

Matemáticas para transición energética

Dra. Tatiana González Grandón



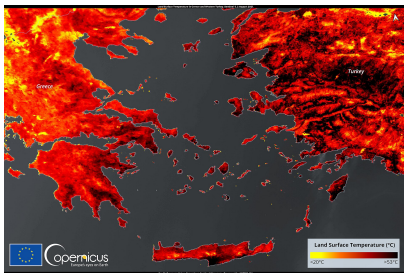
NTNU



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

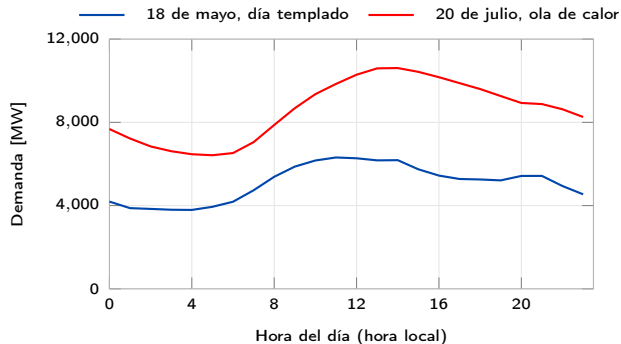
Ejemplo motivador: un día extremadamente caluroso en Grecia

- Ola de calor.
- La demanda eléctrica aumenta por el uso de aire acondicionado, sobre todo por la tarde.



Temperatura de la superficie terrestre en Grecia, 2 de agosto de 2021.

Unión Europea, imágenes Copernicus Sentinel-3; uso libre con atribución



Demanda eléctrica de Grecia, 2023.

Datos: Energy-Charts, Fraunhofer ISE (CC BY 4.0), a partir de ENTSO-E

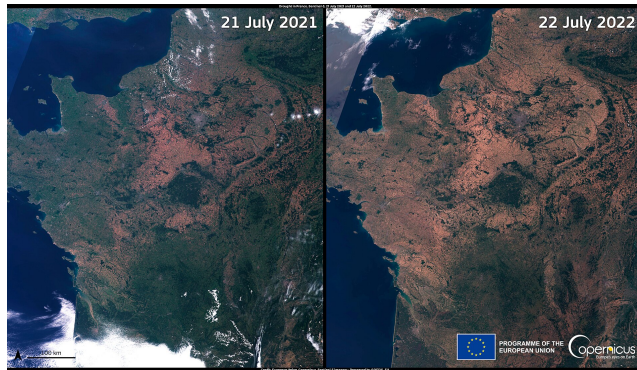
Francia: temperaturas elevadas en los ríos

- Las centrales nucleares se detienen porque no puede utilizarse el agua de enfriamiento.
- La capacidad de generación eléctrica disponible disminuye.



Central nuclear de Belleville-sur-Loire.

Foto: F. GOGLINS, CC BY-SA 3.0, Wikimedia



Francia el 21 de julio de 2021 (izquierda) y el 22 de julio de 2022 (derecha): tras una primavera excepcionalmente seca y calurosa, los niveles de los ríos y embalses quedaron muy bajos.

Unión Europea, imágenes Copernicus Sentinel-3; uso libre con atribución

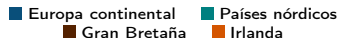
Noruega: cambios en la acumulación de nieve y en el deshielo

- Cambian las aportaciones de agua a los embalses.
- Cambia la flexibilidad que el país puede ofrecer al sistema europeo.



Strandavatnet, embalse de la central hidroeléctrica de Rud (Hol, Noruega).

Foto: E-CO, CC BY-SA 3.0, vía Wikimedia Commons



Mapa: Kimdime, dominio público, vía Wikimedia Commons

↓

↓

¿Cómo satisfacemos ahora la demanda eléctrica?

El problema fundamental del sistema eléctrico

La electricidad es una mercancía más. Sin embargo...

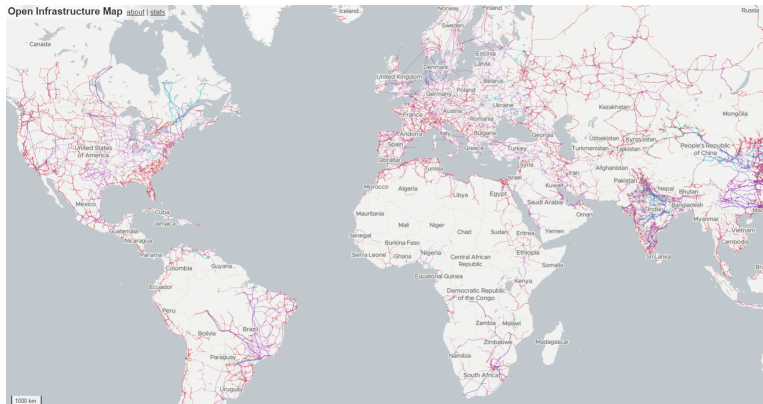
1. Grandes volúmenes de electricidad no pueden (todavía) almacenarse de forma económica.

Tehachapi, California.



[4]

2. La electricidad normalmente no se consume donde se produce, por lo que debe transportarse **a través de las redes de transmisión y distribución.**



[5]

La electricidad es una mercancía más. Sin embargo...

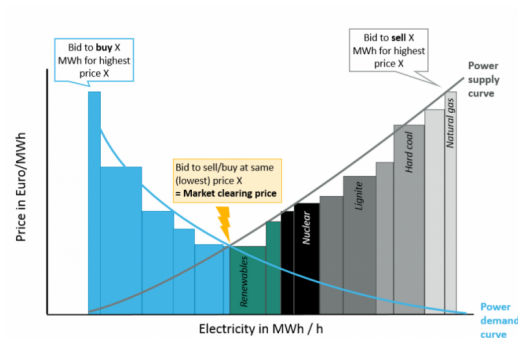
3. Los flujos de potencia no pueden dirigirse de un generador hacia un cliente específico.

Las líneas de transmisión y las subestaciones transformadoras:

- Son asociadas con pérdidas de potencia
- Tienen límites de capacidad

La electricidad es una mercancía más. Sin embargo...

4. La demanda y la oferta deben estar equilibradas en todo momento. De lo contrario, existe riesgo de apagones.



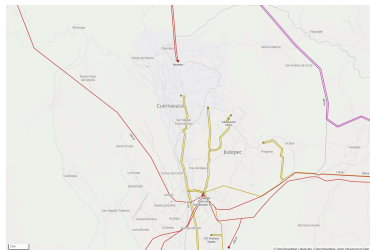
Resumen de la Parte I:

¿Por qué los mercados eléctricos difieren sustancialmente de otros mercados de mercancías?

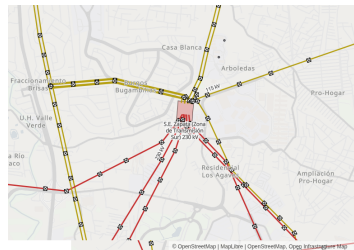
- 1 Grandes volúmenes de electricidad no pueden (todavía) almacenarse de forma económica.
- 2 Los flujos de potencia no pueden dirigirse de un generador hacia un cliente específico.
- 3 La demanda y la oferta deben estar equilibradas en todo momento.

Terminología: Redes de transmisión en Cuernavaca, Morelos

- *Representamos la red de transmisión como una red compuesta por:*
- **Nodos:** representan generadores y consumidores individuales.
- **Enlaces:** representan líneas de transmisión.



