es la función 0 c.t.p. Pero $u$ es positiva, así que no puede ser la integral de Poisson de la función 0.

En realidad, $u$ es la integral de Poisson de la medida de Dirac en 0.

- J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.
- G.B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition, Wiley, 1999.
- J. García-Cuerva, J. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Elsevier, 1985.
- Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover, 1976.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- E. Stein, R. Shakarchi, *Functional Analysis*, Princeton, 2011.
- E. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton, 2005.