

Representaciones y descomposiciones en Análisis de Fourier

Escuela de Análisis

Martha Guzmán Partida

UNISON

Octubre de 2018

Sesión 2.

La teoría que desarrollamos a continuación permitirá examinar la convergencia de la serie de Fourier de una función en algunos espacios funcionales.

Definition (2.1)

Un espacio de Banach homogéneo es un subespacio lineal B de $L^1(T)$, en el cual está definida una norma $\|\cdot\|_B$ tal que $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$, la cual convierte a $(B, \|\cdot\|_B)$ en un espacio de Banach que verifica las siguientes propiedades:

1. Si $f \in B$ y $\tau \in T$ entonces $f_\tau \in B$ y $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$.
(Invariancia por traslaciones)
2. Para cada $f \in B$ se tiene $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.
(Continuidad de la traslación)

EJEMPLOS.

- a) $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach homogéneo.

Claramente $C(T) \subset L^1(T)$, $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_\infty$ y
 $\|f_\tau\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Además, la continuidad uniforme de f en T implica que
dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_\infty < \varepsilon \text{ siempre que } |\tau - \tau_0| < \delta.$$

- b) $(C^n(T), \|\cdot\|_{C^n})$ es un espacio de Banach homogéneo.

Aquí, $C^n(T)$ representa el subespacio lineal de $C(T)$ cuyos
elementos son las funciones con derivadas de orden n
continuas en T y

$$\|f\|_{C^n} = \max_{0 \leq j \leq n} \max_{t \in T} |f^{(j)}(t)|.$$

La completitud de este espacio se obtiene a partir de la convergencia uniforme de f y todas sus derivadas en T .

Además, $C^n(T) \subset L^1(T)$, $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^n}$ y $\|f_\tau\|_{C^n} = \|f\|_{C^n}$.

La continuidad de la traslación se obtiene también de dicha convergencia uniforme.

c) $(L^p(T), \|\cdot\|_{L^p})$, $1 \leq p < \infty$ es un espacio de Banach homogéneo.

Notamos que $L^p(T) \subset L^1(T)$, $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}$ y $\|f_\tau\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.

La continuidad de la traslación se obtiene usando que $C(T)$ es denso en $L^p(T)$ y procediendo como en la prueba de la observación 2, pág. 26, Sesión 1.

Enseguida, generalizamos el Corolario 1.5 de la Sesión 1 a espacios de Banach homogéneos.

Theorem (2.2)

Sean B un espacio de Banach homogéneo en T , $f \in B$ y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad. Entonces

$$\|k_n * f - f\|_B \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. La función $\Lambda_f : T \rightarrow B$ tal que $\Lambda_f(\tau) = f_\tau$ es continua, así la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) f_\tau d\tau$$

tiene sentido como integral con valores en B . Dado que $B \subset L^1(T)$ y la inclusión es continua, su valor en B coincide con su valor en $L^1(T)$.

Se sigue del Lema 1.6 de la Sesión 1 que

$$k_n * f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) f_{\tau} d\tau,$$

y del Teorema 1.4 de la Sesión 1 concluimos

$$\|k_n * f - f\|_B \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Observaciones. Si $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad, en particular:

- Si $f \in L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $k_n * f \rightarrow f$ en $L^p(T)$.
- Si $f \in C(T)$ entonces $k_n * f \rightarrow f$ uniformemente en T .
- Si $f \in C^n(T)$ entonces $k_n * f \rightarrow f$ uniformemente en T , al igual que todas sus derivadas.

Corollary (2.3)

Si B es un espacio de Banach homogéneo, entonces los polinomios trigonométricos son densos en B .

Demostración. Si $\{K_n\}_n$ es el núcleo de Fejér, entonces para cada $f \in B$ tenemos $\sigma_n(f) = K_n * f \rightarrow f$ en la norma de B , y $\sigma_n(f)$ es un polinomio trigonométrico. ■

Corollary (2.4)

Las medias aritméticas de la serie de Fourier de $f \in C(T)$ convergen uniformemente en T a f .

