

# Representaciones y descomposiciones en Análisis de Fourier

Escuela de Análisis, Cuernavaca

Martha Guzmán Partida

UNISON

Octubre de 2018

# Sesión 1.

- *Problema que nos interesa:*

Representar una función  $2\pi$ -periódica  $f$  como:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)$$

o equivalentemente,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1)$$

- *La convergencia en la expresión (1) será puntual o en norma.*

La representación (1) es un problema originado en 1822 (J. Fourier) y resuelto c.t.p. en 1965 (L. Carleson).

- *Un poco de notación:*

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Identificamos funciones complejas  $F$  definidas en  $T$  y funciones complejas  $f$  definidas en  $\mathbb{R}$  y  $2\pi$ -periódicas:

$$F(e^{it}) \leftrightarrow f(t).$$

$(L^p(T), \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , es la clase de las funciones complejas, Lebesgue medibles,  $2\pi$ -periódicas tales que

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right]^{1/p} < \infty, \quad p < \infty \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)| < \infty.\end{aligned}$$

$C(T) = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continua}\}$ , con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

Un polinomio trigonométrico es una función de la forma

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

$$u_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}.$$

Producto interior en  $L^2(T)$ :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

- Notemos que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{nm}.$$

- $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$  es un conjunto ortonormal en  $L^2(T)$ .
- Probaremos que:  $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$  es un *conjunto ortonormal completo* (o base ortonormal) en  $L^2(T)$ .
- Y aplicando teoría elemental de espacios de Hilbert tendremos:  
Cada  $f \in L^2(T)$  se expresa

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n \quad (2)$$

en la norma  $\|\cdot\|_2$ .

Para demostrar (2), bastará probar:

### Theorem (1.1)

*El conjunto de todos los polinomios trigonométricos es denso en  $(L^2(T), \|\cdot\|_2)$ .*

**Demostración.** Como  $C(T)$  es denso en  $(L^2(T), \|\cdot\|_2)$ , basta probar que dados  $f \in C(T)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe un polinomio trigonométrico  $P$  tal que

$$\|f - P\|_2 < \varepsilon. \quad (3)$$

Dado que

$$\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty \text{ en } C(T),$$

la desigualdad (3) se cumplirá si podemos asegurar que

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Por lo anterior, solo tenemos que mostrar el siguiente

### Lemma (1.2)

*Dados  $f \in C(T)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe un polinomio trigonométrico  $P$  tal que*

$$\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon.$$

**Demostración.** Si podemos construir una sucesión  $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$  de polinomios trigonométricos que satisfaga:

- a.  $Q_k(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$
- b.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$
- c.  $Q_k \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $[-\pi, \delta] \cup [\delta, \pi]$   
 $\forall \delta > 0,$

nuestro problema quedará resuelto como se muestra a continuación.

En efecto,

Dada  $f \in C(T)$  construimos para  $k \in \mathbb{N}$

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds. \quad (4)$$

Escribimos

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{int}$$

y lo sustituimos en (4):

$$P_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{int},$$

un polinomio trigonométrico.

Como  $f$  es uniformemente continua, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon/2.$$

Usando a), b) y (4) obtenemos

$$\begin{aligned} |P_k(t) - f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Por continuidad uniforme, para cualquier  $k$

$$I_1 \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} Q_k(s) ds \leq \varepsilon/2.$$

Usando c) tenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} Q_k(s) ds \\ &\leq 2 \|f\|_{\infty} \eta_k(\delta), \end{aligned}$$

donde

$$\eta_k(\delta) = \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} Q_k(s).$$

Eligiendo  $k$  suficientemente grande tendremos finalmente

$$I_2 \leq \varepsilon/2,$$

esto es,

$$\|P_k - f\|_{\infty} < \varepsilon.$$

*Construcción de  $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ .*

Existen diferentes construcciones. Seguimos la planteada en [5].

