MODELADO DE SISTEMAS DINAMICOS.

Sistemas dinámicos. Conceptos Básicos.

Sistema (Definición de DIN 66201, Normas Alemanas de Ingeniería)

Un Sistema es una disposición delimitada de entidades ínter actuantes.

Delimitación, respecto al resto del universo. Los elementos del resto del Universo con acciones relevantes sobre el Sistema se reemplazan por elementos de acción equivalente y se incorporan al sistema.

Entidades ínteractuantes, componentes del sistema (transformación y/o transporte de materia, energía y/o información).

Disposición, estructura del sistema (disposición de los componentes en el sistema).

Asumiendo la delimitación respecto del Universo puede decirse entonces, de manera equivalente a la Norma DIN mencionada, que:

Un sistema es una entidad formada por un conjunto de componentes y una estructura.

Sistema = {Componentes, Estructura}

Sistema Físico: La interacción involucra intercambio de materia y/o energía y/o información.

Sistema Físico Dinámico: Hay almacenamiento de materia y/o energía y/o información.

Metodología.

Análisis experimental.: La Ciencia y sus métodos proveen respuestas a los interrogantes humanos sobre sistemas y sus propiedades. Los métodos científicos se basan en la experimentación, que consiste en la realización de ensayos sobre el sistema, en la observación de las reacciones del mismo, y en la obtención de leyes de su comportamiento, expresadas por lo general mediante el lenguaje matemático.

El método experimental no siempre es viable ya que en algunos casos existen factores que limitan o impiden su aplicación. Por ejemplo: Costos, Riesgos, experimento irrealizable (por inexistencia del sistema o incapacidad humana de experimentar).

Cuando no se puede experimentar sobre los sistemas se recurre a su modelado.

Modelos: Un modelo de un sistema es básicamente una herramienta que permite responder interrogantes sobre este último sin tener que recurrir a la experimentación sobre el mismo. Es una representación siempre simplificada de la realidad (si el sistema físico existe) o es un prototipo conceptual (proyecto del sist. Físico).

Modelos matemáticos: Son expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes entre las magnitudes caracterizantes del sistema. Pueden ser sistemas de ecuaciones, inecuaciones, expresiones lógico-matemática.

Todas estas formas vinculan variables matemáticas representativas de las señales (señal: representación de una información a través de valores de una magnitud física) en el sistema, obtenidas a partir de las relaciones entre las correspondientes magnitudes físicas. Pueden ser:

Tiempo continuo o Tiempo discreto.

Estáticos o Dinámicos(el vínculo entre variables depende también de los valores pasados de las mismas, no solo de los actuales).

Determinísticos o Estocásticos(expresa las relaciones con incertidumbre entre las variables mediante conceptos probabilísticas usando variables aleatorias).

Parámetros distribuidos o Parámetros concentrados(reemplaza la dependencia espacial de las variables por su promedio en la región del espacio donde están definidas).

Paramétricos o No paramétricos(no pueden caracterizarse por un número finito de parámetros).

Lineales o No lineales(no vale el principio de superposición).

Estacionarios(toda acción sobre el sistema produce el mismo efecto independiente del momento en que comienza a ejercerse, si en ese momento el sistema se encuentra en las mismas condiciones) *o* ***Inestacionarios***.

Proceso de modelado.

El proceso de modelado analítico se divide en tres grandes etapas. La primera de ellas consiste en la delimitación del modelo en función de los fenómenos que resultan relevantes de acuerdo al problema que se quiere resolver. Esta es una etapa que no puede sistematizarse fácilmente y que requiere por ende de una cierta dosis de intuición y por sobre todo de una vasta experiencia en relación con el sistema a modelar.

Una vez delimitados los fenómenos que se consideraron relevantes para la construcción del modelo, se pasa a la siguiente etapa en la que se deben formalizar las relaciones constitutivas y estructurales asociadas respectivamente a los fenómenos considerados y a la forma en que estos se disponen dentro del sistema. En los sistemas físicos, estas relaciones constitutivas y estructurales encuentran su expresión formal (matemática) en las leyes fundamentales de los dominios de la física asociados a los fenómenos mencionados.