Vista general: Cuernavaca y Jiutepec



Detalle: S.E. Zapata, donde convergen líneas de 230 y 115 kV



[7]

Operación Eficiente a Corto Plazo de los Mercados Eléctricos

Mercados eficientes a corto plazo

Supongamos que ya se realizaron las inversiones en generadores y en activos de consumo (fábricas, máquinas, etc.).

Supongamos que todos los actores son tomadores de precios (es decir, nadie puede ejercer poder de mercado) y que tenemos competencia perfecta.

¿Cómo asignamos la producción y el consumo de la manera más eficiente?

Es decir, nos interesa la eficiencia “estática” a corto plazo.

Los Mercados Eléctricos desde la Perspectiva del Consumidor

Comportamiento del consumidor: Teoría

Supongamos que, durante un periodo dado, un consumidor consume electricidad a una tasa de Q MW.

Su **función de utilidad o función de valor** $U(Q)$ en €/h es una medida de su beneficio para una tasa de consumo Q dada.

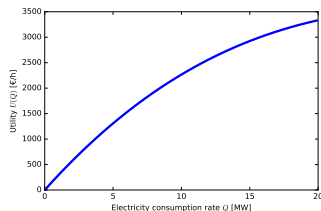
Para una empresa, este podría ser el beneficio relacionado con este consumo de electricidad derivado de la fabricación de bienes.

Por lo general, el consumidor tiene una utilidad mayor para un Q mayor, es decir, la primera derivada es positiva $U'(Q) > 0$. Por hipótesis, la tasa de incremento del valor con el consumo disminuye cuanto mayor es la tasa de consumo, es decir, $U''(Q) < 0$.

Utilidad: Ejemplo

Un fabricante de artículos tiene una función de utilidad que depende de la tasa de consumo de electricidad Q [€/h] según

$$U(Q) = 0.0667 Q^3 - 8 Q^2 + 300 Q$$



Obsérvese que la pendiente siempre es positiva, pero se vuelve menos positiva conforme Q aumenta.

[8]

Comportamiento óptimo del consumidor

Suponemos, para empezar, que el consumidor es tomador de precios, es decir, no puede influir en el precio cambiando la cantidad que consume.

Supongamos que el precio de mercado es λ €/MWh. El consumidor debe ajustar su tasa de consumo Q para maximizar su **excedente neto**

$$\max_Q [U(Q) - \lambda Q]$$

Este problema de optimización se resuelve en $Q = Q^*$, donde

$$U'(Q^*) \equiv \frac{dU}{dQ}(Q^*) = \lambda$$

[Comprobación de unidades: $\frac{dU}{dQ}$ tiene unidades $\frac{\text{€/h}}{\text{MW}} = \text{€/MWh}.$]

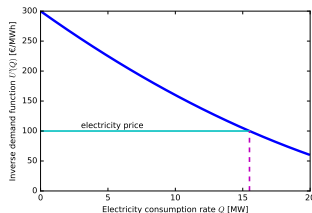
Es decir, el consumidor aumenta su consumo hasta que cualquier incremento adicional del consumo le genere una pérdida neta.

$U'(Q)$ se conoce como la **curva de demanda inversa** o **curva de utilidad marginal**, la cual indica, para cada tasa de consumo Q , qué precio λ estaría dispuesto a pagar el consumidor.

Función de demanda inversa: Ejemplo

Para nuestro ejemplo, la función de demanda inversa está dada por

$$U'(Q) = 0.2 Q^2 - 16 Q + 300$$



Se le llama función de demanda *inversa* porque la función de demanda es la que se obtiene al intercambiar los ejes.

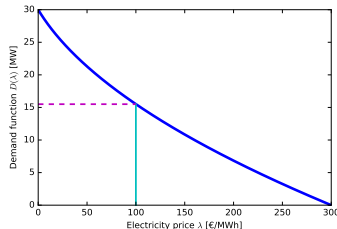
[8]

Función de demanda inversa: Ejemplo

La **función de demanda** $D(\lambda)$ da la demanda Q en función del precio λ . $D(U'(Q)) = Q$.

Para nuestro ejemplo, la función de demanda está dada por

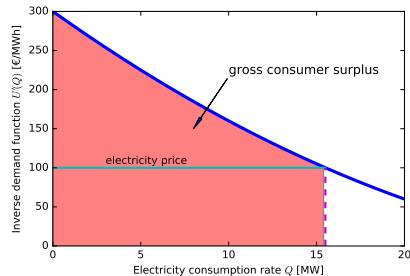
$$D(\lambda) = -((\lambda + 20)/0.2)^{0.5} + 40$$



[8]

Excedente bruto del consumidor

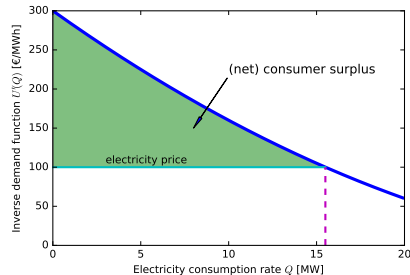
El área bajo la curva de demanda inversa es el **excedente bruto del consumidor**, que, al ser la integral de una derivada, no es más que la función de utilidad $U(Q)$ de nuevo, salvo una constante.



[8]

Excedente neto del consumidor

El **excedente neto del consumidor** (más relevante que el bruto), o simplemente **excedente del consumidor**, es la ganancia neta que obtiene el consumidor por tener una utilidad marginal superior al precio de la electricidad.



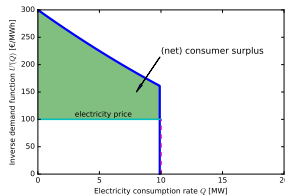
[8]

Límites al consumo

Obsérvese que es bastante común que el consumo esté limitado por otros factores antes de que el precio de la electricidad resulte demasiado alto, por ejemplo, por el tamaño de la maquinaria eléctrica. Esto da una cota superior

$$Q \leq Q^{\max}$$

En el siguiente caso, el consumo óptimo se ubica en $Q^* = Q^{\max} = 10$ MW. Tenemos una restricción **activa** y podemos definir un **precio sombra** μ , que indica el beneficio de relajar la restricción $\mu^* = U'(Q^*) - \lambda$.

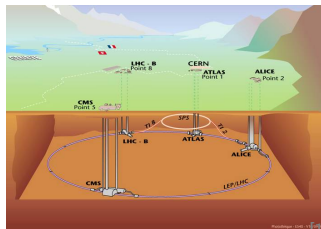


Los consumidores pueden retrasar su consumo

Además de cambiar la cantidad de electricidad que consumen, los consumidores también pueden desplazar su consumo en el tiempo.

Por ejemplo, los acumuladores eléctricos de calor usan electricidad barata por la noche para generar calor y luego almacenarlo para el día.

El acelerador de partículas LHC no opera en invierno, cuando los precios son más altos (véase <http://home.cern/about/engineering/powering-cern>). Su demanda en verano es de 200 MW, equivalente a un tercio de Ginebra e igual a la demanda máxima de Ruanda (!); en invierno, solo 80 MW.