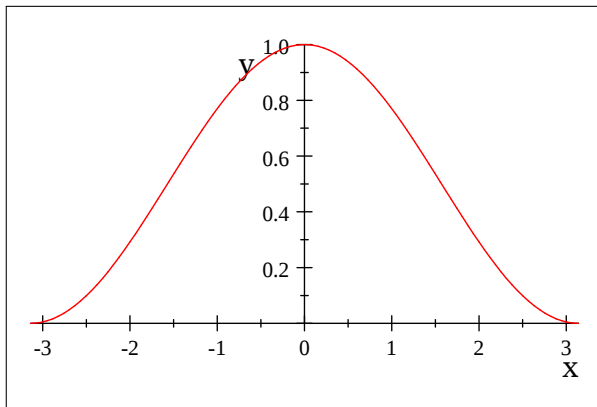
Sea

$$Q_k(t) = c_k \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k$$

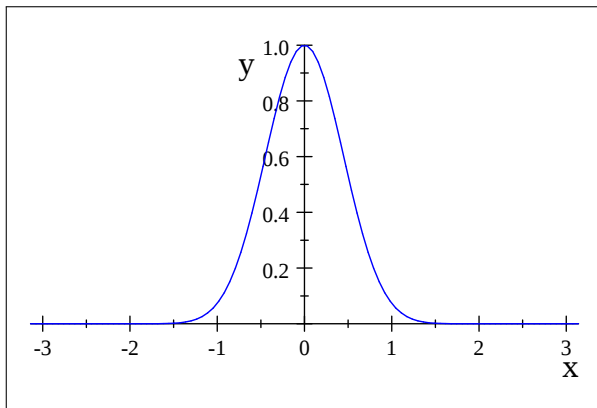
para  $k = 1, 2, \dots$ , donde la constante  $c_k$  la elegimos como

$$c_k = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \right)^{-1}.$$

Gráfica de  $(1 + \cos t) / 2$



Gráfica de  $((1 + \cos t) / 2)^{10}$



Claramente, cada  $Q_k$  es un polinomio trigonométrico.

También, es claro que  $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$  cumple con las condiciones a) y b).

Falta checar la condición c).

Como  $Q_k$  es par, por b) tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \\ &\geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t dt \\ &= \frac{2c_k}{\pi(k+1)}, \end{aligned}$$

así

$$c_k \leq \pi(k+1)/2.$$

Por tanto, para cualquier  $\delta \leq |t| \leq \pi$

$$\begin{aligned} Q_k(t) &\leq Q_k(\delta) \\ &\leq \frac{\pi}{2} (k+1) \left( \frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

si  $k \rightarrow \infty$ . ■

*Nota.* Otra posible elección de polinomios trigonométricos es a través del núcleo de Fejér que estudiaremos más adelante.

- Dada  $f \in L^1(T) \supset L^2(T)$  podemos definir sus coeficientes de Fourier así:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esto induce una asociación

$$\begin{aligned} L^1(T) &\rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f &\mapsto \left\{ \hat{f}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

De modo formal, podemos definir la serie de Fourier de  $f$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

cuyas sumas parciales son los polinomios trigonométricos

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

- Dado que  $L^2(T)$  es un espacio de Hilbert separable,

entonces  $L^2(T) \simeq l^2(\mathbb{Z})$  vía el isomorfismo isométrico

$$f \longmapsto \left\{ \widehat{f}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

y por consiguiente podemos concluir:

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int} = f(t) \text{ en la norma } \|\cdot\|_2, \quad (5)$$

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

## *Algunos comentarios.*

- ◆ Hay criterios de convergencia puntual para representar a  $f$  como antes (Dini, Jordan, etc.).
- ◆ Las funciones continuas no caen dentro de los criterios anteriores.
- ◆ De hecho, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto (Du Bois-Reymond, 1873).
- ◆ Más aún, dado cualquier conjunto  $E$  de medida cero existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en  $E$  (Kahane y Katznelson, 1966).
- ◆ El surgimiento de la teoría de la medida y los espacios  $L^p$  a principios del siglo XX replanteó el problema de la convergencia de las series de Fourier:

- 1) Si  $f \in L^p(T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ¿Será cierto que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_p = 0$ ?
- 2) Si  $f \in L^p(T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ¿Será cierto que  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$  para casi toda  $x$ ?

Acabamos de mostrar que 1) es cierto para  $p = 2$ .

Cuando  $1 < p < \infty$ , también 1) puede responderse afirmativamente.

Cuando  $p = 1$ , la respuesta para 1) es NO.

Con respecto a 2), el problema es más difícil.

Kolmogorov (1926) construyó una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Así, la respuesta para 2) es NO cuando  $p = 1$ .

Para  $1 < p < \infty$  la respuesta a b) es afirmativa. Esto fue demostrado por L. Carleson en 1965 para  $p = 2$  y por R. Hunt para cualquier  $p > 1$  en 1967.

Hasta la prueba de Carleson, se desconocía la respuesta a 2) cuando  $f$  era continua.

