Minicurso de Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales

Mónica Clapp
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela de Análisis de la UCIM
Cuernavaca - Octubre de 2018

Índice general

Prefacio

Muchos fenómenos de la física, la ingeniería, la biología, la medicina, las finanzas, etc. se modelan mediante una ecuación diferencial, y muchos de estos modelos tienen una formulación variacional, es decir, las soluciones de la ecuación diferencial son los puntos críticos de un funcional, dado por una integral, en un espacio adecuado de funciones. Dicha integral representa alguna energía, una acción, una función de costo, etc.

Los problemas variacionales aparecen también en muchas áreas importantes de las matemáticas, por ejemplo, en la geometría riemanniana, donde las geodésicas resultan ser puntos críticos de un funcional de energía o donde problemas importantes, como el problema de Yamabe o el problema de la curvatura escalar prescrita, tienen una formulación variacional.

Para que el modelo en cuestión tenga sentido, lo primero es demostrar que tiene al menos una solución. Durante mucho tiempo se identificó al modelo con el fenómeno físico al que describía, y el hecho de que en la naturaleza existiese una distribución de equilibrio para algún problema físico se tomaba como evidencia suficiente para la existencia de un mínimo de la integral variacional asociada.

Hacia finales del siglo XIX Weierstrass mostró un ejemplo de un problema variacional que no admite una solución mínima [13]. Te lo proponemos aquí como ejercicio.

Ejercicio 0.1. *Sean* $\mathcal{C}^1[-1,1]$ *el espacio de las funciones reales continuamente diferenciables en el intervalo* $[-1,1]$,

$$V := \{u \in \mathcal{C}^1[-1,1] : u(1) = 1,\ u(-1) = -1\}$$

y $J : V \to \mathbb{R}$ *la función dada por*

$$J(u) := \int_{-1}^{1} |xu'(x)|^2 dx.$$

(*a*) *Prueba que* $\inf\{J(u) : u \in V\} = 0$. (Sugerencia: Considera las funciones

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Prueba que pertenecen a V y que $J(u_\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

(*b*) *Prueba que J no alcanza su mínimo en V.*

El primer objetivo del cálculo de variaciones consiste en dar condiciones bajo las cuales un problema variacional dado tiene al menos una solución. Interesa también estudiar si la solución es única o si existen muchas de ellas, y decir algo acerca de su aspecto cualitativo: si se trata de una función positiva o si cambia de signo, si tiene algún tipo de simetrías, cuál es su perfil, etc.

El punto de partida de los métodos variacionales es el principio de Dirichlet que establece que la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

en un dominio Ω de $\mathbb{R}^N$ es el mínimo de una integral, llamada la integral de energía, en un cierto espacio de funciones. En este caso, bajo hipótesis adecuadas, la solución existe y es única.

Si el problema no es lineal, por ejemplo,

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

la situación cambia drásticamente. La existencia o no de soluciones para este problema, y el número de éstas, dependen del crecimiento del término no lineal y del dominio. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y $N = 3$ este problema tiene una infinidad de soluciones. En cambio, si $N \geq 4$ y Ω es convexo, este problema no tiene más que la solución trivial.

En estas notas daremos una breve introducción a estos problemas y a los métodos que se usan para abordarlos. Existen varios textos excelentes, donde puedes aprender mucho más sobre este tema, por ejemplo, los libros [1, 5, 10, 11, 13].

Una lectura muy disfrutable es el libro de Hildebrand y Tromba [8], apto para ser disfrutado por todo público, no sólo por matemáticos.

Capítulo 1

El principio de Dirichlet

En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ denota a su frontera, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función dada.

Un **dominio** es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^N$. Δ es el **operador de Laplace** o **laplaciano** definido como

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

1.1. Los prerrequisitos

Empezaremos introduciendo brevemente los conceptos y resultados del análisis matemático que usaremos para abordar este problema. Una exposición más completa y detallada se encuentra, por ejemplo, en [3, 4, 9].

1.1.1. Integración por partes

Ω denotará siempre a un dominio en $\mathbb{R}^N$. Para $k \geq 0$ denotaremos por

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$ al conjunto de funciones continuas $\Omega \to \mathbb{R}$ que son k-veces continuamente diferenciables en Ω,
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ al conjunto de funciones continuas $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que son k-veces continuamente diferenciables en Ω y cada una de sus derivadas parciales de orden $\leq k$ tiene una extensión continua a la cerradura de Ω,
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega), \quad \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}),$

- $\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \operatorname{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\}$, donde

$$\operatorname{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

  es el **soporte** de φ, $0 \leq k \leq \infty$.

Recordemos los siguientes resultados clásicos del cálculo.

Proposición 1.1. (*a*) ***Fórmula de Gauss.*** *Si* $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

(*b*) ***Integración por partes.*** *Si* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

(*c*) ***Fórmula de Green.*** *Si* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega (\Delta f)\varphi + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla \varphi = 0.$$

Ejercicio 1.2. *Demuestra la* Proposición 1.1. (Sugerencia: Si denotamos también por φ a la extensión de φ que vale 0 fuera de Ω, entonces $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subset [-r, r]^N$ para algún $r > 0$. Usa el teorema fundamental del cálculo para probar la afirmación (*a*).)

1.1.2. Los espacios de Lebesgue

Consideramos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ e identificamos a dos funciones si coinciden casi dondequiera (es decir, excepto en un subconjunto de medida cero de su dominio). Para $p \in [1, \infty)$ definimos

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \text{ es integrable en } \Omega\}$$

y denotamos por

$$|f|_p := \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

a la norma en el espacio $L^p(\Omega)$. Cuando nos interese hacer énfasis en el dominio, usaremos la notación $|f|_{L^p(\Omega)}$ en vez de $|f|_p$.

Definición 1.3. *Un espacio vectorial normado (sobre* $\mathbb{R}$*) que es completo con la métrica dada por su norma se llama un* ***espacio de Banach****.*

Teorema 1.4. $L^p(\Omega)$ *con la norma* $|\cdot|_p$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Consulta [4, Teorema 14.27]. $\square$

Proposición 1.5 (**Desigualdad de Hölder**). *Sean* $p, q \in (1, \infty)$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in L^q(\Omega)$, *entonces* $fg \in L^1(\Omega)$ *y*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q. \tag{1.2}$$

Demostración. Consulta [4, Proposición 14.21]. □

Usando la desigualdad de Hölder es sencillo demostrar las siguientes desigualdades.