Por este motivo, el modelado analítico de un sistema físico no es posible sin un conocimiento de las leyes físicas elementales asociadas a los fenómenos en cuestión.

Sistemas mecánicos.

La mecánica clásica (newtoniana) se ocupa de describir fenómenos asociados con el movimiento de los cuerpos. Por este motivo, en los sistemas mecánicos tendremos habitualmente como variables descriptivas las posiciones, velocidades y aceleraciones, con sus relaciones constitutivas básicas:

$$\dot{x} - v = 0$$
$$\dot{v} - a = 0$$

La ley fundamental de la mecánica clásica, y también la más utilizada para el

$$\dot{p} - F_{neta} = 0$$

modelado de sistemas es sin dudas la segunda ley de Newton:

Que establece que la derivada de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta aplicada. Esta ecuación constituye una ley dinámica que será una relación constitutiva fundamental asociada a cada cuerpo en el que se considere la presencia de masa. Recordemos también que definíamos a la cantidad de movimiento como el producto de la masa por la velocidad:

$$p - m \cdot v = 0$$

Otras leyes importantes son las asociadas a los fenómenos de fricción y de la elasticidad. En el caso de la fricción, una hipótesis habitual es representar la misma como una fuerza que se opone al movimiento cuya magnitud se relaciona con la velocidad.

$$f(F_{friccion}, v_{friccion}) = 0$$

En el caso particular de la fricción viscosa la relación se considera lineal, caracterizada por un coeficiente de rozamiento.

$$F_{friccion} - b \cdot v_{friccion} = 0$$

El fenómeno de elasticidad, por su parte, vincula la fuerza ejercida sobre un cuerpo con la deformación sufrida por el mismo. Una aproximación habitual para representar esta relación en un resorte, en función de una constante de elasticidad es la siguiente:

$$F_{resorte} - k \cdot \Delta x = 0$$

El resto de las relaciones que podrán aparecer en sistemas mecánicos serán en general relaciones estructurales.

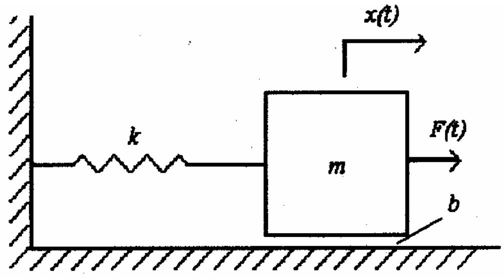


Figura 1. Sistema mecánico "masa resorte"

Sistemas mecánicos rotacionales.

Todas las leyes constitutivas vistas para los sistemas mecánicos traslacionales tienen su equivalente rotacional, donde las fuerzas son reemplazadas por torques en tanto que las posiciones, velocidades y aceleraciones traslacionales son reemplazadas por sus versiones angulares.

Encontramos también elementos roto-traslacionales que vinculan variables de ambos dominios. Un caso típico es una polea, en la cual se verifica:

$$\begin{aligned} v - r \cdot \omega &= 0 \\ \tau - r \cdot F &= 0 \end{aligned}$$

Siendo r el radio de la misma.

Del sistema físico real al idealizado.

Cuando nos encontramos con un sistema real a modelizar, veremos algo muy distinto a lo que muestra el esquema de la figura1. Estos esquemas, que corresponden a los llamaremos sistema físico idealizado, son producto de simplificaciones que se realizan acorde al problema a estudiar.

Es muy importante no perder de vista que los modelos obtenidos resultarán adecuados sólo para resolver determinados problemas y dentro de un rango de operaciones dado. Es decir, el sistema físico idealizado dependerá no sólo del sistema real en sí, sino también del problema a resolver y del intervalo de validez que se pretenda tener para el modelo resultante.

Lamentablemente, no hay una metodología que nos permita realizar estas simplificaciones de forma sistemática. Esta etapa del modelado (que es quizás la más importante en virtud de que todo el resto dependerá de lo que se haga aquí) se resuelve en gran medida a partir de consideraciones sujetas a la experiencia y al conocimiento del proceso real.