Empezamos con propiedades elementales de los coeficientes de Fourier.

- Si  $P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$  entonces  $a_n = \widehat{P}(n)$ ,  $n = -N, \dots, N$ .
- $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$ ,  $f, g \in L^1(T)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha \widehat{f}(n)$ ,  $f \in L^1(T)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- $\widehat{\bar{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$ ,  $f \in L^1(T)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

- Si  $f_\tau(t) := f(t - \tau)$ ,  $\tau \in T$ , entonces  $f_\tau(n) = \widehat{f}(n) e^{-in\tau}$ ,  $f \in L^1(T)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Si  $f \in L^1(T)$  entonces  $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1,$$

lo cual implica que la transformación lineal  $\widehat{\phantom{x}}$  envía funciones  $f \in L^1(T)$  en sucesiones acotadas  $\left(\widehat{f}(n)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  de manera continua.

- Si  $(f_j)_{j=1}^\infty \subset L^1(T)$ ,  $f \in L^1(T)$  y  $f_j \rightarrow f$  en  $L^1(T)$ , entonces  $\widehat{f}_j(n) \rightarrow \widehat{f}(n)$  si  $j \rightarrow \infty$  uniformemente en  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Theorem (1.3)

Sean  $f, g \in L^1(T)$ . Entonces, para casi toda  $t \in T$ , la función  $\tau \mapsto f(t - \tau)g(\tau)$  es integrable en  $T$ . Además, si

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau)g(\tau) d\tau,$$

tenemos que

- 1  $h \in L^1(T)$ .
- 2  $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .
- 3  $\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Demostración.** Usando el teorema de Tonelli obtenemos 1) y 2).

Usando el teorema de Fubini vemos que

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)} g(\tau) e^{-in\tau} dt d\tau \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \blacksquare\end{aligned}$$

Así podemos introducir

## Definition

La convolución  $f * g$  de  $f, g \in L^1(T)$  se define así

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

El Teorema 1.3 establece entonces que

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

## Propiedades de la Convolución.

- $f * g = g * f$ .
- $(f * g) * h = f * (g * h)$ .
- $f * (g + h) = f * g + f * h$ .
- Si  $f \in L^1(T)$  y  $\varphi(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$  entonces

$$\varphi * f(t) = \sum_{n=-N}^N a_n \hat{f}(n) e^{int} \quad (6)$$

*Un par de observaciones:*

Si  $f \in L^1(T)$ , podemos definir para cada  $\tau \in T$  la función

$$f_\tau(t) = f(t - \tau).$$

Entonces:

- 1  $f_\tau \in L^1(T)$  para cada  $\tau \in T$  y  $\|f_\tau\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ .
- 2 La función  $\Lambda_f : T \rightarrow L^1(T)$  tal que

$$\Lambda_f(\tau) = f_\tau$$

es continua en  $T$ .

En efecto, veamos por ejemplo 2).

Si  $\varphi \in C(T)$ , la continuidad uniforme de  $\varphi$  en  $T$  garantiza que dado  $\varepsilon > 0$ , exista  $\delta > 0$  tal que

$$\left\| \varphi_\tau - \varphi_{\tau_0} \right\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t - \tau) - \varphi(t - \tau_0)| dt < \varepsilon/3$$

siempre que  $|\tau - \tau_0| < \delta$ .

Ahora, si  $f \in L^1(T)$ , existe  $\varphi \in C(T)$  tal que  $\|f - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon/3$ , luego

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} &\leq \|f_\tau - \varphi_\tau\|_{L^1} + \|\varphi_\tau - \varphi_{\tau_0}\|_{L^1} + \|\varphi_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_{L^1} \\ &= \|(f - \varphi)_\tau\|_{L^1} + \|\varphi_\tau - \varphi_{\tau_0}\|_{L^1} + \|(\varphi - f)_{\tau_0}\|_{L^1} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \|\varphi_\tau - \varphi_{\tau_0}\|_{L^1} < \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que  $|\tau - \tau_0| < \delta$ .

## Definition (NS)

Un núcleo de sumabilidad (o identidad aproximada) es una sucesión  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  de funciones en  $C(T)$  tal que:

- a)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) dt = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$
- b)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| dt \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$
- c) Para cada  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |k_n(t)| dt = 0.$$

En ocasiones, se considerarán familias de funciones en  $C(T)$  indicadas por un conjunto no numerable.