Demostración. Basta recordar que

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f),$$

y que $C(T)$ es un espacio de Banach homogéneo. ■

Núcleo de Poisson

Este núcleo es muy importante porque relaciona las series trigonométricas con las funciones analíticas.

Para $r \in [0, 1)$ defínase para $t \in T$

$$P_r(t) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos jt.$$

- La serie que define a P_r es uniformemente convergente en T .

- También

$$P_r(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ijt}$$

ya que

$$\sum_{|j|=n} r^{|j|} e^{ijt} = r^n (e^{int} - e^{-int}) = 2r^n \cos nt.$$

- Si $F(z) = \frac{1+z}{1-z}$, con $|z| < 1$, escribiendo $z = re^{it}$, $0 \leq r < 1$, $t \in [-\pi, \pi]$ obtenemos

$$\operatorname{Re} F(z) = P_r(t).$$

Por tanto, $P(z) \equiv P_r(t)$ es armónica en el disco unitario D .

- Además,

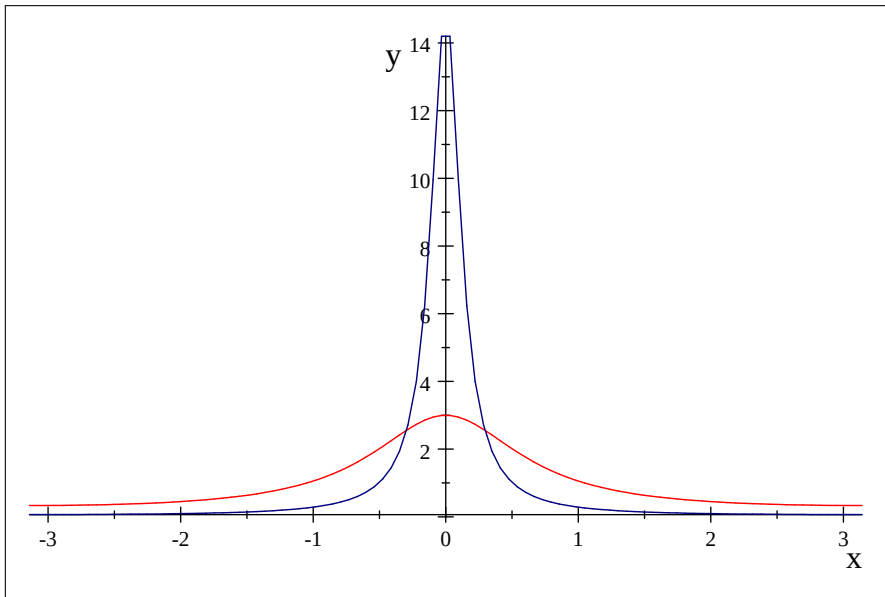
$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

- Adicionalmente, P_r es continua y positiva ya que para $0 \leq r < 1$ y $t \in [-\pi, \pi]$

$$(1-r)^2 \leq 1-2r\cos t + r^2 \leq (1+r)^2,$$

por lo que

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}.$$



$r = 1/2$ (rojo), $r = 7/8$ (azul)

- La familia $\{P_r\}_{r \in [0,1]}$ es un núcleo de sumabilidad.

a) Debido a la convergencia uniforme de P_r en cada círculo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt = 1.$$

b) Como $P_r(t) > 0$ para cada $t \in T$ se tiene de a)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)| dt = 1, \text{ para toda } r.$$

c) Para cada $\delta > 0$ se tiene para $\delta \leq |t| \leq \pi$

$$P_r(t) \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} \leq \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta} \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 1,$$

lo cual significa que $\{P_r\}$ converge uniformemente en $\delta \leq |t| \leq \pi$

y así

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_r(t) dt = 0.$$

Definition

Sea B un espacio de Banach homogéneo. Diremos que B admite convergencia en norma si para cada $f \in B$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_B = 0.$$

Enseguida consideramos la familia $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ de operadores lineales

$$\begin{aligned} S_n &: B \rightarrow B \\ f &\longmapsto S_n(f), \end{aligned}$$

la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f .