[10]

Los consumidores también pueden cambiar de ubicación

- La fundición de aluminio es un proceso intensivo en electricidad. Las fundidoras de aluminio suelen instalarse en lugares con suministro eléctrico barato y estable, como países con abundante energía hidroeléctrica. Por ejemplo, en 2010 el 73 % del consumo eléctrico total de Islandia provino de la fundición de aluminio.
- Producir aluminio cuesta alrededor de US\$ 1500/ tonelada.
- Consumo de electricidad: 15 MWh/tonelada.
- Al precio al consumidor en Alemania de €300 / MWh, esto equivale a €4500 / tonelada. ¡Uy, uy, uy!
- Si la electricidad representa el 50 % del coste, entonces se necesita destinar \$750/tonelada a electricidad $\Rightarrow 750/15 \text{ \$/MWh} = 50 \text{ \$/MWh}$.

Los Mercados Eléctricos desde la Perspectiva del Generador

Función de Coste del Generador

El comportamiento óptimo del generador sigue un esquema similar al del consumidor.

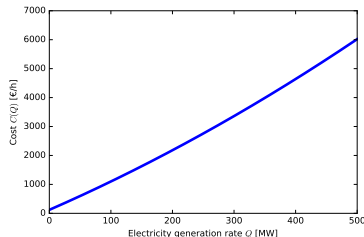
Un generador tiene una **función de coste o de oferta** $C(Q)$ en €/h, que da los costes (de combustible, etc.) para una tasa dada de generación de electricidad Q MW.

Por lo general, el generador tiene un coste mayor para una tasa de generación Q mayor, es decir, la primera derivada es positiva $C'(Q) > 0$. Para la mayoría de los generadores, la tasa a la que el coste aumenta con la tasa de producción crece a su vez conforme aumenta la tasa de producción, es decir, $C''(Q) > 0$.

Función de Coste: Ejemplo

Un generador de gas tiene una función de coste que depende de la tasa de generación de electricidad Q [€/h] según

$$C(Q) = 0.005 Q^2 + 9.3 Q + 120$$

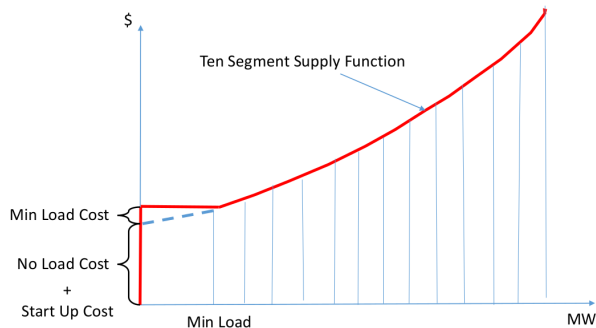


Obsérvese que la pendiente siempre es positiva y se vuelve más positiva conforme Q aumenta. La curva no parte del origen debido a los costes de arranque, los costes en vacío, etc.

Ejemplo Real: Mercado del Día en Adelanto (MDA) de California

Cada generador en California entrega al operador del mercado su curva de oferta en forma de una función lineal por tramos de diez segmentos:

Estructura Horaria de las Ofertas en el MDA



[11]

Comportamiento óptimo del generador

Suponemos, para empezar, que el generador es tomador de precios, es decir, no puede influir en el precio cambiando la cantidad que genera.

Supongamos que el precio de mercado es λ €/MWh. Para una tasa de generación Q , el ingreso es λQ y el generador debe ajustar su tasa de generación Q para maximizar su **excedente neto de generación**, es decir, su beneficio:

$$\max_Q [\lambda Q - C(Q)]$$

Este problema de optimización se resuelve en $Q = Q^*$, donde

$$C'(Q^*) \equiv \frac{dC}{dQ}(Q^*) = \lambda$$

[Comprobación de unidades: $\frac{dC}{dQ}$ tiene unidades $\frac{\text{€/h}}{\text{MW}} = \text{€/MWh}.$]

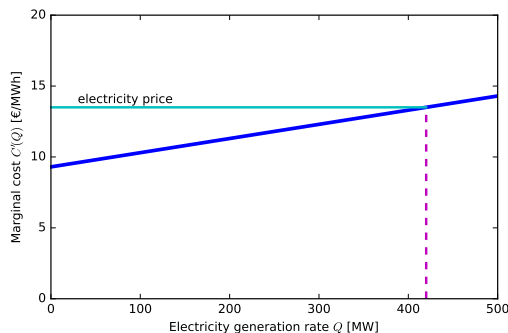
Es decir, el generador aumenta su producción hasta que cualquier incremento adicional de generación le genere una pérdida neta.

$C'(Q)$ se conoce como la **curva de coste marginal**, la cual indica, para cada tasa de generación Q , a qué precio λ estaría dispuesto a suministrar el generador.

Función de coste marginal: Ejemplo

Para nuestro ejemplo, la función marginal está dada por

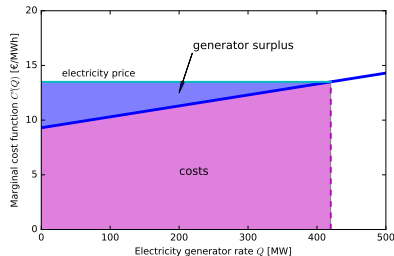
$$C'(Q) = 0.01 Q + 9.3$$



Excedente del generador

El área bajo la curva son los costes del generador, que, al ser la integral de una derivada, no es más que la función de coste $C(Q)$ de nuevo, salvo una constante.

El **excedente del generador** es el beneficio que obtiene el generador al tener un coste marginal por debajo del precio de la electricidad.



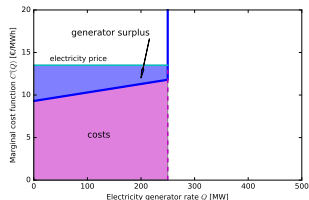
[8]

Límites a la generación

Obsérvese que es bastante común que los generadores estén limitados, por ejemplo, por su capacidad, la cual puede volverse **activa**, es decir, un factor limitante, antes de que el precio desempeñe algún papel, por ejemplo,

$$Q \leq Q^{\max}$$

En el siguiente caso, la generación óptima se ubica en $Q^* = Q^{\max} = 250$ MW. Tenemos una restricción **activa** y podemos definir un **precio sombra** μ , que indica el beneficio de relajar la restricción $\mu^* = \lambda - C'(Q^*)$.

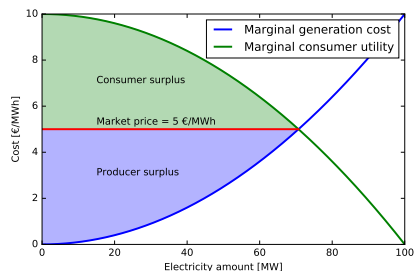


Generadores y consumidores en conjunto

Adelanto: Fijación de la cantidad y del precio

El bienestar total (el excedente del consumidor y el del generador) se maximiza si la cantidad total se fija donde se cruzan las curvas de coste marginal y de utilidad marginal.

Si el precio también se fija a partir de este punto, entonces las acciones óptimas individuales de cada actor lograrán este resultado en un mercado descentralizado perfecto.



[8]

Adelanto: El resultado de la optimización

Este es el resultado de maximizar el bienestar económico total, la suma del excedente del consumidor y del productor, para consumidores con consumo Q_i^B y generadores que generan a una tasa Q_i^S :

$$\max_{\{Q_i^B\}, \{Q_i^S\}} \left[\sum_i U_i(Q_i^B) - \sum_i C_i(Q_i^S) \right]$$

sujeto a que la oferta iguale a la demanda en la restricción de balance:

$$\sum_i Q_i^B - \sum_i Q_i^S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$$

y a cualquier otra restricción (por ejemplo, límites a la capacidad de los generadores, etc.).

El precio de mercado λ es el precio sombra de la restricción de balance, es decir, el coste de abastecer un incremento adicional de 1 MW de demanda.