Necesitaremos hacer uso de integración de Riemann para funciones continuas con valores en un espacio de Banach.

*Un breve repaso:*

Sea  $F : [a, b] \rightarrow B$  una función continua, donde  $B$  es un espacio de Banach.

## Definition

La integral de Riemann de  $F$  se define como

$$\int_a^b F(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) F(x_j),$$

donde

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b\}.$$

No es difícil demostrar la existencia de este límite (se usa la completitud de  $B$  y la continuidad uniforme de  $F$  en  $[a, b]$ ). Además, se tienen las siguientes propiedades:

$$① \int_a^b (\alpha F(x) + \beta G(x)) dx = \alpha \int_a^b F(x) dx + \beta \int_a^b G(x) dx.$$

$$② \int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx, \quad a < c < b.$$

$$③ \left\| \int_a^b F(x) dx \right\|_B \leq \int_a^b \|F(x)\|_B dx.$$

$$④ \text{ Si } \Lambda \in B^* \text{ entonces}$$

$$\Lambda \left( \int_a^b F(x) dx \right) = \int_a^b (\Lambda \circ F)(x) dx.$$

## Theorem (1.4)

Sea  $\varphi : T \rightarrow B$  una función continua,  $B$  un espacio de Banach y  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  un núcleo de sumabilidad. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0).$$

**Demostración.** Si  $0 < \eta < \pi$  tenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau - \varphi(0) \right\|_B \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \right\|_B \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau| \leq \eta} |k_n(\tau)| \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\eta < |\tau| \leq \pi} |k_n(\tau)| \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B d\tau \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Usando la continuidad de  $\varphi$  en 0, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $I_1 < C\varepsilon$  si  $|\tau| < \delta$ .

De igual manera, tenemos que  $I_2 < \varepsilon$  si  $n$  es suficientemente grande, porque  $\varphi$  es acotada y por propiedad c) de  $\{k_n\}$ . ■

### Corollary (1.5)

Si  $f \in L^1(T)$  y  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  es un núcleo de sumabilidad entonces

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) f_{\tau} d\tau. \quad (7)$$

**Demostración.** Observemos que el límite se toma respecto a la norma de  $L^1(T)$ .

Escribiendo  $\varphi(\tau) = f_{\tau}$ , vemos que  $\varphi : T \rightarrow L^1(T)$  es continua ya que  $\varphi = \Lambda_f$ .

Además  $\varphi(0) = f$ , así por el Teorema (1.4) concluimos lo deseado. ■

Enseguida, identificamos el lado derecho de (7).

### Lemma (1.6)

Si  $k \in C(T)$  y  $f \in L^1(T)$  entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau = k * f.$$

**Demostración.** Supongamos primero que  $f \in C(T)$ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j},$$

donde el límite se toma respecto a  $\|\cdot\|_{L^1}$  y

$$P = \{\tau_0 = a < \tau_1 < \dots < \tau_{N+1} = b\}.$$

Usando que  $f$  y  $k$  son uniformemente continuas en  $T$ , podemos ver que

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f(\cdot - \tau_j) = k * f(\cdot)$$

es un límite uniforme en  $T$ , luego

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j} \rightarrow k * f$$

en  $L^1(T)$ . Como también

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau$$

en  $L^1(T)$ , tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau = k * f \text{ ctp.}$$

Si ahora  $f \in L^1(T)$  es arbitraria y  $\varepsilon > 0$ , elíjase  $g \in C(T)$  tal que  $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ .

Por el caso previo tendremos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau - k * f \right\|_{L^1} \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) (f - g)_{\tau} d\tau - k * (g - f) \right\|_{L^1} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k(\tau)| \|(f - g)_{\tau}\|_{L^1} d\tau + \|k\|_{L^1} \|f - g\|_{L^1} \leq 2 \|k\|_{L^1} \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Debido a los resultados (1.5) y (1.6) podemos decir:

*“Si  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  es un núcleo de sumabilidad y  $f \in L^1(T)$  entonces*