- Por Corolario 2.3 sabemos que $\sigma_N(f) \in B$ para cada $N = 0, 1, 2, \dots$ y además

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} [S_0(f) + \dots + S_N(f)],$$

de aquí que efectivamente $S_n(f) \in B$ para cada $f \in B$ y cada n .

- Para cada $f \in B$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \|S_N(f)\|_B &= \left\| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\cdot} \right\|_B \leq \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| \|e^{in\cdot}\|_B \\
 &\leq \sup_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)| \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B \\
 &\leq \|f\|_{L^1} \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B \leq \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B \|f\|_B,
 \end{aligned}$$

ya que B es un espacio de Banach homogéneo.

Así para cada $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\|S_N\|_{L(B)} \leq \sum_{n=-N}^N \|e^{in\cdot}\|_B < \infty.$$

Theorem (2.5)

Un espacio de Banach homogéneo B admite convergencia en norma si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que $\|S_n\|_{L(B)} \leq M$ para toda $n = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. Si B admite convergencia en norma, entonces $S_n(f) \rightarrow f$ en B cuando $n \rightarrow \infty$, para cada $f \in B$.

De este modo, la familia de operadores $\{S_n\}_{n=0}^{\infty} \subset L(B)$ es puntualmente acotada y como B es de Banach, se sigue del Principio de Acotamiento Uniforme que existe $M > 0$ tal que $\|S_n\|_{L(B)} \leq M$ para toda n .

Recíprocamente, sea M como en la hipótesis. Sean $f \in B$ y $\varepsilon > 0$.

Como los polinomios trigonométricos son densos en B , elíjase P un polinomio trigonométrico tal que

$$\|f - P\|_B < \varepsilon/2.$$

Por tanto, si elegimos $n \geq gr(P)$ tendremos que $S_n(P) = P$ y

$$\begin{aligned}\|S_n(f) - f\|_B &= \|S_n(f) - S_n(P) + P - f\|_B \\ &\leq \|S_n(f - P)\|_B + \|f - P\|_B \\ &\leq \|S_n\|_{L(B)} \|f - P\|_B + \|f - P\|_B \\ &< M\varepsilon/2 + \varepsilon/2. \blacksquare\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN (2.6). Hemos visto previamente que $S_n(f) = D_n * f$, donde D_n es el núcleo de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin(t/2)}.$$

Por consiguiente, por el Lema 1.6

$$\begin{aligned}\|S_n(f)\|_B &= \|D_n * f\|_B \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau) f_{\tau} d\tau \right\|_B \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)| \|f_{\tau}\|_B = \|D_n\|_{L^1} \|f\|_B\end{aligned}$$

y así, para cada $n = 1, 2, \dots$

$$\|S_n\|_{L(B)} \leq \|D_n\|_{L^1}. \quad (1)$$

Definition

Los números $L_n := \|D_n\|_{L^1}$, $n = 1, 2, \dots$ se llaman constantes de Lebesgue o números de Lebesgue.

A continuación, damos una estimación de estos números.

Lemma (2.7)

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1).$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{|\sin(t/2)|} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{|\sin(t/2)|} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin(n + 1/2)t| \left[\frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right] dt \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{t} dt \\
&\equiv A_n + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{t} dt.
\end{aligned}$$

Llamando $\varphi(t) := \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t}$ podemos mostrar que φ es acotada en $[0, \pi]$, por lo que

$$A_n \leq \|\varphi\|_{L^\infty[0, \pi]} \frac{2}{\pi} \pi = 2 \|\varphi\|_{L^\infty[0, \pi]}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, esto es, $A_n = O(1)$.