Por qué funcionan los mercados descentralizados (en teoría)

A continuación mostraremos nuestro resultado principal:

Maximización del bienestar mediante mercados descentralizados

La combinación de producción y consumo que maximiza el bienestar puede alcanzarse mediante las decisiones descentralizadas de los productores que maximizan su beneficio y las de los consumidores que maximizan su utilidad, siempre que:

- El precio de mercado sea igual al precio sombra de la restricción global de balance entre oferta y demanda en el problema de maximización del bienestar
- Todos los productores y consumidores sean tomadores de precios

Ejemplo de oferta y demanda: Ofertas de venta de los generadores

Ejemplo de Kirschen y Strbac, pp. 56-58.

Los siguientes generadores presentan ofertas de venta al mercado para la hora entre las 09:00 y las 10:00 del 20 de abril de 2016:

Empresa	Cantidad [MW]	Precio [\$/MWh]
Roja	200	12
Roja	50	15
Roja	150	20
Verde	150	16
Verde	50	17
Azul	100	13
Azul	50	18

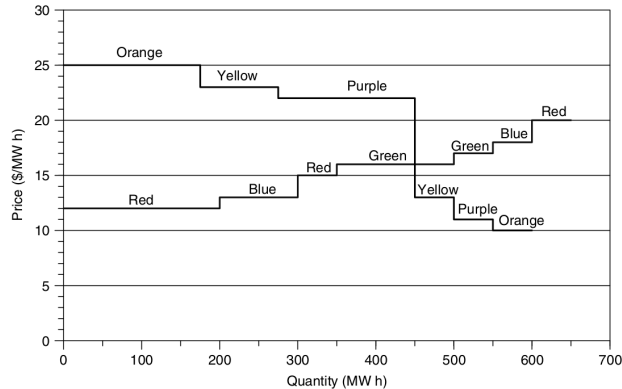
Ejemplo de oferta y demanda: Ofertas de compra de los consumidores

Los siguientes consumidores presentan ofertas de compra para el mismo periodo:

Empresa	Cantidad [MW]	Precio [\$/MWh]
Amarilla	50	13
Amarilla	100	23
Morada	50	11
Morada	150	22
Naranja	50	10
Naranja	200	25

Ejemplo de oferta y demanda: La curva

Si las ofertas de venta y de compra se apilan en orden, las curvas de oferta y de demanda se cruzan con una demanda de 450 MW a un precio marginal del sistema de $\lambda = 16$ \$/MWh.



[12]

Ejemplo de oferta y demanda: Ingresos y Gastos

Despacho e ingresos/gastos de cada empresa:

Empresa	Producción [MWh]	Consumo [MWh]	Ingresos [\$]	Gastos [\$]
Roja	250		4000	
Azul	100		1600	
Verde	100		1600	
Naranja		200		3200
Amarilla		100		1600
Morada		150		2400
Total	450	450	7200	7200

Varios generadores con demanda fija

Consideremos una situación simplificada en la que tenemos solamente dos generadores 1 y 2 que deben satisfacer una demanda fija Q (podrían ser, por ejemplo, muchos consumidores con demanda inelástica y una curva de demanda inversa muy superior a los costes de generación, es decir, $U(Q) = d \cdot Q$ con $d \gg c_i$).

Tienen tasas de generación Q_1 y Q_2 respectivamente, de modo que se tiene

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Los generadores tienen funciones de coste lineales sencillas

$$C_1(Q_1) = c_1 \cdot Q_1$$

$$C_2(Q_2) = c_2 \cdot Q_2$$

donde suponemos que $c_1 < c_2$. El despacho debe ser no negativo y no superar la capacidad:

$$0 \leq Q_1 \leq \hat{Q}_1$$

$$0 \leq Q_2 \leq \hat{Q}_2$$

Varios generadores con demanda fija

¿Cuál es el despacho más eficiente de los dos generadores?

Queremos maximizar el bienestar económico total, que es la suma del excedente del generador y del consumidor. En este ejemplo no tenemos control sobre el lado del consumidor, así que debemos buscar maximizar el excedente del generador. Esto equivale a minimizar los costes. Podemos escribir un problema de optimización con **función objetivo**:

$$\max_{Q_1, Q_2} f(Q_1, Q_2) = -c_1 \cdot Q_1 - c_2 \cdot Q_2$$

sujeto a una **restricción** de igualdad y cuatro de desigualdad:

$$Q - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$0 \leq Q_1 \leq \hat{Q}_1$$

$$0 \leq Q_2 \leq \hat{Q}_2$$

Varios generadores con demanda fija: Ejemplo 1

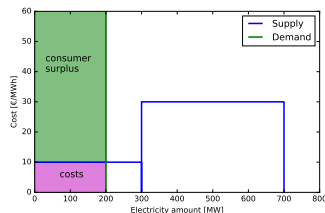
Supongamos que $c_1 = 10 \text{ €/MWh}$, $c_2 = 30 \text{ €/MWh}$, $Q = 200 \text{ MW}$, $\hat{Q}_1 = 300 \text{ MW}$, $\hat{Q}_2 = 400 \text{ MW}$.

¿Cuál es el despacho óptimo de las centrales, es decir, qué valores de Q_1 , Q_2 maximizan la eficiencia?

La respuesta es clara: abastecer toda la demanda con el generador 1, el más barato.

El despacho óptimo es $Q_1^* = 200 < \hat{Q}_1$ y $Q_2^* = 0 < \hat{Q}_2$.

En este ejemplo las desigualdades del generador 1 son **inactivas**.



[8]

Restricciones de Igualdad y Precios Sombra

Tenemos una restricción de igualdad:

$$Q - Q_1 - Q_2 = 0$$

Podemos preguntarnos: ¿cuál es el cambio en la función objetivo, es decir, el incremento del coste total, si aumentamos la carga Q en una unidad?

En este caso, la carga adicional la abastecería el generador 1, que todavía tiene capacidad disponible, de modo que el precio sombra de la restricción de balance es $\lambda^* = c_1$.

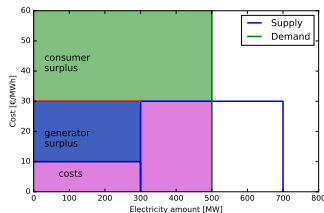
Varios generadores con demanda fija: Ejemplo 2

Supongamos ahora que elevamos la carga a $Q = 500$ MW. ¿Qué valores de Q_1, Q_2 maximizan la eficiencia? La respuesta es clara: llevar al máximo al generador 1, el más barato, y luego abastecer la demanda restante con el generador 2, el más caro.

El despacho óptimo es $Q_1^* = 300 = \hat{Q}_1$ y $Q_2^* = 200 < \hat{Q}_2$.

Aquí la restricción de balance tiene un precio sombra de $\lambda^* = c_2$.

En este ejemplo la desigualdad del generador 1 es **activa**, pero la desigualdad del generador 2 es **inactiva**.



[8]

Restricciones de Desigualdad Activas y Precios Sombra

Si asociamos precios sombra μ_i a las cuatro restricciones de desigualdad de la generación

$$\begin{array}{lll}
 Q_1 \leq \hat{Q}_1 & \leftrightarrow & \mu_1 \\
 Q_2 \leq \hat{Q}_2 & \leftrightarrow & \mu_2 \\
 -Q_1 \leq \hat{0} & \leftrightarrow & \mu_3 \\
 -Q_2 \leq \hat{0} & \leftrightarrow & \mu_4
 \end{array}$$

Entonces podemos preguntarnos: ¿cuál es el cambio en la función objetivo si relajamos la primera restricción, es decir, si permitimos una unidad más de capacidad $\hat{Q}_1$ para el generador 1?