Corolario 1.6. *Si* Ω *es acotado y* $1 < p < r < \infty$, *entonces* $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *y*

$$|f|_p \leq |\Omega|^{(r-p)/rp} |f|_r \qquad \forall f \in L^r(\Omega), \tag{1.3}$$

donde $|\Omega| := \int_\Omega 1$ *es la medida de Lebesgue de* Ω *en* $\mathbb{R}^N$.

Corolario 1.7 (**Desigualdad de interpolación**). *Sean* $1 \leq p < s < r \leq \infty$. *Prueba que, si* $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, *entonces* $f \in L^s(\Omega)$ *y se cumple que*

$$|f|_s \leq |f|_p^{1-\alpha} |f|_r^{\alpha}, \tag{1.4}$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ *satisface que* $\frac{1}{s} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{r}$ *si* $r < \infty$, *o* $\alpha := 1 - \frac{p}{s}$ *si* $r = \infty$.

1.1.3. Espacios de Hilbert

Definición 1.8. *Un espacio vectorial* H *(sobre* $\mathbb{R}$*) con un producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *que es completo respecto a la norma inducida*

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

se llama un ***espacio de Hilbert***.

Ejercicio 1.9. *Prueba que, para cada* $u_0 \in H$, *la función* $T_{u_0} : H \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$T_{u_0}(v) := \langle u_0, v \rangle$$

es lineal y continua. (Sugerencia: Usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz.)

El siguiente resultado clásico del análisis funcional afirma que éstas son las únicas funciones lineales y continuas de H en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.10 (**de representación de Fréchet-Riesz**). *Si* H *es un espacio de Hilbert y* $T : H \to \mathbb{R}$ *es lineal y continua, entonces existe un único* $u_0 \in H$ *tal que*

$$T(v) = \langle u_0, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

Demostración. Consulta [4, Teorema 15.19]. □

El vector u_0 del Teorema 1.10 satisface la siguiente propiedad de minimización.

Proposición 1.11 (Principio de Dirichlet). *Sea $T : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces $u_0 \in H$ satisface*

$$T(v) = \langle u_0, v\rangle \qquad \forall v \in H$$

si y sólo si u_0 es un mínimo del funcional $J : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) := \frac{1}{2}\|v\|^2 - Tv.$$

Demostración. $\Rightarrow)$: Si $T(v) = \langle u_0, v\rangle$ para todo $v \in H$, entonces

$$\begin{aligned}
J(v) &= J(u_0 + (v - u_0)) \\
&= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \langle u_0, v - u_0\rangle + \frac{1}{2}\|v - u_0\|^2 - T(u_0) - T(v - u_0) \\
&= J(u_0) + \frac{1}{2}\|v - u_0\|^2 \geq J(u_0)
\end{aligned}$$

para todo $v \in H$. Por tanto u_0 es un mínimo de J.

$\Leftarrow)$: Si u_0 es un mínimo de J, entonces, para cada $v \in H$, la función $J_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$J_v(t) := J(u_0 + tv) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - T(u_0) + (\langle u_0, v\rangle - T(v))\, t + \frac{1}{2}\|v\|^2 t^2$$

tiene un mínimo en 0. En consecuencia,

$$0 = J_v'(0) = \langle u_0, v\rangle - T(v).$$

Es decir, $\langle u_0, v\rangle = Tv$ para todo $v \in H$. $\square$

1.1.4. Espacios de Sobolev

La expresión

$$\langle \psi, \varphi\rangle_1 := \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \psi\varphi \qquad \psi, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \tag{1.5}$$

es un producto escalar en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Pero este espacio no es completo con la norma

$$\|\varphi\|_1 := \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega \varphi^2\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

inducida por este producto escalar.

Ejercicio 1.12. *Da un ejemplo de una sucesión de funciones $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(-1, 1)$ que sea de Cauchy respecto a la norma*

$$\|\varphi\|_1 := \sqrt{\int_{-1}^{1} (\varphi')^2 + \int_{-1}^{1} \varphi^2}$$

y que no converja a una función en $\mathcal{C}^1[-1, 1]$ con dicha norma.

Para describir la completación de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con la norma (1.6), empezaremos introduciendo una noción de derivada que extiende a la de derivada parcial. Dicha noción está inspirada en la fórmula de integración por partes.

Denotamos por

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u|_\omega \in L^1(\omega) \ \forall \text{ abierto acotado } \omega \text{ con } \overline{\omega} \subset \Omega\},$$

donde $u|_\omega$ denota la restricción de u a ω.

Ejercicio 1.13. *Prueba que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$.* (Sugerencia: Usa la desigualdad (1.3).)

Definición 1.14. *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que u es **débilmente diferenciable en** Ω si existen $v_1, \ldots, v_N \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \tag{1.7}$$

*para cada $i = 1, \ldots, N$. La función v_i que cumple (1.7) se llama la i-**ésima derivada débil de** u en Ω y se denota*

$$D_i u := v_i.$$

*El **gradiente débil de** u en Ω es la función $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ cuyas componentes son las derivadas débiles, es decir,*

$$\nabla u(x) := (D_1 u(x), D_2 u(x), \cdots, D_N u(x)).$$

Ejercicio 1.15. *Prueba que la función v_i que cumple (1.7), si existe, es única.*

La afirmación del siguiente ejercicio es consecuencia inmediata de la Proposición 1.1.

Ejercicio 1.16. *Prueba que, si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces u es débilmente diferenciable en Ω y*

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \cdots, N.$$

No todas las funciones débilmente diferenciables son diferenciables, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejercicio 1.17. *Sea $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ la función $u(x) = |x|$. Prueba que u es débilmente diferenciable en $(-1, 1)$ y que su derivada débil es la función*

$$v(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1), \\ -1 & x \in (-1, 0]. \end{cases}$$

El ejemplo siguiente muestra que hay funciones que no son débilmente diferenciables.