Ahora, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{t} dt &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{n+1/2}} \frac{\sin(n + 1/2)t}{t} dt \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{t} dt \\ &\left. + \int_{\frac{n}{n+1/2}\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n + 1/2)t|}{t} dt \right\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{n+1/2}} \frac{\sin(n + 1/2)t}{t} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du \equiv M < \infty$$

ya que el integrando es acotado.

Análogamente podemos mostrar que

$$\int_{\frac{n}{n+1/2}\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t} dt$$

es acotada.

Por consiguiente

$$L_n = O(1) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t} dt. \quad (2)$$

Observemos que

$$\int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t} dt \leq \frac{n+1/2}{j\pi} \int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} |\sin(n+1/2)t| dt$$

$$= \frac{n+1/2}{j\pi} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin u| \frac{du}{n+1/2} = \frac{2}{j\pi}.$$

De este modo

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t} dt &\leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \\ &\leq \frac{4}{\pi^2} \left\{ 1 + \int_1^2 \frac{dt}{t} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{dt}{t} + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \right\} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left\{ 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} \right\} \\ &= O(1) + \frac{4}{\pi^2} \log n. \end{aligned} \quad (3)$$

De (2) y (3) concluimos lo requerido. ■

OBSERVACIÓN 2.8. En el caso en el que $B = L^1(T)$, la desigualdad (1) se convierte en igualdad, esto es $\|S_n\|_{L(L^1)} = \|D_n\|_{L^1}$.

En efecto, si K_N es el núcleo de Fejér entonces

$$\begin{aligned}\|S_n(K_N)\|_{L^1} &\leq \|S_n\|_{L(L^1)} \|K_N\|_{L^1} \\ &= \|S_n\|_{L(L^1)}.\end{aligned}\tag{4}$$

Pero

$$\|S_n(K_N)\|_{L^1} = \|D_n * K_N\|_{L^1} = \|K_N * D_n\|_{L^1}\tag{5}$$

y puesto que $K_N * D_n \rightarrow D_n$ si $N \rightarrow \infty$ en $L^1(T)$, obtenemos de (4) y (5)

$$\|D_n\|_{L^1} \leq \|S_n\|_{L(L^1)}.$$

Por tanto

$$\|S_n\|_{L(L^1)} = \|D_n\|_{L^1}. \blacksquare$$

Corollary (2.9)

El espacio $L^1(T)$ no admite convergencia en norma, esto es, la serie de Fourier de $f \in L^1(T)$ no converge en general a f en la norma $\|\cdot\|_{L^1}$.

Demostración. Por el Lema 2.7, $\|D_n\|_{L^1} \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$ y aplicando la Observación 2.8 concluimos lo deseado. ■

A continuación analizamos el caso del espacio de Banach homogéneo $B = C(T)$.

La convergencia en norma en este espacio es simplemente la convergencia uniforme en T .

Corollary (2.10)

El espacio $C(T)$ no admite convergencia en norma, esto es, la serie de Fourier de $f \in C(T)$ no converge en general a f uniformemente en T .

Demostración. Probaremos que $\|S_n\|_{L(C(T))} = L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos el núcleo de Dirichlet

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin(t/2)}.$$

La función D_n tiene un número finito de ceros t_k en el intervalo $[-\pi, \pi]$, digamos que tiene $r = r(n)$ ceros ahí.