Sustituimos generación del generador 2 por generación del generador 1, con lo que el bienestar total aumenta en

$$\mu_1^* = c_2 - c_1$$

Por supuesto, esto tendría que sopesarse frente a los costes de capital de añadir esa capacidad al generador 1.

Teoría general de optimización con restricciones: lagrangianos y condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Problema de optimización

Tenemos una *función objetivo* $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

$$\max_x f(x)$$

$[x = (x_1, \dots, x_k)]$ sujeta a ciertas restricciones dentro de $\mathbb{R}^k$:

$$\begin{array}{llll} g_i(x) = c_i & \Leftrightarrow & \lambda_i & i = 1, \dots, n \\ h_j(x) \leq d_j & \Leftrightarrow & \mu_j & j = 1, \dots, m \end{array}$$

λ_i y μ_j son los multiplicadores de Lagrange de las condiciones KKT que introducimos para cada ecuación de restricción; su significado e interpretación se explicarán en la siguiente diapositiva.

Lagrangiana

Ahora estudiamos la *función lagrangiana*

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_i \lambda_i [g_i(x) - c_i] - \sum_j \mu_j [h_j(x) - d_j]$$

Hemos construido esta función usando las variables λ_i y μ_j para entender mejor la solución óptima de $f(x)$ dadas las restricciones.

Los óptimos de $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ nos dan información importante sobre los óptimos de $f(x)$ dadas las restricciones.

Ya podemos ver que si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0$ entonces la restricción de igualdad $g_i(x) = c$ se satisface.

[Atención: los signos $\pm$ aparecen de distintas formas en la literatura, pero aquí se han elegido de modo que $\lambda_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_i}$ y $\mu_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_j}$.]

Condiciones KKT

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son condiciones necesarias que toda solución óptima x^*, μ^*, λ^* satisface siempre (bajo ciertas condiciones de regularidad):

- 1 Estacionariedad: para $l = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_l} = \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_i \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_l} - \sum_j \mu_j^* \frac{\partial h_j}{\partial x_l} = 0$$

- 2 Factibilidad primal:

$$g_i(x^*) = c_i$$

$$h_j(x^*) \leq d_j$$

- 3 Factibilidad dual: $\mu_j^* \geq 0$
- 4 Holgura complementaria: $\mu_j^*(h_j(x^*) - d_j) = 0$

Holgura complementaria para restricciones de desigualdad

Para cada restricción de desigualdad tenemos

$$\begin{aligned}\mu_j^* &\geq 0 \\ \mu_j^*(h_j(x^*) - d_j) &= 0\end{aligned}$$

Así, **o bien** la restricción de desigualdad es activa

$$h_j(x^*) = d_j$$

y entonces $\mu_j^* \geq 0$.

O bien la restricción de desigualdad NO es activa

$$h_j(x^*) < d_j$$

y por lo tanto DEBE cumplirse $\mu_j^* = 0$.

Si la restricción de desigualdad es inactiva, podemos eliminarla del problema de optimización, ya que no tiene efecto sobre la solución óptima.

Nota Bene

- 1 Las condiciones KKT solo son **suficientes** para la optimalidad de la solución bajo ciertas condiciones, por ejemplo, la linealidad del problema.
- 2 Dado que en la solución óptima se tiene $g_i(x^*) = c_i$ para las restricciones de igualdad y $\mu_j^*(h_j(x^*) - d_j) = 0$, se obtiene

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$$

KKT y Maximización del Bienestar 1/2

Apliquemos ahora las condiciones KKT a la maximización del bienestar económico total:

$$\max_{\{Q_i^B\}, \{Q_i^S\}} f(\{Q_i^B\}, \{Q_i^S\}) = \left[\sum_i U_i(Q_i^B) - \sum_i C_i(Q_i^S) \right]$$

sujeta a la restricción de balance:

$$g(\{Q_i^B\}, \{Q_i^S\}) = \sum_i Q_i^B - \sum_i Q_i^S = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda$$

y a cualesquiera otras restricciones (por ejemplo, límites a la capacidad de los generadores, etc.).

Nuestras variables de optimización son $\{x\} = \{Q_i^B\} \cup \{Q_i^S\}$.

De la estacionariedad obtenemos:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial Q_i^B} - \sum_i \lambda^* \frac{\partial g}{\partial Q_i^B} = U_i'(Q_i^B) - \lambda^* = 0$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial Q_i^S} - \sum_i \lambda^* \frac{\partial g}{\partial Q_i^S} = -C_i'(Q_i^S) + \lambda^* = 0$$

KKT y Maximización del Bienestar 2/2

Así, en el punto óptimo de bienestar económico total máximo obtenemos el mismo resultado que si cada participante maximizara su propio bienestar por separado:

$$U'_i(Q_i^B) = \lambda^*$$

$$C'_i(Q_i^S) = \lambda^*$$

Este es el resultado CENTRAL de la microeconomía.

Si tenemos restricciones de desigualdad adicionales que son activas, entonces estas ecuaciones recibirán términos adicionales con $\mu_i^* > 0$, como lo veremos en los siguientes ejemplos...

Aplicación al ejemplo de 2 generadores con demanda fija

Nuestras variables de optimización son $\{x\} = \{Q_1, Q_2\}$ con función objetivo

$$\max_{Q_1, Q_2} f(Q_1, Q_2) = -c_1 \cdot Q_1 - c_2 \cdot Q_2$$

sujeto a una **restricción** de igualdad y cuatro de desigualdad:

$$\begin{aligned} Q - Q_1 - Q_2 &= 0 && \Leftrightarrow && \lambda \\ Q_1 &\leq \hat{Q}_1 && \Leftrightarrow && \mu_1 \\ Q_2 &\leq \hat{Q}_2 && \Leftrightarrow && \mu_2 \\ -Q_1 &\leq \hat{0} && \Leftrightarrow && \mu_3 \\ -Q_2 &\leq \hat{0} && \Leftrightarrow && \mu_4 \end{aligned}$$

KKT para el ejemplo

La estacionariedad nos da:

$$-c_1 + \lambda^* - \mu_1^* + \mu_3^* = 0$$

$$-c_2 + \lambda^* - \mu_2^* + \mu_4^* = 0$$

La factibilidad dual y la holgura complementaria nos dan:

$$\mu_i^* \geq 0 \quad \forall i \in 1, 2, 3, 4$$

$$\mu_i^*(Q_i^* - \hat{Q}_i) = 0 \quad \forall i \in 1, 2$$

$$\mu_i^*(-Q_i^*) = 0 \quad \forall i \in 3, 4$$

Aplicación al Ejemplo 1

Aquí no tenemos restricciones activas para el generador 1 en el punto óptimo, $0 < Q_1^* < \hat{Q}_1$, y el generador 2 se encuentra en su límite inferior $Q_2^* = 0$.

Por lo tanto, $\mu_1^* = \mu_2^* = \mu_3^* = 0$ y $\mu_4^* \neq 0$.