Ejercicio 1.18. *Prueba que la función v del ejercicio anterior no es débilmente diferenciable en $(-1,1)$.*

Ejercicio 1.19. *Prueba que la derivada débil es lineal, es decir, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ son débilmente diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y*

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Ejercicio 1.20. *Prueba que, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω y $\Omega_0 \subset \Omega$, entonces $u|_{\Omega_0}$ es débilmente diferenciable en Ω_0 y*

$$D_i(u|_{\Omega_0}) = (D_i u)|_{\Omega_0}.$$

Consulta, por ejemplo, [3,4,6,9], para una discusión más detallada sobre las derivadas débiles y sobre los espacios de Sobolev, que definimos a continuación.

Definición 1.21. *El **espacio de Sobolev** $H^1(\Omega)$ se define como sigue:*

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable y} \\ D_i(u) \in L^2(\Omega) \text{ para cada } i = 1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

Si $u, v \in H^1(\Omega)$, definimos el producto escalar en $H^1(\Omega)$ como

$$\langle u, v \rangle_1 := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^N \int_\Omega (D_i u)(D_i v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \tag{1.8}$$

donde ∇u es el gradiente débil de u. La norma inducida es

$$\|u\|_1 := \left(\int_\Omega u^2 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega (D_i u)^2 \right)^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Dado que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, el Ejercicio 1.16 asegura que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ y el producto escalar (1.8) coincide con el definido en (1.5). Más aún, $H^1(\Omega)$ es completo.

Teorema 1.22. *$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Consulta [4, Teorema 16.14]. □

La función u del Ejercicio 1.17 pertenece a $H^1(-1,1)$. Ello muestra que las funciones de $H^1(\Omega)$ no necesariamente se anulan sobre $\partial\Omega$, de modo que este espacio no es el adecuado para tratar el problema (1.10). Conviene considerar el siguiente subespacio.

Definición 1.23. *El **espacio de Sobolev** $H_0^1(\Omega)$ se define como la cerradura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.*

$H_0^1(\Omega)$ resulta ser completo por ser un subespacio cerrado de un espacio completo. Es decir, $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

En el caso particular en el que $\Omega = \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N);$$

consulta [4, Teorema 16.18]. Pero, en general, $H_0^1(\Omega)$ no coincide con $H^1(\Omega)$.

Una propiedad importante de las funciones en $H_0^1(\Omega)$ es que su extensión trivial a $\mathbb{R}^N$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^N$. Más precisamente, se cumple lo siguiente.

Ejercicio 1.24. *Prueba que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, la función*

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega, \end{cases}$$

pertenece a $H^1(\mathbb{R}^N)$ y se cumple que $D_i(\overline{u}) = \overline{D_i u}$ para cada $i = 1, \ldots, N$.

Observación 1.25. *El ejercicio anterior nos permite considerar a $H_0^1(\Omega)$ como un subespacio de $H^1(\mathbb{R}^N)$. En adelante denotaremos a $\overline{u}$ simplemente por u.*

Ejercicio 1.26. *Prueba que la función u del* Ejercicio 1.17 *no pertenece a $H_0^1(-1, 1)$.*

Ejercicio 1.27. *Prueba que, si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entonces $u\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y*

$$D_i(u\varphi) = (D_i u)\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Intuitivamente podríamos pensar a $H_0^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan sobre la frontera de Ω. Esta afirmación carece de sentido ya que los elementos de $H^1(\Omega)$ son clases de equivalencia de funciones que coinciden c.d. en Ω, y $\partial\Omega$ tiene medida 0. Sin embargo, esta afirmación hace sentido para funciones en $H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y resulta cierta si Ω es suficientemente suave.

Denotemos por

$$B_r^m(x) := \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$$

a la bola de radio r y centro x en $\mathbb{R}^m$.

Definición 1.28. *Un dominio Ω es **de clase** $\mathcal{C}^k$ si, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe una vecindad abierta U de x_0 en $\mathbb{R}^N$ y un difeomorfismo*

$$\vartheta : B_1^{N-1}(0) \times (-1, 1) \to U$$

de clase $\mathcal{C}^k$ tal que $\vartheta(0,0) = x_0$,

$$\vartheta(B_1^{N-1}(0) \times (0,1)) = U \cap \Omega, \qquad y \qquad \vartheta(B_1^{N-1}(0) \times \{0\}) = U \cap \partial\Omega.$$

*Se dice que Ω es **suave** si es de clase $\mathcal{C}^\infty$.*

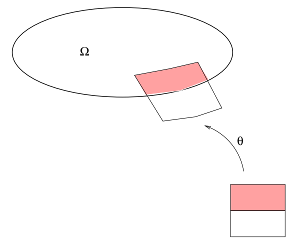

Figura 1.1: Dominio suave

Teorema 1.29. *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, entonces $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

Demostración. Consulta [4, Teorema 16.25]. □

Concluimos la sección con dos afirmaciones que usaremos más adelante y que te proponemos como ejercicio.

Ejercicio 1.30. *Prueba que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $|u| \in H_0^1(\Omega)$ y*

$$(D_i|u|)(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{si } u(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) = 0, \\ -D_i u(x) & \text{si } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

(Sugerencia: Considera las funciones $\zeta_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ y prueba que $\zeta_\varepsilon \circ u \in H_0^1(\Omega)$. Aplica el teorema de convergencia dominada de Lebesgue).

Dada $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definimos

$$u^+ := \text{máx}\{u, 0\}, \qquad u^- := \text{mín}\{u, 0\}.$$

Ejercicio 1.31. *Prueba que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$ y sus derivadas débiles son*

$$(D_i u^+)(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{si } u(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) \leq 0, \end{cases}$$

$$(D_i u^-)(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{si } u(x) \leq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) \geq 0, \end{cases}$$

(Sugerencia: Observa que $u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|)$ y $u^- = \frac{1}{2}(u - |u|)$.)

1.2. Un problema elíptico lineal con condición de frontera

Dada $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, queremos averiguar si existe una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

La condición $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ recibe el nombre de **condición de Dirichlet homogénea.**

1.2.1. Existencia y unicidad de la solución débil

Definición 1.32. *Una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que satisface (1.10) se llama una **solución clásica** de (1.10).*

Observa que, si existe una solución clásica de (1.10), entonces forzosamente $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Ahora bien, si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisface la ecuación $-\Delta u + u = f$, entonces, multiplicando esta ecuación por $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos que

$$-\int_\Omega (\Delta u)\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Aplicando la fórmula de Green (Proposición 1.1) a la primera integral concluimos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{1.11}$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.33. *Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \tag{1.12}$$

*se llama una **solución débil de** (1.10).*

Empezaremos por investigar si existe una solución débil.