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n * f$$

*en la norma de  $L^1(T)$ ”.*

# Núcleo de Fejér

Este núcleo se define así

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}.$$

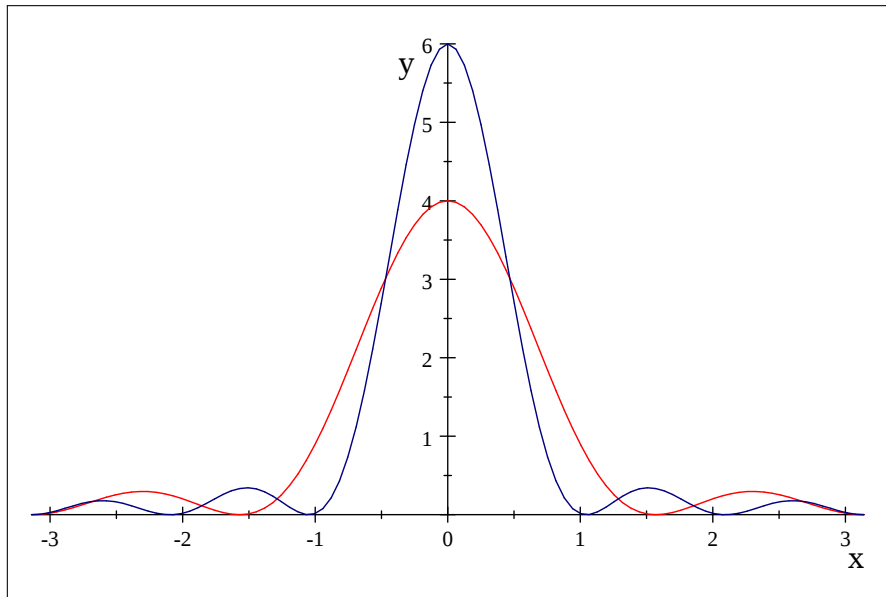
La familia  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  es un núcleo de sumabilidad:

$$\text{a) } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt \right] = 1.$$

Para mostrar las propiedades restantes, probaremos el siguiente lema.

## Lemma (1.7)

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2, \quad t \neq 0.$$



$n = 3$  (rojo),  $n = 5$  (azul)

## **Demostración.** (Esbozo muy general)

Se usa la identidad trigonométrica

$$\sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \right)$$

y operando adecuadamente obtenemos que

$$\begin{aligned} \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \sum_{j=-n}^n \left( 1 - \frac{|j|}{n+1} \right) e^{ijt} &= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{2} (1 - \cos (n+1) t) \\ &= \frac{1}{n+1} \sin^2 \left( \frac{(n+1) t}{2} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

De a) y del Lema 1.7, tenemos claramente

$$\text{b)} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| dt \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, si  $0 < \delta < \pi$ , entonces

$$\int_{\delta < |t| < \pi} K_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_{\delta < |t| < \pi} \left[ \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt.$$

Notemos que si  $\delta < |t| < \pi$

$$\left[ \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 \leq \frac{1}{\sin^2(\delta/2)},$$

por lo que

c)

$$0 \leq \int_{\delta < |t| < \pi} K_n(t) dt \leq \frac{2\pi}{\sin^2(\delta/2)} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

- Para  $f \in L^1(T)$  escribiremos

$$\sigma_n(f) = K_n * f.$$

- Con esta notación y por Corolario 1.5 y Lema 1.6 tenemos

$$\sigma_n(f) \rightarrow f \text{ en } L^1(T).$$

- Además  $\sigma_n(f)(t)$  es el polinomio trigonométrico (ver (6))

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{ijt}$$

- Lo anterior implica que los polinomios trigonométricos son densos en  $L^1(T)$  (algo que ya habíamos mostrado, pero con otro método).

## Theorem (1.8)

*Los coeficientes de Fourier determinan a una función. De manera precisa: Si  $f \in L^1(T)$  satisface  $\hat{f}(n) = 0$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces  $f = 0$ .*

**Demostración.** Dado que

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j) e^{ijt} = 0$$

para cada  $n$  y  $\sigma_n(f) \rightarrow f$  en  $L^1(T)$ , se sigue que  $f = 0$ . ■

Otra forma de expresar este teorema es así:

“Si  $f, g \in L^1(T)$  y  $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$  entonces  $f = g$ ”.

## Theorem (1.9)

(Lema de Riemann-Lebesgue) Si  $f \in L^1(T)$  entonces  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$ .