De la estacionariedad obtenemos

$$-c_1 + \lambda^* = 0$$

$$-c_2 + \lambda^* + \mu_4^* = 0$$

Así, los multiplicadores de Lagrange no nulos son:

$$\lambda^* = c_1$$

$$\mu_4^* = c_2 - c_1$$

Aplicación al Ejemplo 2

Aquí tenemos una restricción activa para el generador 1 en el punto óptimo, $Q_1^* = \hat{Q}_1$, y el generador 2 no tiene restricciones activas $0 < Q_2^* < \hat{Q}_2$.

Por lo tanto, $\mu_1^* \neq 0$, $\mu_2^* = \mu_3^* = \mu_4^* = 0$.

De la estacionariedad obtenemos

$$\begin{aligned} -c_1 + \lambda^* - \mu_1^* &= 0 \\ -c_2 + \lambda^* &= 0 \end{aligned}$$

Así, los multiplicadores de Lagrange no nulos son:

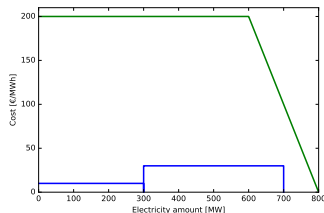
$$\begin{aligned} \lambda^* &= c_2 \\ \mu_1^* &= c_2 - c_1 \end{aligned}$$

Extensión del Ejemplo para Demanda Mayor que la Generación

En los ejemplos anteriores siempre había un generador que fijaba el precio y obtenía ingresos a su coste marginal. ¿Cómo pueden entonces esos generadores recuperar sus costes de capital?

Supongamos ahora que promovemos la demanda Q a variable de optimización, con utilidad

$$U(Q) = \begin{cases} 200Q & \text{para } Q \leq 600 \\ -180000 + 800Q - \frac{1}{2}Q^2 & \text{para } 600 \leq Q \leq 800 \end{cases}$$



[8]

Aplicación al ejemplo de 2 generadores con demanda fija

Nuestras variables de optimización son $\{x\} = \{Q, Q_1, Q_2\}$ con función objetivo

$$\max_{Q, Q_1, Q_2} f(Q, Q_1, Q_2) = U(Q) - c_1 \cdot Q_1 - c_2 \cdot Q_2$$

sujeto a una **restricción** de igualdad y cuatro de desigualdad:

$$Q - Q_1 - Q_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$$

$$Q_1 \leq \hat{Q}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1$$

$$Q_2 \leq \hat{Q}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_2$$

$$-Q_1 \leq \hat{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_3$$

$$-Q_2 \leq \hat{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_4$$

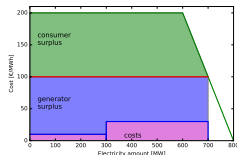
Extensión del Ejemplo para Demanda Mayor que la Generación

Llevamos al máximo ambos generadores: $Q_1^* = 300$, $Q_2^* = 400$, $Q^* = 700$.

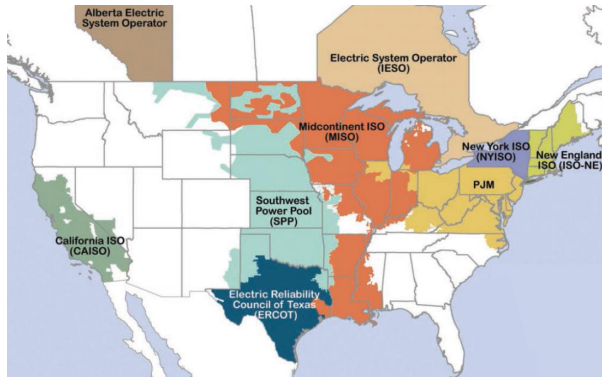
De las condiciones KKT obtenemos $\mu_3^* = \mu_4^* = 0$ porque ambos generadores están en sus *límites superiores*.

Estacionariedad KKT:

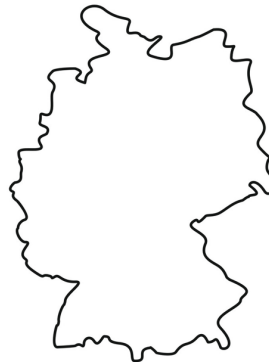
$$\begin{aligned} U'(Q^*) - \lambda^* &= 0 & \Rightarrow \lambda^* &= 100 \\ -c_1 + \lambda^* - \mu_1^* &= 0 & \Rightarrow \mu_1^* &= \lambda^* - c_1 = 90 \\ -c_2 + \lambda^* - \mu_2^* &= 0 & \Rightarrow \mu_2^* &= \lambda^* - c_2 = 70 \end{aligned}$$



Estados Unidos tiene estados con esquema de precios nodales.



Alemania opera con un esquema de precios zonales.



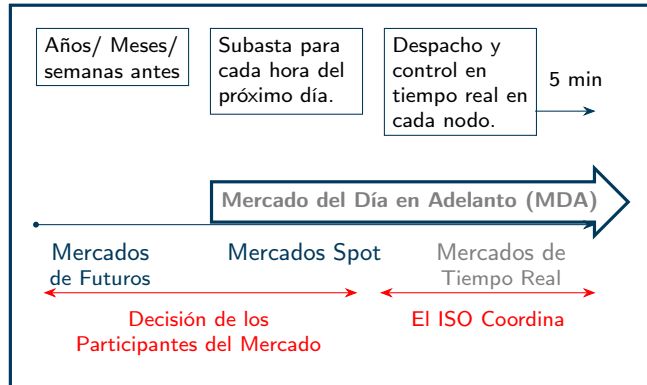
Tanto Estados Unidos como México operan con esquemas de precios nodales; en México, a través del Mercado Eléctrico Mayorista.

[9]

Entonces, ¿cuáles son las diferencias entre el esquema de precios nodales y el zonal?

Esquema de Precios Nodales: Estructura del Mercado Eléctrico de los “Estados de EUA”.

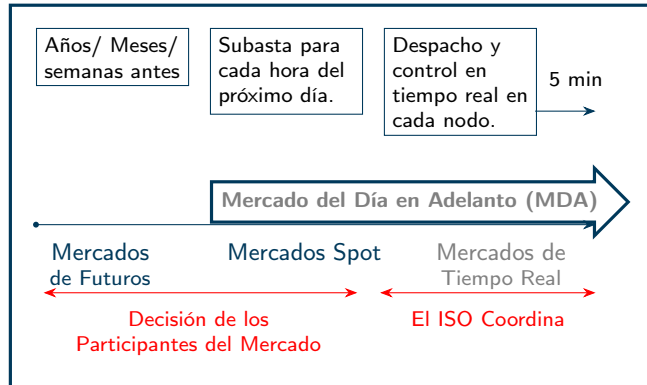
- Los mercados se organizan en torno a un ISO (operador independiente del sistema, por sus siglas en inglés).
- El ISO asume el papel tanto de operador del mercado como de operador del sistema.
- El ISO optimiza de forma centralizada la programación y el despacho (control en tiempo real de los recursos).
[Cramton,2017]



[9]

Esquema de Precios Nodales: Estructura del Mercado Eléctrico de los “Estados de EUA”.

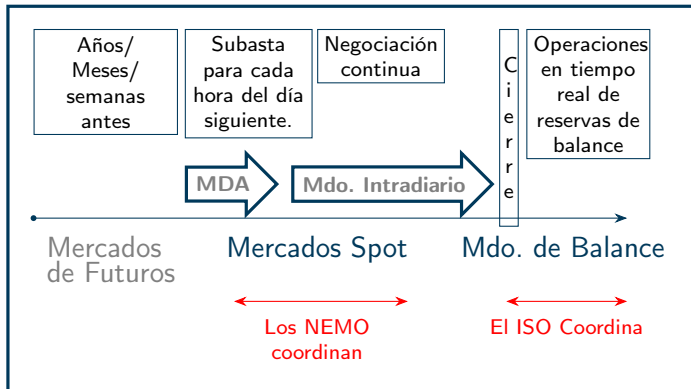
- Se establece un mercado independiente para cada nodo.
- La presentación de ofertas y la programación deben hacerse para cada nodo.
- El ISO determina simultáneamente los precios en todos los mercados y los flujos entre nodos **tomando en cuenta la congestión**.