Observa que el lado izquierdo de la identidad (1.12) es el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_1 := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv$$

en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. La existencia de una solución débil es consecuencia del teorema de representación de Fréchet-Riesz (Teorema 1.10).

Teorema 1.34 (Existencia y unicidad de la solución débil)**.** *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (1.10). Más aún, u es el único mínimo de la función $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$J(v) := \frac{1}{2}\|v\|_1^2 - \int_\Omega fv.$$

*A esta última afirmación se le conoce como el **principio de Dirichlet**.*

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Consideremos la función $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Tv := \int_\Omega fv.$$

Esta función es claramente lineal. Observa que $|v|_2 \leq \|v\|_1$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Por tanto, usando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$|Tv| \leq |f|_2 \, |v|_2 \leq |f|_2 \, \|v\|_1 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

lo que implica que T es continua en $H_0^1(\Omega)$. De modo que, por el teorema de representación de Fréchet-Riesz, existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v\rangle_1 = Tv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esto prueba que, u es una solución débil de (1.10).

De la Proposición 1.11 se sigue que u es el único mínimo de J. □

1.2.2. La solución débil es solución clásica

Veremos ahora que, si los datos del problema son suficientemente regulares, la solución débil es clásica.

Proposición 1.35. *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (1.10) satisface $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de (1.10).*

Demostración. Si $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es la solución débil de (1.10), aplicando la fórmula de Green (Proposición 1.1) obtenemos que

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi - \int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

En consecuencia, $-\Delta u + u - f = 0$ c.d. en Ω. Como $-\Delta u + u - f$ es continua, concluimos que

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega.$$

Por otra parte, el Teorema 1.29 asegura que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Esto prueba que u es una solución clásica de (1.10). □

Así pues, si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, basta comprobar que la solución débil pertenece a $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ para poder afirmar la existencia de una solución clásica del problema (1.10). Esto no es un asunto sencillo, ya que no conocemos a la solución débil; sólo sabemos que existe. Afortunadamente existen criterios que aseguran la regularidad de la solución débil en base a la regularidad de los datos del problema. El criterio más sencillo de formular es el siguiente.

Teorema 1.36 (de regularidad)**.** *Si Ω es acotado y de clase $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, y $u \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil del problema (1.10), entonces $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Consulta, por ejemplo, [6]. □

Como consecuencia inmediata de este teorema y de la Proposición 1.35 obtenemos la existencia de una única solución clásica.

Teorema 1.37 (Existencia de la solución clásica)**.** *Si Ω es acotado y de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, entonces el problema (1.10) tiene una única solución clásica $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Hay teoremas de regularidad mucho más finos, que permiten obtener la existencia de la solución clásica bajo hipótesis más débiles. Una referencia muy completa para este tipo de resultados es el libro de Gilbarg y Trudinger [7]. Aquí no nos ocuparemos de ellos. Nos concentraremos únicamente en demostrar la existencia de soluciones débiles.

Capítulo 2

Un problema elíptico no lineal

El objetivo de este capítulo es estudiar la existencia de soluciones del problema no lineal

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $p \in (2, 2^*)$, donde $2^* := \frac{2N}{N-2}$.

2.1. Los prerrequisitos

Empezaremos introduciendo los conceptos y resultados que usaremos para abordar este problema.

2.1.1. Encajes de Sobolev

Denotemos por

$$|\nabla u|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

La siguiente desigualdad juega un papel muy importante en el estudio de problemas no lineales.

Proposición 2.1 (Desigualdad de Sobolev)**.** *Sean $N \geq 3$ y $2^* := \frac{2N}{N-2}$. Existe una constante $C_N > 0$, que depende sólo de N, tal que*

$$|\varphi|_{2^*} \leq C_N |\nabla \varphi|_2 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.1}$$

Demostración. Consulta por ejemplo [4, Proposición 17.1]. □

El número 2^* se llama el **exponente crítico de Sobolev** y es el único número para el que se cumple la desigualdad (2.1). Puedes comprobar esta afirmación siguiendo la sugerencia del siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.2. *Sea* $p \in [1, \infty)$. *Prueba que, si existe* $C > 0$ *tal que*

$$|\varphi|_p \leq C|\nabla\varphi|_2 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

entonces $p = 2^*$. (Sugerencia: Fija $0 \neq \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para $\lambda > 0$, aplica la desigualdad anterior a las funciones $\varphi_\lambda(x) := \varphi(\lambda x)$.)

Una consecuencia importante de la desigualdad de Sobolev (2.1) es la afirmación siguiente. En su demostración interviene la desigualdad de interpolación (1.4).

Teorema 2.3 (Encajes de Sobolev)**.** *Para cualquier subconjunto abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *se tiene que* $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *para todo* $p \in [2, 2^*]$ *y esta inclusión es continua.*

Demostración. Consulta [4, Teorema 17.6]. □

Cuando Ω es un dominio acotado, se tiene la siguiente afirmación.

Teorema 2.4 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Si* Ω *es acotado y* $p \in [1, 2^*]$, *existe una constante* $C_{\Omega,p} > 0$, *que depende de* Ω *y de* p, *tal que*

$$|u|_p \leq C_{\Omega,p}|\nabla u|_2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *y esta inclusión es continua.*

Demostración. Esta desigualdad es consecuencia inmediata de las desigualdades de Sobolev (2.1) y de Hölder (1.2). Consulta [4, Teorema 17.8]. □

La desigualdad de Poincaré para $p = 2$ asegura que, si Ω es un dominio acotado, entonces

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} > 0. \tag{2.2}$$

$\lambda_1(\Omega)$ se llama el **primer valor propio de Dirichlet de** $-\Delta$ **en** Ω. En la Sección 17.3 de [4] puedes encontrar la razón para llamarlo así.

Ejercicio 2.5. *Si* Ω *es un dominio acotado y* $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ *denotamos por*

$$\langle u, v\rangle_\lambda := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv, \qquad\qquad \langle u, v\rangle := \langle u, v\rangle_0,$$

$$\|u\|_\lambda := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2\right)^{1/2}, \qquad\qquad \|u\| := \|u\|_0.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones.