**Demostración.** Dado  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $P$  tal que

$$\|f - P\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Si  $P(t) = \sum_{j=-s}^s a_j e^{ijt}$  entonces  $\widehat{P}(n) = 0$  cuando  $|n| > s$  y para tales  $n$ 's

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f - P}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - P)(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \|f - P\|_{L^1} < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

# Núcleo de Dirichlet

Se define así

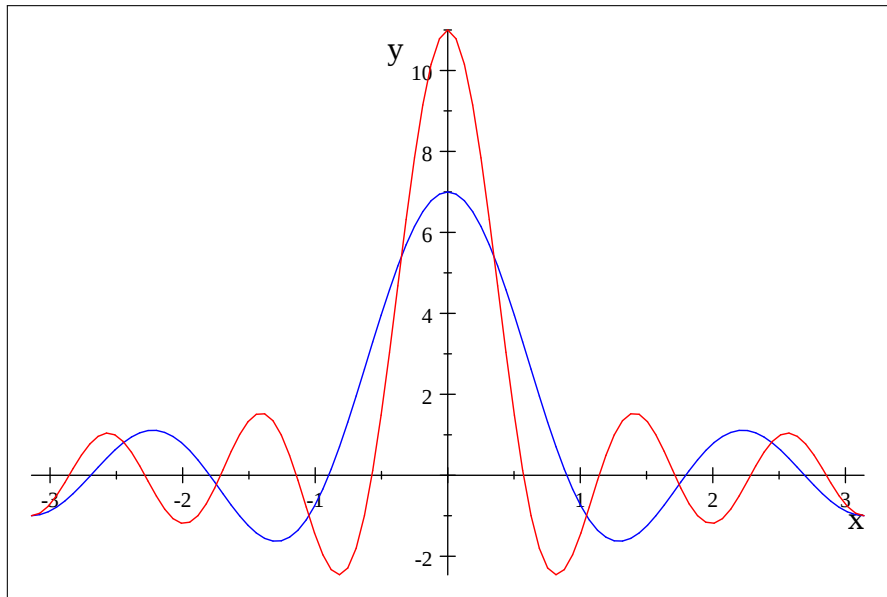
$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}, \quad t \in T.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} 2i \sin(t/2) D_N(t) &= (e^{it/2} - e^{-it/2}) D_N(t) \\ &= \sum_{n=-N}^N e^{i(n+1/2)t} - \sum_{n=-N}^N e^{i(n-1/2)t} \\ &= e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t} \\ &= 2i \sin(N + 1/2) t, \end{aligned}$$

es decir,

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + 1/2) t}{\sin(t/2)}.$$



$n = 3$  (azul),  $n = 5$  (rojo)

- Notemos que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$  para cada  $N \in \mathbb{N}$ .



$$D_N * f(t) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int} = S_N f(t). \quad (8)$$

(la  $n$ -ésima suma parcial de la serie de Fourier de  $f$ )

- Sin embargo,  $\{D_N\}_{N=1}^{\infty}$  **no** es un núcleo de sumabilidad.  
(mostraremos más adelante que  $\|D_N\|_{L^1} \rightarrow \infty$  si  $N \rightarrow \infty$ )



$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} (D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_N(t)). \quad (9)$$

**Prueba de (9).** Como en la pág. 43,

$$\begin{aligned}[2i \sin(t/2)]^2 D_k(t) &= \left[ e^{it/2} - e^{-it/2} \right] \left[ e^{i(k+1/2)t} - e^{-i(k+1/2)t} \right] \\ &= \left[ e^{i(k+1)t} - e^{ikt} \right] - \left[ e^{-ikt} - e^{-i(k+1)t} \right].\end{aligned}$$

Si ahora sumamos sobre  $k = 0, 1, \dots, N$  tenemos

$$\begin{aligned}[2i \sin(t/2)]^2 \sum_{k=0}^N D_k(t) &= \left[ e^{i(N+1)t} - 1 \right] - \left[ 1 - e^{-i(N+1)t} \right] \\ &= \left[ e^{i(N+1)t/2} - e^{-i(N+1)t/2} \right]^2 \\ &= [2i \sin(N+1)t/2]^2,\end{aligned}$$

esto es, por Lema 1.7

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(t) = \frac{1}{N+1} \frac{[2i \sin(N+1)t/2]^2}{[2i \sin(t/2)]^2} = K_N(t). \blacksquare$$

- Se sigue de lo anterior que para  $f \in L^1(T)$

$$\sigma_N(f) = K_N * f = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n * f = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f),$$

que son las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ .

- Consecuentemente,

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f) \rightarrow f \text{ en } L^1(T).$$



J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.



G.B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition, Wiley, 1999.



J. García-Cuerva, J. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Elsevier, 1985.



Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover, 1976.



W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.



E. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton, 2005.