[9]

Esquema de Precios Zonales: Estructura del Mercado Spot Eléctrico Alemán.

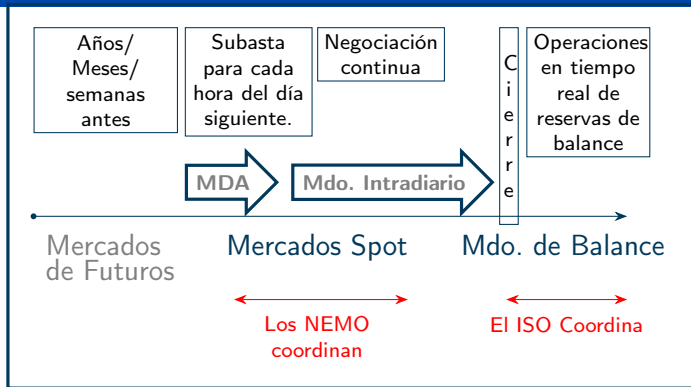
- En Alemania la operación del sistema está desacoplada de la operación del mercado.
- Los Operadores Designados del Mercado Eléctrico (NEMO, por sus siglas en inglés) recopilan todas las ofertas y casan la oferta con la demanda.
- Existe un único precio de la electricidad para toda Alemania



[9]

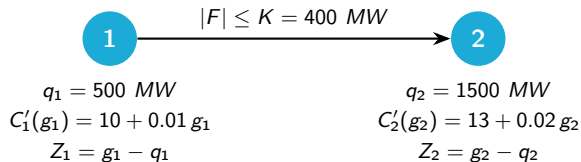
Esquema de Precios Zonales: Estructura del Mercado Spot Eléctrico Alemán. Existe un único precio de la electricidad para toda Alemania

- Se agrupan varios nodos en un solo mercado.
- El precio de mercado ignora la (posible) congestión.
- Posteriormente, cada TSO (operador del sistema de transmisión, por sus siglas en inglés) es responsable del balance en tiempo real.
- El redespacho es necesario cuando el resultado del mercado provoca la violación de los límites térmicos, los rangos de tensión, etc.



Si los flujos resultantes no son factibles, el TSO debe resolver los conflictos en una segunda etapa mediante el redespacho.

Ejemplo Básico: Resolver bajo los esquemas de precios zonales y nodales.



Presuposiciones Técnicas:

Tenemos dos nodos con consumo fijo y generadores con precios distintos, conectados mediante una línea de transmisión de capacidad limitada.

Presuposiciones Económicas:

Supongamos que hay competencia perfecta y que los generadores ofertan sus costes marginales de forma veraz.

[1]

Primero resolvemos bajo el Esquema de Precios Nodales:

Consideramos $K=400$ y resolvemos:

$$C'_1(q_1 + K) = \lambda_1$$

$$C'_2(q_2 - K) = \lambda_2$$

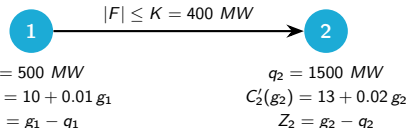
Esto conduce a:

$$g_1 = 900 \text{ MW}$$

$$g_2 = 1100 \text{ MW}$$

$$\lambda_1 = 19 \text{ €/MWh}$$

$$\lambda_2 = 35 \text{ €/MWh}$$



Supongamos competencia perfecta. Los generadores ofertarán su CMg (coste marginal).

Los generadores más baratos del nodo 1 exportan potencia hasta que la línea se congestiona. Los generadores más caros cubren entonces la carga restante en el nodo 2.

[1]

Debido a la congestión de la línea de transmisión, el coste marginal de producir electricidad es distinto en el nodo 1 y en el nodo 2. Precios distintos corresponden al precio marginal local (PML; en inglés, *locational marginal price*, LMP).

En cada nodo n:

Los clientes pagan $\lambda_n * q_n$ al ISO

En el nodo 1: $19 * 500 = 9500$

En el nodo 2: $35 * 1500 = 52500$

Los generadores reciben $\lambda_n * g_n$ del ISO.

En el nodo 1 $19 * 900 = 17\ 100\ €$

En el nodo 2 $35 * 1100 = 38\ 500\ €$

}

La diferencia entre estos pagos es la renta de congestión que recauda el operador:

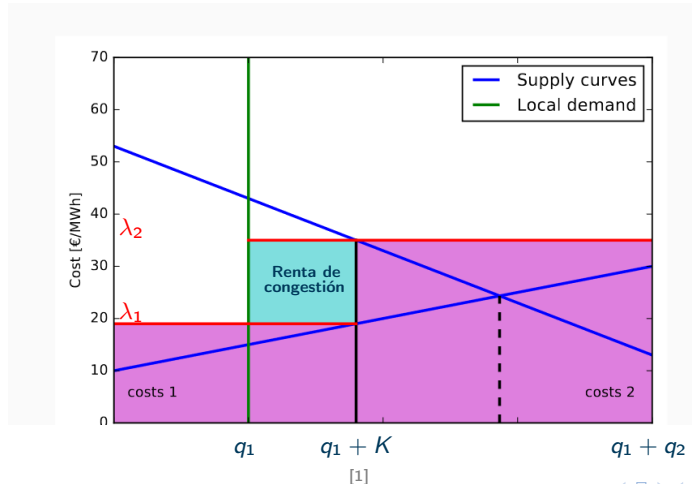
$$\text{Renta de congestión} = \Delta\lambda \times F$$

6400 €

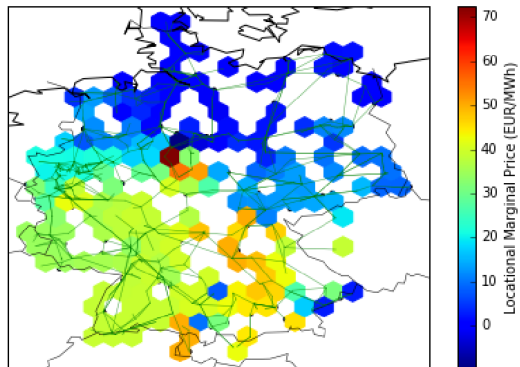
[1]

Precios Nodales y Renta de Congestión

$$\text{Renta de Congestión} = (35 - 19) * 400 = 6400$$



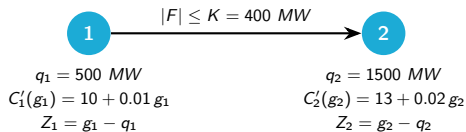
Precios Nodales y PML



Source: PyPSA
(Python for Power System Analysis)

[2]

Bajo el Esquema de Precios Zonales:



Primero suponemos que $K = \infty$.

La demanda total es:

$$Q_T = q_1 + q_2 = 2000 \text{ MW}$$

Etapla 1: $C'_1(g_1) = C'_2(g_2) = \lambda$

$$\text{s.a. } g_1 + g_2 = 2000 \text{ MW}$$

[1]

- Se agrupan varios nodos en un solo mercado.
- El precio de mercado ignora la (posible) congestión.
- Si los flujos resultantes no son factibles, el TSO debe resolver los conflictos en una segunda etapa mediante el redespacho.