(*a*) $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ *es un producto escalar en* $H_0^1(\Omega)$.

(*b*) *La norma* $\|\cdot\|_\lambda$ *es equivalente a la norma* $\|\cdot\|_1$, *es decir, existen* $C_1, C_2 > 0$ *tales que*

$$C_1\|u\|_1 \leq \|u\|_\lambda \leq C_2\|u\|_1 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ *es completo con cualquiera de estas normas.*

El siguiente resultado juega un papel fundamental en el estudio del problema que planteamos al inicio de este capítulo.

Teorema 2.6 (Rellich-Kondrashov). *Si Ω es un dominio acotado y $p \in [1, 2^*)$, entonces la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es un operador compacto, es decir, toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Consulta, por ejemplo, [4, Teorema 17.12]. □

2.1.2. Diferenciabilidad en espacios de Banach

La noción de derivada de una función entre espacios euclidianos se extiende a espacios de Banach casi literalmente, con la siguiente precaución: mientras que cualquier función lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ resulta automáticamente continua, una función lineal entre espacios de Banach de dimensión infinita no es necesariamente continua. Es importante agregar esta propiedad a la definición de derivada.

Sean V y W espacios de Banach, con normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ respectivamente. El espacio

$$\mathcal{B}(V, W) := \{T : V \to W : T \text{ es lineal y continua}\}$$

con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \tag{2.3}$$

resulta ser un espacio de Banach; ver [4, Proposición 9.3]. Si $W = \mathbb{R}$, este espacio se denota

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{R}).$$

Definición 2.7. *Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de V. Una función $F : \mathcal{O} \to W$ es **diferenciable en el punto** $u_0 \in \mathcal{O}$ si existe $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(u_0 + v) - F(u_0) - Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0. \tag{2.4}$$

*T se llama **la derivada de** F **en** u_0 y se denota*

$$F'(u_0) := T.$$

*F es **diferenciable en** $\mathcal{O}$ si lo es en cada punto $u \in \mathcal{O}$. La función*

$$F' : \mathcal{O} \to \mathcal{B}(V, W), \qquad u \mapsto F'(u),$$

*se llama la **derivada (de Fréchet) de** F **en** $\mathcal{O}$. Si la función F' es continua, decimos que F **es de clase** $\mathcal{C}^1$ **en** $\mathcal{O}$.*

Definición 2.8. *F es **de clase** $\mathcal{C}^2$ **en** $\mathcal{O}$ si $F' : \mathcal{O} \to \mathcal{B}(V, W)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{O}$. La derivada de F' se llama la segunda derivada de F y se denota por F''.*

*Inductivamente, F es **de clase** $\mathcal{C}^k$ **en** $\mathcal{O}$ si es de clase $\mathcal{C}^{k-1}$ y su $(k-1)$-ésima derivada es de clase $\mathcal{C}^1$. La k-ésima derivada de F se denota por $F^{(k)}$.*

*F es **de clase** $\mathcal{C}^\infty$ **en** $\mathcal{O}$ si es de clase $\mathcal{C}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Una discusión detallada de estos conceptos se encuentra en [4, Capítulo 9].

Ejercicio 2.9. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si $F : \mathcal{O} \to W$ es constante, entonces F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{O}$ y $F^{(k)}(u)$ es constante igual a 0 para cualquier $u \in \mathcal{O}$ y $k \geq 1$.*

(b) *Toda función $T \in \mathcal{B}(V, W)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en V. $T'(u) = T : V \to W$ para cualquier $u \in V$ y $T^{(k)}(u)$ es constante igual a 0 si $k \geq 2$.*

Si $\mathcal{O}$ es un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert H y $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, la derivada $F'(u) : H \to \mathbb{R}$ en cada punto $u \in \mathcal{O}$ es, por definición, una función lineal y continua. Así que el teorema de representación de Fréchet-Riesz afirma la existencia de un único elemento $\nabla F(u) \in H$ tal que

$$\langle \nabla F(u), v \rangle = F'(u)v \qquad \text{para todo } v \in H.$$

$\nabla F(u)$ se llama el **gradiente de F en** u.

Ejercicio 2.10. *Sea $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Prueba que F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{O}$ si y sólo si la función*

$$\nabla F : \mathcal{O} \to H, \qquad u \mapsto \nabla F(u),$$

es continua.

Ejercicio 2.11. *Sea H un espacio de Hilbert.*

(a) *Prueba que la función $F : H \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en H y que

$$F'(u)v = \langle u, v \rangle, \qquad \forall v \in H.$$

(b) *Calcula sus derivadas de orden $k \geq 2$.*

(c) *¿Quién es $\nabla F(u)$?*

Proposición 2.12. *La función $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p,$$

con $p \in (2, \infty)$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y sus derivadas están dadas por

$$F'(u)v = \int_\Omega |u|^{p-2}uv, \qquad F''(u)[v, w] = (p-1) \int_\Omega |u|^{p-2}vw,$$

para cualesquiera $u, v, w \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Consulta, por ejemplo, [13, Proposition 1.12]. □

2.1.3. Variedades de Hilbert

Sean $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert H y $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado $c \in \mathbb{R}$ denotamos por

$$F^{-1}(c) := \{u \in \mathcal{O} : F(u) = c\}.$$

Definición 2.13. *$a \in \mathbb{R}$ es un **valor regular de** F si $\nabla F(u) \neq 0$ para todo $u \in F^{-1}(a)$. $a \in \mathbb{R}$ es un **valor crítico de** F si no es un valor regular de F.*

Definición 2.14. *Un subconjunto no vacío $\mathcal{M}$ de H es una **subvariedad de clase $\mathcal{C}^k$ de** H (de codimensión 1) si existen una función $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$ definida en un subconjunto abierto $\mathcal{O}$ de H, y un valor regular a de F tales que*

$$\mathcal{M} = F^{-1}(a).$$

*Si además $\mathcal{M}$ es un subconjunto cerrado de H se dice que $\mathcal{M}$ es una **subvariedad de Hilbert de** H.*

Si $u \in \mathcal{M}$, el subespacio

$$T_u\mathcal{M} := \{v \in H : \langle \nabla F(u), v\rangle = 0\} = \ker F'(u)$$