Sin embargo los sistemas complejos pueden habitualmente dividirse en subsistemas más simples de los cuales se encuentran modelos en base a simplificaciones ya probadas en problemas similares. Por eso es fundamental antes de comenzar a realizar las primeras simplificaciones de un sistema real, buscar en la literatura modelos de sistemas similares en los cuales se manifiesten los mismos fenómenos.

Es muy importante tener en cuenta siempre que debido a que la obtención de un modelo se basa en la aplicación de hipótesis simplificatorias, los modelos tendrán validez siempre que se respeten las mencionadas hipótesis.

Del sistema idealizado al modelo matemático.

Una vez realizadas las simplificaciones y obtenido esquemas como el de la figura 1 decimos que tenemos un sistema físico idealizado. Aunque estos sistemas en general contienen toda la información que se necesita para la construcción de un modelo matemático, este pasaje no es trivial.

Asociadas al esquema, tendremos un buen numero de relaciones matemáticas que vincularán las variables descriptivas del modelo y que serán consecuencia tanto de los fenómenos físicos considerados (relaciones constitutivas) como de la interacción entre los mismos en función de su disposición en el sistema (relaciones estructurales). En general, las relaciones constitutivas estarán determinadas explícitamente en el esquema (teniendo en cuenta las leyes físicas correspondientes) mientras que la obtención de las relaciones estructurales requerirá de algún tipo de análisis geométrico y/o topológico (en relación al espacio).

De esta forma, una vez que se tiene el sistema físico idealizado el siguiente paso hacia la obtención de un modelo matemático será el de reunir las relaciones constitutivas y estructurales involucradas. En muchos casos encontraremos conjuntos de relaciones matemáticamente equivalentes, por lo que no serán necesarias todas las relaciones para la construcción del modelo.

Una vez que tengamos todas las relaciones matemáticas necesarias, aún no tendremos un modelo matemático muy útil. Si bien tendremos una especie de sistemas de ecuaciones (en realidad una mezcla de ecuaciones diferenciales y algebraicas), este sistema así planteado no tendrá una estructura que nos permita estudiar y resolver problemas.

Por esto, el paso siguiente tras reunir las relaciones constitutivas y estructurales es el obtener un sistema de ecuaciones que tenga una estructura que permita aplicar alguna teoría matemática adecuada ya establecida.

Dado que trataremos con sistemas físicos bajo hipótesis de parámetros concentrados, buscaremos arribar a los modelos con que trata la teoría de ecuaciones diferenciales. En general, utilizaremos dos tipos de expresiones: Las ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y los sistemas de Ecuaciones de Estado y de Salida(EE/ES).

Para llegar a este tipo de expresiones deberemos manipular las ecuaciones dadas por las relaciones constitutivas y estructurales siguiendo diferentes técnicas.

Nosotros no intentaremos deducirlas directamente a través de las relaciones mencionadas, sino que utilizaremos modelos gráficos (Bond Graphs) como un paso intermedio ya que de esta forma se simplifica notablemente el problema. Como ya veremos este método permite el pasaje sistemático del modelo grafico al modelo matemático.

DIAGRAMA DE ENLACES (BOND GRAPHS).

Introducción.

El modelado que utilizaremos será el modelado mediante diagramas de enlaces. El diagrama de enlace es más abstracto que los diagramas físicos esquemáticos (fig. 1) si bien esto es una desventaja para quien no está habituado, hay una serie de cuestiones importantes que hacen a este método muy eficaz.

Una de las ventajas del Diagrama de Enlaces es que puede ser elaborado siguiendo un camino metódico y definido.

Otra es que usan el mismo (mas bien pequeño) número de símbolos o elementos para representar todo tipo de sistema. Si bien nosotros restringimos en principio nuestro estudio a sistemas mecánicos, las ideas básicas del modelado por BG (siglas en ingles de Diagrama de Enlace) pueden ser extendidas a sistemas eléctricos, hidráulicos, térmicos y combinación de estos.