Así, la función

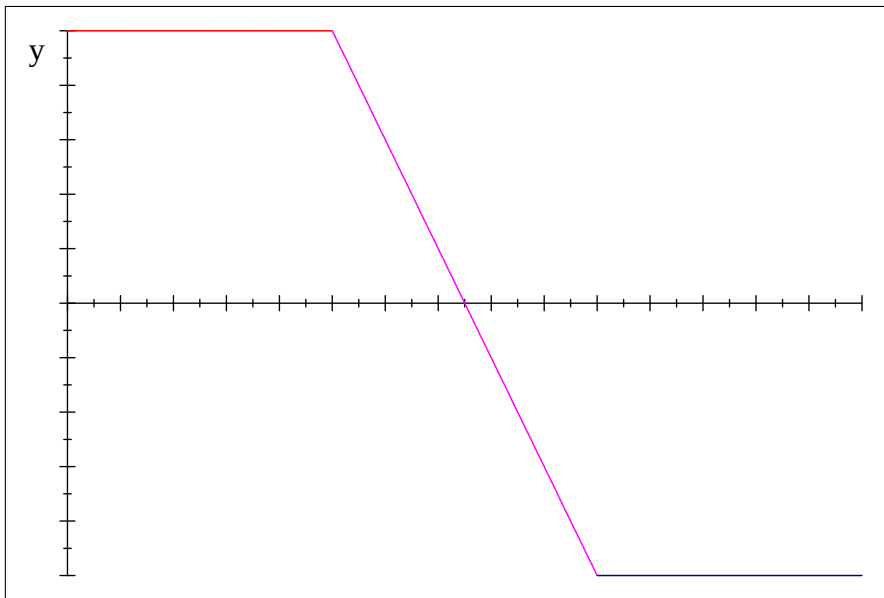
$$\operatorname{sgn} D_n(t) = \begin{cases} 1 & D_n(t) > 0 \\ 0 & D_n(t) = 0 \\ -1 & D_n(t) < 0 \end{cases},$$

tiene r saltos en dicho intervalo, a saber, en los puntos t_k .

Como $\operatorname{sgn} D_n(t)$ no es continua en T , la modificaremos ligeramente para “hacerla” continua.

Por ejemplo, moviéndonos “un poquito” alrededor de cada t_k e interpolando linealmente, como se muestra en la figura.

Llamaremos ψ_n a la función continua que resulta de este procedimiento.



El punto de intersección es un t_k

Nuestra función ψ_n queda definida del modo siguiente:

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} D_n(t) & \text{si } t \notin \bigcup_{j=1}^r I_{nj} \\ \text{lineal} & \text{si } t \in \bigcup_{j=1}^r I_{nj} \end{cases}$$

donde

$$I_{nj} = \left(t_j - \frac{\varepsilon\pi}{2r(2n+1)}, t_j + \frac{\varepsilon\pi}{2r(2n+1)} \right)$$

para $j = 1, \dots, r$ y $\varepsilon > 0$ es elegido arbitrariamente.

De este modo, para cada n tenemos $\psi_n \in C(T)$, $\|\psi_n\|_\infty = 1$ y

$$\sum_{j=1}^r l(I_{nj}) = \frac{\varepsilon\pi}{2n+1}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
 \|S_n\|_{L(C(T))} &\geq \|S_n(\psi_n)\|_\infty \geq |S_n(\psi_n)(0)| \\
 &= |D_n * \psi_n(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \psi_n(t) dt \right| \\
 &\geq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus \cup I_{nj}} D_n(t) \operatorname{sgn} D_n(t) dt \right| \\
 &\quad - \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\cup I_{nj}} D_n(t) \psi_n(t) dt \right| \\
 &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus \cup I_{nj}} |D_n(t)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\cup I_{nj}} |D_n(t)| dt \\
 &= L_n - \frac{1}{\pi} \int_{\cup I_{nj}} |D_n(t)| dt,
 \end{aligned}$$

Esto es,

$$\|S_n\|_{L(C(T))} \geq L_n - \frac{1}{\pi} \int_{\cup I_{nj}} |D_n(t)| dt. \quad (6)$$

Puesto que

$$|D_n(t)| \leq 2n + 1$$

vemos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\cup I_{nj}} |D_n(t)| dt \leq \frac{2n+1}{\pi} \sum_{j=1}^r l(I_{nj}) \leq \frac{2n+1}{\pi} \frac{\varepsilon\pi}{2n+1} = \varepsilon$$

y de (6) obtenemos

$$\|S_n\|_{L(C(T))} \geq L_n - \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, esto es,

$$\|S_n\|_{L(C(T))} \geq L_n \geq \|S_n\|_{L(C(T))}. \quad \blacksquare$$

Convergencia puntual

- En la sección anterior vimos que la serie de Fourier de una función continua no necesariamente converge uniformemente.
- En esta parte veremos que la convergencia puntual también puede fallar.