*de H se llama el **espacio tangente a** $\mathcal{M}$ **en** u.*

Observa que, por ser cerrada en H, una variedad de Hilbert $\mathcal{M}$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 2.15. *Prueba que la esfera unitaria*

$$S_H := \{u \in H : \|u\| = 1\}$$

es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ de H y que

$$T_uS_H = \{v \in H : \langle u, v\rangle = 0\}.$$

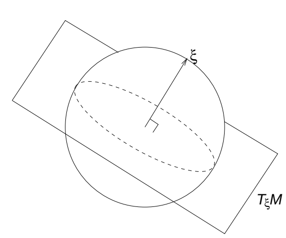

Figura 2.1: Espacio tangente a la esfera

Proposición 2.16. *El espacio tangente a $\mathcal{M}$ en u es el conjunto*

$$T_u\mathcal{M} = \{\sigma'(0) : \sigma \in \Gamma_u(\mathcal{M})\},$$

donde $\Gamma_u(\mathcal{M})$ es el conjunto de todas las trayectorias $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ de clase $\mathcal{C}^1$ tales que $\sigma(0) = u$ y $\sigma(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

En consecuencia, $T_u\mathcal{M}$ no depende de F.

Demostración. Este resultado es consecuencia del teorema de la función implícita. Consulta [4, Proposición 10.9]. □

Los mínimos y los máximos de una función en una variedad tienen la siguiente propiedad.

Proposición 2.17. *Si $J : H \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{M}$ es una subvariedad de H de clase $\mathcal{C}^1$ y u es un mínimo (o un máximo) de J en $\mathcal{M}$, entonces*

$$\langle \nabla J(u), v\rangle = 0 \qquad \forall v \in T_u\mathcal{M}.$$

Demostración. Sean $v \in T_u\mathcal{M}$ y $\sigma \in \Gamma_u(\mathcal{M})$ tales que $\sigma'(0) = v$. Si u es un mínimo de J en M, entonces 0 es un mínimo de $J \circ \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Por tanto,

$$0 = (J \circ \sigma)'(0) = J'(\sigma(0))(\sigma'(0)) = J'(u)v = \langle \nabla J(u), v\rangle,$$

como afirma el enunciado. □

Definición 2.18. *Sean $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{M}$ una subvariedad de H de clase $\mathcal{C}^1$. Un punto $u \in \mathcal{M}$ es un* ***punto crítico de la restricción $J|_{\mathcal{M}}$ de J a $\mathcal{M}$*** *si*

$$\langle \nabla J(u), v\rangle = 0 \qquad \forall v \in T_u\mathcal{M}. \tag{2.5}$$

Si $\mathcal{M} = H$ se dice simplemente que u es un ***punto crítico de*** *J y la condición (2.5) es equivalente a que $\nabla J(u) = 0$.*

$c \in \mathbb{R}$ es un ***valor crítico de*** *$J|_{\mathcal{M}}$ si $c = J(u)$ para algún punto crítico $u \in \mathcal{M}$ de $J|_{\mathcal{M}}$. Si no es así, se dice que c es un* ***valor regular de*** *$J|_{\mathcal{M}}$.*

La Proposición 2.17 afirma que los máximos y mínimos de J en $\mathcal{M}$ son puntos críticos de $J|_{\mathcal{M}}$.

Ejercicio 2.19 (Multiplicador de Lagrange)**.** *Prueba que u es un punto crítico de J en $\mathcal{M}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla J(u) = \lambda \nabla F(u),$$

donde F es como en la Definición 2.14.

2.1.4. Convergencia débil

A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^N$, en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita existen sucesiones acotadas que no contienen ninguna subsucesión convergente (ver Ejercicio 2.23). Por ello, conviene considerar la siguiente noción.

Definición 2.20. *Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión (u_k) en H* ***converge débilmente a*** *u* ***en*** *H si, para cada $v \in H$, se cumple que*

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

u se llama el ***límite débil*** *de la sucesión (u_k).*

Notación 2.21. *Escribiremos*

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \textbf{\textit{débilmente en}}\ H$$

para referirnos a la convergencia débil. Para evitar confusiones, escribiremos

$$u_k \to u \qquad \textbf{\textit{fuertemente en}}\ H,$$

si (u_k) converge a u en H en el sentido usual.

Ejercicio 2.22. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si existe el límite débil de una sucesión, entonces es único.*

(b) *Si $u_k \to u$ fuertemente en H, entonces $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H.*

Los conceptos de convergencia fuerte y convergencia débil coinciden sólo cuando H es de dimensión finita.

Ejercicio 2.23. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si $\dim H < \infty$, entonces $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H si y sólo si $u_k \to u$ fuertemente en H.*

(b) *Sea $\mathcal{O} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de H, es decir, $\|e_k\| = 1$ y $\langle e_k, e_j\rangle = 0$ si $k \neq j$. Entonces, $e_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H, pero (e_k) no converge fuertemente en H.*

En consecuencia, si $\dim H = \infty$, la esfera unitaria en $S_H := \{u \in H : \|u\| = 1\}$ no es compacta; cf. [4, Teorema 7.4].

Ejercicio 2.24. *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

(a) *$u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H si y sólo si $Tu_k \to Tu$ en $\mathbb{R}$ para cualquier función lineal y continua $T : H \to \mathbb{R}$.* (Sugerencia: Usa el teorema de representación de Fréchet-Riesz.)

(b) *Si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert, $T : H_1 \to H_2$ es lineal y continua, y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1 entonces $Tu_k \rightharpoonup Tu$ débilmente en H_2.*

(*c*) *La afirmación* (*b*) *no es cierta si* T *es sólo continua pero no es lineal.*

A continuación enunciamos las propiedades fundamentales de la convergencia débil.