Bajo el Esquema de Precios Zonales:

Primero suponemos que $K = \infty$.

La demanda total es:

$$Q_T = q_1 + q_2 = 2000 \text{ MW}$$

Etapas 1: $C'_1(g_1) = C'_2(g_2) = \lambda$

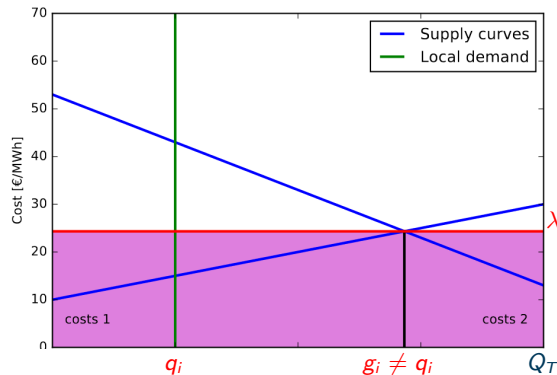
s.a. $g_1 + g_2 = 2000 \text{ MW}$

Resultado:

$$g_1 = 1433 \text{ MW}, g_2 = 567 \text{ MW},$$

$$\lambda = 24.33 \text{ €/MWh}$$

[3]



Bajo el Esquema de Precios Zonales:

Resultado de la Etapa 1: ($K = \infty$)

$$g_1 = 1433 \text{ MW}, g_2 = 567 \text{ MW},$$

$$\lambda = 24.33 \text{ €/MWh}$$

Flujo del nodo 1 al nodo 2: 933 MW

Pero esto no es factible, ya que $K=400$ MW

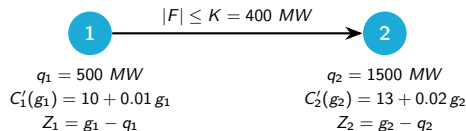
Etapa 2: Redespacho

El TSO debe ajustar el despacho:

$$\Delta g_1 = -533 \text{ MW}$$

$$\Delta g_2 = +533 \text{ MW}$$

[1]



Coste del Redespacho en Precios Zonales

Etapa 2: Redespacho

El TSO debe ajustar el despacho:

$$\Delta g_1 = -533 \text{ MW}$$

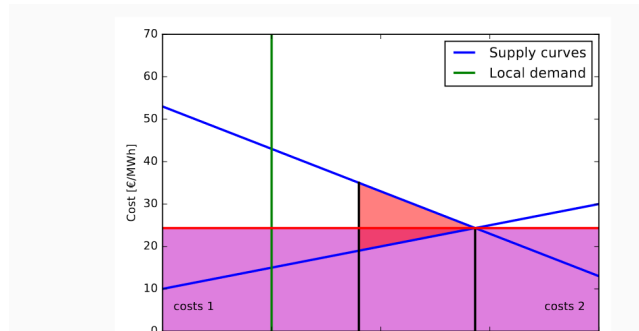
$$\Delta g_2 = +533 \text{ MW}$$

Coste del redespacho:

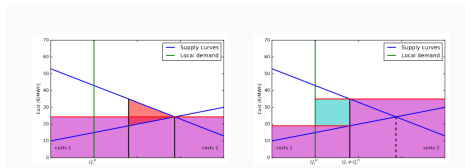
$$\frac{1}{2} (35 - 19) \cdot 533 = 4262 \text{ €}$$

Gen 1: si declara un CMg más bajo, obtendrá un beneficio mayor por reducir su generación.

[3]



Precios Zonales vs. Precios Nodales



Nótese que el coste de despacho de los generadores es idéntico con redespatcho (izquierda) y con precios nodales (derecha).

- Bajo precios zonales (izquierda) el TSO “pierde” el triángulo rojo. El TSO incurre en pérdidas, por lo que se necesitan pagos adicionales o un cargo a los consumidores o productores.
- Bajo precios nodales el ISO recauda una renta de congestión. Esta renta (rectángulo azul) refleja la escasez de capacidad de la red.

[3]

Resumen de la Parte II: Precios Nodales vs. Zonales en pocas palabras

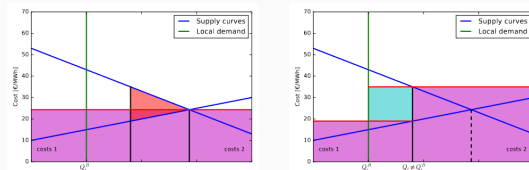
Características Institucionales

- Zonal: la operación del sistema está desacoplada de la operación del mercado.
- Nodal: el ISO opera la red eléctrica y el mercado de forma integrada.

Cómo se garantiza que se respeten las restricciones de transmisión

- Zonal: la congestión dentro de las zonas se gestiona después del despacho (preliminar).
- Nodal: las restricciones de transmisión se toman en cuenta durante la toma de decisiones del despacho.

Conclusión: Precios Zonales vs Precios Nodales



Nótese que el coste de despacho de los generadores es idéntico con redespacho (izquierda) y con precios nodales (derecha).

Incluso en el caso más simple, en el que suponemos que las empresas ofertan su precio marginal, el TSO incurre en pérdidas que la sociedad (consumidores/productores) debe cubrir mediante cargos regulados.

[3]

Conclusión: Precios Zonales vs Precios Nodales

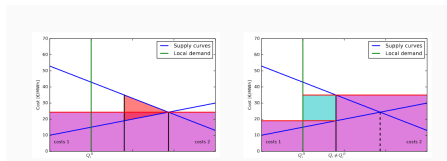
¿Los precios zonales distorsionan la formación de precios?

Idea de los mercados: los precios señalan qué tan caro es proveer un servicio.

Los precios nodales señalan a la sociedad los precios verdaderos. Bajo precios zonales los consumidores del nodo 1 pensarán que la electricidad es muy cara.

Un buen diseño de mercado tampoco debería ofrecer a los productores la posibilidad de ejercer poder de mercado.

Y como vimos, incluso en este ejemplo básico, los precios zonales permiten el uso de ofertas estratégicas.



Nótese que el coste de despacho de los generadores es idéntico con redespatcho (izquierda) y con precios nodales (derecha).

[3]

Actividad en equipos

En equipos de 3 a 4 personas, vayan a la hoja de ejercicios y resuelvan juntos el ejercicio 1.

Referencias

- [1] Ejercicio de Kirschen y Strbac 6.3.1.2, p. 152
- [2] PyPSA
- [3] Ejercicio de Kirschen y Strbac 6.3.1.2, p. 152 y https://nworbmot.org/courses/electricity_markets/#orgheadline9
- [4] <https://www.businesswire.com/news/home/20140924006016/en/North-America%E2%80%99s-Largest-Battery-Energy-Storage-System-Now-Operational>
- [5] <https://openinframap.org>
- [6] <https://www.cleanenergywire.org/factsheets/why-power-prices-turn-negative>
- [7] <https://openinframap.org> (OpenStreetMap, ODbL)
- [8] Electricity Markets 2016 (M. Schäfer, T. Brown), https://nworbmot.org/courses/electricity_markets/
- [9] <https://link.springer.com/article/10.1007/s41471-021-00126-4>
- [10] CERN
- [11] CAISO
- [12] Kirschen & Strbac, Fundamentals of Power System Economics