Theorem (2.11)

Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

Demostración. Consideremos la sucesión de funcionales lineales

$$\begin{aligned} T_n &: C(T) \rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto S_n(f)(0), \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Cada T_n es continuo pues

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= |S_n(f)(0)| \leq \|S_n(f)\|_\infty \\ &\leq \|S_n\|_{L(C(T))} \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

por lo que

$$\|T_n\| \leq \|S_n\|_{L(C(T))} \leq L_n,$$

e igual que antes, podemos hallar $\psi_n \in C(T)$, $\|\psi_n\|_\infty = 1$ tal que

$$|T_n(\psi_n)| \geq L_n - \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, por lo que

$$\|T_n\| = L_n \rightarrow \infty$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Por el Principio de Acotamiento Uniforme, la sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ no puede ser puntualmente acotada en $C(T)$.

Luego, podemos hallar una función continua f tal que la sucesión de escalares $(T_n(f))_{n=1}^{\infty}$ no es acotada.

Esto significa que la sucesión de sumas parciales $(S_n(f)(0))_{n=1}^{\infty}$ de la serie de Fourier de f en 0, no puede ser convergente. ■

COMENTARIOS.

- Se dice que un conjunto $E \subset T$ es un *conjunto de divergencia* para $C(T)$ si existe $f \in C(T)$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto de E .
- Puede demostrarse que todo conjunto de medida cero en T es un conjunto de divergencia para $C(T)$.
- De hecho, puede probarse que: o bien, T es un conjunto de divergencia para $C(T)$, o bien, los conjuntos de divergencia para $C(T)$ son los conjuntos de medida cero de T .
- El resultado previo es válido también en el espacio $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$. De este modo, tenemos:

En $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, o bien, existe una función $f \in L^p(T)$ cuya serie de Fourier diverge en todas partes, o bien, la serie de Fourier de cada $f \in L^p(T)$ converge c.t.p.

- Kolmogorov demostró que existe una función en $L^1(T)$ cuya serie de Fourier diverge en cada punto de T .
- Carleson ($p = 2$) y Hunt ($1 < p < \infty$) mostraron, respectivamente, que la serie de Fourier de cada función en $L^p(T)$ converge c.t.p.

Existen algunos criterios de convergencia puntual para series de Fourier, pero aquí sólo abordaremos el siguiente, que involucra a la familia de funciones de variación acotada en un intervalo.

Theorem (2.12)

(Criterio de Jordan) Si f es una función 2π -periódica y de variación acotada en una vecindad del punto x , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] .$$

En particular, si f es continua en x , la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración. Como toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes, podemos suponer SPG que f es creciente en una vecindad de x .

Usando el hecho de que $D_N(t) = D_N(-t)$ podemos escribir

$$S_N f(x) = D_N * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)] D_N(t) dt.$$

Tampoco hay pérdida de generalidad si suponemos que $x = 0$, pues si demostramos que para funciones g crecientes en una vecindad de 0 se cumplen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(t) D_N(t) dt = \frac{1}{2} g(0^+) \quad (7)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(-t) D_N(t) dt = \frac{1}{2} g(0^-) \quad (8)$$

habremos demostrado nuestro teorema en el caso en el que $x = 0$ y el caso general lo podemos obtener considerando la función creciente en una vecindad de 0

$$f_x(t) = f(x + t).$$

Probaremos solamente (7) ya que (8) es análogo.