Proposición 2.25. (*a*) *Si* (u_k) *converge débilmente a* u *en* H*, entonces*

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|.$$

(*b*) *Si* (u_k) *converge débilmente a* u *en* H *y*

$$\|u\| = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|,$$

entonces (u_k) *converge fuertemente a* u *en* H*.*

Demostración. Consulta, por ejemplo, [4, Proposición 15.27]. □

Proposición 2.26. *Si* $u_k \rightharpoonup u$ *débilmente en* H*, entonces* (u_k) *está acotada en* H*.*

Demostración. Consulta, por ejemplo, [4, Proposición 15.31]. □

Teorema 2.27 (Propiedad fundamental de la convergencia débil)**.** *Toda sucesión acotada en* H *contiene una subsucesión débilmente convergente en* H*.*

Demostración. Consulta, por ejemplo, [4, Teorema 15.29]. □

2.2. Un problema de elíptico semilineal con condición de frontera

En toda esta sección supondremos que Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ y $p \in (2, 2^*]$, donde $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω, definido en (2.2), y $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Nuestro objetivo es probar que, si $p < 2^*$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ \ \ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

tiene (al menos) una solución positiva.

2.2.1. Formulación variacional del problema

Siguiendo el razonamiento que empleamos en la Subsección 1.2.1, obtenemos la noción de solución débil para este problema.

Definición 2.28. *Una* ***solución*** *(débil)* ***del problema*** (2.6) *es una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega |u|^{p-2}uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Inspirados en el principio de Dirichlet, consideramos el funcional

$$J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ = \ \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Recuerda que $\|\cdot\|_\lambda$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ (Ejercicio 2.5). El Teorema 2.3 garantiza que el funcional J está bien definido para cualquier $p \in [1, 2^*]$. A J se le suele llamar el **funcional de energía** asociado al problema (2.6).

Proposición 2.29. *J es de clase $\mathcal{C}^2$ y*

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \int_\Omega |u|^{p-2}uv \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

En consecuencia, u es solución del problema (2.6) *si y sólo si u es punto crítico de J.*

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata del Ejercicio 2.11 y la Proposición 2.12. □

2.2.2. La gráfica del funcional de energía

Para estudiar los puntos críticos de J conviene analizar su gráfica. Para ello, fijemos una dirección $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, y veamos cómo es la gráfica de J sobre la recta generada por u. Es decir, consideremos la función $J_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$J_u(t) := J(tu) = \left(\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2\right)t^2 - \left(\frac{1}{p}|u|_p^p\right)|t|^p. \tag{2.9}$$

Como estamos suponiendo que $p > 2$, la gráfica de esta función tiene la forma indicada en la Figura 2.2.2.

Observa que J no está acotada inferiormente y tiene un mínimo local en 0. Obviamente 0 es una solución de (2.6). Nos interesa saber si este problema tiene una solución no trivial.

Denotemos por t_u al único máximo de J_u en $(0, \infty)$. Los puntos críticos no triviales de J están contenidos en el conjunto

$$\{t_u u : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_\lambda = 1\},$$

que estudiaremos a continuación.

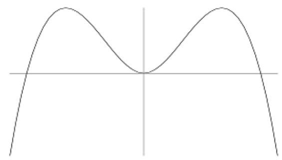

Figura 2.2: Gráfica de J_u

2.2.3. La variedad de Nehari

El conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{N} =& \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ J'(u)u = 0\}\\ =& \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ \|u\|_\lambda^2 = |u|_p^p\}\end{aligned}$$

obviamente contiene a todos los puntos críticos no triviales de J. Tiene las siguientes propiedades:

Proposición 2.30. (*a*) *Existe $d_0 > 0$ tal que $\|u\|_\lambda \geq d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. En consecuencia, $\mathcal{N}$ es un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.*

(*b*) *$\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de $H_0^1(\Omega)$. Se llama la* ***variedad de Nehari****.*

(*c*) *$\mathcal{N}$ es una* ***restricción natural para*** *J, es decir, $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de J si y sólo si u es un punto crítico de $J|_\mathcal{N}$.*

(*d*) $\inf_{u\in\mathcal{N}} J(u) > 0$.

(*e*) *Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \smallsetminus \{0\}$ existe un único $t_u \in (0,\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Más aún, t_u es el único punto en $(0,\infty)$ para el que cumple que*

$$\max_{t\geq 0} J(tu) = J(t_u u).$$

Demostración. (*a*) : Como las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\lambda$ son equivalentes (Ejercicio 2.5), de la desigualdad de Poincaré (Teorema 2.4), se sigue que existe $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C\|u|_\lambda \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Por tanto,

$$C^{-p} \leq \frac{\|u\|_\lambda^p}{|u_p^p} = \|u\|_\lambda^{p-2} \qquad \forall u \in \mathcal{N},$$

es decir,

$$0 < d_0 := C^{-p/(p-2)} \leq \|u\|_\lambda \qquad \forall u \in \mathcal{N}.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u|_\lambda \geq d_0 \ \text{ y } \ \|u\|_\lambda^2 - |u|_p^p = 0\}.$$

Éste es, claramente, un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.

(b) : $\mathcal{N} = \Psi^{-1}(0)$, donde $\Psi : H_0^1(\Omega) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\Psi(u) = \|u\|_\lambda^2 - |u|_p^p.$$

Esta función es de clase $\mathcal{C}^2$ y su derivada es

$$\Psi'(u)v = 2\langle u, v\rangle_\lambda - p\int_\Omega |u|^{p-2}uv \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Además, 0 es un valor regular de Ψ ya que

$$\langle \nabla\Psi(u), u\rangle = \Psi'(u)u = 2\|u\|_\lambda^2 - p|u|_p^p = (2-p)\|u\|_\lambda^2 \neq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{N}. \quad (2.10)$$

Esto prueba que $\mathcal{N}$ es una variedad de clase $\mathcal{C}^2$.

(c) : De la identidad (2.10) se sigue que $u \notin \ker\Psi'(u) =: T_u\mathcal{N}$. Por tanto, $H_0^1(\Omega)$ se escribe como la suma directa

$$H_0^1(\Omega) \cong T_u\mathcal{N} \oplus \{tu : t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de $J|_\mathcal{N}$, entonces, por definición,

$$J'(u)v = 0 \qquad \forall v \in T_u\mathcal{N}.$$

Además, de la definición de $\mathcal{N}$ se sigue que $J'(u)u = 0$. En consecuencia,

$$J'(u)v = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, u es un punto crítico de $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

(d) : Observa que, si $u \in \mathcal{N}$, entonces

$$J(u) = \frac{p-2}{2p}\|u\|_\lambda^2 = \frac{p-2}{2p}|u|_p^p \qquad \forall u \in \mathcal{N}. \quad (2.11)$$

De la afirmación (a) se sigue que $J(u) \geq \frac{p-2}{2p}d_0 > 0$.

(e) : Sea $u \in H_0^1(\Omega) \smallsetminus \{0\}$ y sea $J_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida en (2.9). Como ya vimos, esta función tiene un único punto crítico en $(0,\infty)$ y éste es un máximo. Para cada $t \in (0,\infty)$ se cumple que

$$J_u'(t) = J'(tu)u = 0 \iff J'(tu)tu = 0 \iff tu \in \mathcal{N}.$$

Es decir, $t \in (0,\infty)$ es un máximo de J_u si y sólo si $tu \in \mathcal{N}$. $\square$

2.2.4. Existencia de una solución de mínima energía

La proposición anterior sugiere investigar si J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{N}$ fuera compacta la respuesta sería claramente afirmativa, ya que toda función continua en un compacto alcanza sus valores extremos. Pero $\mathcal{N}$ no es compacta. De hecho, $\mathcal{N}$ es homeomorfa a la esfera unitaria en $H_0^1(\Omega)$ y la esfera unitaria en un espacio de Hilbert de dimensión infinita nunca es compacta (Ejercicio 2.23).

El teorema de Rellich-Kondrashov juega un papel fundamental en la demostración del siguiente resultado.

Proposición 2.31. *Si $p \in (2, 2^*)$, entonces J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$.*

Demostración. Sea $u_k \in \mathcal{N}$ tal que $J(u_k) \to c_0 := \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) > 0$. Como $u_k \in \mathcal{N}$, se tiene que

$$J(u_k) = \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\lambda^2 = \frac{p-2}{2p} |u_k|_p^p.$$

Así que la sucesión (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y, por el Teorema 2.27, contiene una subsucesión (a la que, por simplicidad, denotaremos del mismo modo) tal que

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega).$$

Más aún, como $p < 2^*$, aplicando el teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 2.6), podemos suponer que dicha subsucesión cumple que

$$u_k \to u \qquad \text{fuertemente en } L^p(\Omega).$$

Por tanto,

$$|u|_p^p = \lim_{k \to \infty} |u_k|_p^p = \frac{2p}{p-2} c_0 > 0$$

y, en consecuencia, $u \neq 0$.

La Proposición 2.30(e) asegura que existe $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$ y, puesto que $u_k \in \mathcal{N}$, asegura además que $J(t_u u_k) \leq J(u_k)$. Usando estos hechos y la Proposición 2.25 obtenemos

$$\begin{aligned} c_0 \leq J(t_u u) &= \frac{1}{2}\|t_u u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_p^p \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|t_u u_k\|_\lambda^2\right) - \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p}|t_u u_k|_p^p\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|t_u u_k\|_\lambda^2\right) - \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p}|t_u u_k|_p^p\right) = \lim_{k\to\infty} J(t_u u_k) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} J(u_k) = c_0. \end{aligned}$$

Como $u_k \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_\lambda^2 = \|u\|_\lambda^2.$$

Por tanto, $u_k \to u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ y, en consecuencia, $u \in \mathcal{N}$ y $J(u) = c_0$, es decir, J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$. □

2.2.5. Existencia de una solución positiva

El siguiente resultado asegura que los mínimos de J sobre $\mathcal{N}$ no cambian de signo.

Proposición 2.32 (Benci-Cerami [2])**.** *Si $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de J tal que*

$$J(u) < 2 \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v)$$

entonces, o bien $u \geq 0$, o bien $u \leq 0$ c.d. en Ω.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{N}$ un punto crítico de J. Tomando $v = u^+ := \max\{u, 0\}$ en la identidad (2.8) y usando el Ejercicio 1.31 concluimos que

$$0 = J'(u)u^+ = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u^+) + \lambda \int_\Omega u(u^+) - \int_\Omega |u^{p-2}u(u^+) = \|u^+\|_\lambda^2 - |u^+|_p^p.$$

Análogamente, tomando $v = u^- := \min\{u, 0\}$ obtenemos que $\|u^-\|_\lambda^2 = |u^-|_p^p$.

Ahora, argumentando por contradicción, supongamos que $u^+ \neq 0$ y $u^- \neq 0$. Entonces $u^+, u^- \in \mathcal{N}$ y, por consiguiente,

$$J(u^+) \geq \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v) \qquad \text{y} \qquad J(u^-) \geq \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v).$$

Esto implica que

$$J(u) = J(u^+) + J(u^-) \geq 2 \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v),$$

lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, o bien $u^+ = 0$, o bien $u^- = 0$. $\square$

Teorema 2.33 (Existencia)**.** *Si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ y $p \in (2, 2^*)$, el problema (2.6),*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \textit{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene al menos una solución no trivial $u \geq 0$.

Demostración. La Proposición 2.31 asegura que J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$ y la Proposición 2.30 asegura que dicho mínimo es un punto crítico no trivial de J, es decir, es una solución no trivial del problema (2.6).

La Proposición 2.32 asegura que dicha solución es, o bien ≥ 0, o bien ≤ 0. Observa que u es solución de (2.6) si y sólo sí $-u$ lo es. Esto demuestra que (2.6) tiene una solución no trivial ≥ 0. $\square$

Bibliografía

[1] Ambrosetti, Antonio; Malchiodi, Andrea: Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] Benci, Vieri; Cerami, Giovanna: The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. Arch. Rational Mech. Anal. 114 (1991), no. 1, 79–93.

[3] Brezis, Haim: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[4] Clapp, Mónica: Análisis Matemático. Segunda edición. Colección Papirhos, Serie Textos, Núm. 2, Instituto de Matemáticas de la UNAM, México, 2017.

[5] Costa, David G.: An invitation to variational methods in differential equations. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[6] Evans, Lawrence C.: Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[7] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S.: Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[8] Hildebrandt, Stefan; Tromba, Anthony: Mathematics and optimal form. Scientific American Library, New York, 1985.

[9] Jost, Jürgen: Postmodern analysis. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[10] Jost, Jürgen; Li-Jost, Xianqing: Calculus of variations. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 64. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[11] Struwe, Michael: Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 34. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[12] Weierstraß, Carl : Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. Mathematische Werke II, Mayer and Müller, Berlin 1895, 49-54.

[13] Willem, Michel Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.