Para mostrar (7), podemos suponer también SPG que $g(0^+) = 0$.

Una vez demostrado (7) para funciones así, en el caso general para g podemos considerar la función $G(t) = g(t) - g(0^+)$ la cual es creciente en una vecindad de 0 y satisface $G(0^+) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} G(0^+) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi G(t) D_N(t) dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [g(t) - g(0^+)] D_N(t) dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt - \frac{g(0^+)}{2},
 \end{aligned}$$

esto es,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt = \frac{g(0^+)}{2}.$$

Simplificando aún más, supondremos que g es creciente a la derecha de 0 y que $g(0^+) = 0$.

Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \text{ implica } g(t) < \varepsilon.$$

Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta g(t) D_N(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi g(t) D_N(t) dt \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Analizaremos primero I_2 .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} g(t) \frac{\sin(N + 1/2)t}{\sin(t/2)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \sin(N + 1/2)t dt
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde

$$G(t) = \frac{g(t)}{\sin(t/2)} \chi_{\{\delta < t < \pi\}}(t) \in L^1(T).$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $s = \frac{1}{2}t$ y podemos escribir el lado derecho de (9) así:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2G(2s) \sin(2N + 1)s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \sin(2N + 1)s ds,
 \end{aligned}$$

con

$$F(s) = 2G(2s) \chi_{\{|s| < \pi/2\}}(s) \in L^1(T),$$

por lo que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \sin(2N+1)s ds = -\operatorname{Im} \left(\widehat{F}(2N+1) \right) \rightarrow 0$$

si $N \rightarrow \infty$ por el Lema de Riemann-Lebesgue.

Para analizar la integral $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta g(t) D_N(t) dt$ usaremos el segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann, a saber:

“Si φ es una función continua en $[a, b]$ y h es una función monótona en $[a, b]$, entonces existe c , $a < c < b$, tal que

$$\int_a^b h(x) \varphi(x) dx = h(b^-) \int_c^b \varphi(x) dx + h(a^+) \int_a^c \varphi(x) dx”.$$

Así, podemos encontrar ν , $0 < \nu < \delta$ tal que

$$\int_0^\delta g(t) D_N(t) dt = g(\delta^-) \int_\nu^\delta D_N(t) dt.$$

Además

$$\begin{aligned} \left| \int_\nu^\delta D_N(t) dt \right| &= \left| \int_\nu^\delta \frac{\sin(N + 1/2)t}{\sin(t/2)} dt \right| \\ &= \left| 2 \int_\nu^\delta \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} dt \right| \\ &\leq \left| 2 \int_\nu^\delta \sin(N + 1/2)t \left[\frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right] dt \right| \\ &\quad + \left| 2 \int_\nu^\delta \frac{\sin(N + 1/2)t}{t} dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \int_v^\delta \left| \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right| dt + \left| 2 \int_v^\delta \frac{\sin(N+1/2)t}{t} dt \right| \\ &\equiv I_{11} + I_{12}. \end{aligned}$$

Observemos, que la integral I_{11} está acotada, digamos por M_1 (esto se prueba igual que cuando examinamos los números de Lebesgue L_N).

Con respecto a I_{12} tenemos que

$$\begin{aligned} I_{12} &= 2 \left| \int_{(N+1/2)v}^{(N+1/2)\delta} \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ &\leq 2 \sup_{L>0} \left| \int_0^L \frac{\sin t}{t} dt \right| = M_2 < \infty, \end{aligned}$$

ya que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta g(t) D_N(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} g(\delta^-) \{I_{11} + I_{12}\} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} g(\delta^-) \{M_1 + M_2\} \\ &\leq \left(\frac{M_1 + M_2}{2\pi} \right) \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$



J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.



G.B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition, Wiley, 1999.



J. García-Cuerva, J. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Elsevier, 1985.



Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover, 1976.



W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.



E. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton, 2005.