Dominio físico	*Variables de Potencia*				*Variables de Energía*			
	Esfuerzo e	S.I.	Flujo f	S.I.	Momento p	S.I.	Desplaz. q	S.I.
Traslación	fuerza F	N	velocidad v	$\frac{m}{s}$	impulso p	$N \cdot s$	desplaz. x	m
Rotación	torque τ	$N \cdot m$	velocidad angular ω	$\frac{rad}{s}$	momento angular L	$Nm \cdot s$	ángulo φ	rad
Fluidodinámica	presión P	$\frac{N}{m^2}$	caudal Q	$\frac{m^3}{s}$	impulso del fluido Γ	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	volumen V	m^3
Electromagnetismo	tensión U	V	corriente I	A	flujo magnético ϕ	$V \cdot s$	carga eléctrica	C
Química	potencial químico μ	$\frac{J}{mol}$	flujo molar υ	$\frac{mol}{s}$			número de moles n	mol
Termodinámica	temperatura absoluta T	^oK	flujo de entropía $\dot{S}$	$\frac{W}{^oK}$			entropía S	$\frac{J}{^oK}$

Es decir los diagramas de enlaces pueden ser aplicados a diferentes sistemas independiente del tipo de energía que se trate (uniformidad de razonamiento).

Un aspecto muy importante a tener en cuenta es que mediante el modelado con BGs se pone el énfasis, no en las ecuaciones matemáticas, sino en la física del sistema (flujo de potencia) y es orientado a objeto.

Cada línea o enlace en un BG implican la existencia de un par de señales, las cuales fluyen en dirección opuesta. Este par son tensión y corriente para el sistema eléctrico y fuerza y velocidad para el sistema mecánico. El producto de estas señales es potencia. Esta potencia está fluyendo entre varios elementos en el diagrama de enlaces, y potencia naturalmente es el cambio de energía por unidad de tiempo. La razón por la cual los diagramas de enlace son aplicables a muchos sistemas físicos es que se pueden encontrar pares de señales (sus nombres generales son flujo y esfuerzo) cuyo producto es potencia para muchos tipos de sistemas.

Los métodos de obtención de diagramas de enlace tienen una gran analogía entre todos los sistemas y esto justifica algunos de los esfuerzos de aprendizaje de este nuevo lenguaje de modelización.

Elementos pasivos ideales.

Los sistemas mecánicos contienen elementos como ser: amortiguadores, resortes y masas. Estos elementos idealmente representan disipadores de energía y almacenadores de energía cinética, potencial respectivamente. Se denomina a estos elementos pasivos porque no son fuente de energía. Las letras R, C e I identifican el nombre del elemento. Cada uno tiene una única línea asignada, la cual indica como el elemento es enlazado a otro elemento.

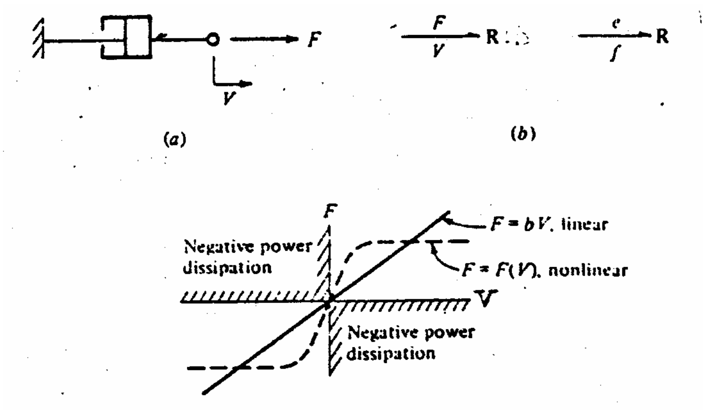
En cada elemento tanto un esfuerzo (fuerza) como un flujo (velocidad) son considerados.

El primer elemento considerado, llamado 'resistor' en general, es representado en su versión mecánica por el amortiguador pero el símbolo también es indicado para las perdidas por roces de todo tipo. En un elemento resistor siempre se verifica que el esfuerzo y el flujo sobre estos enlaces están directamente relacionados:

$F = b\ V$ o en notación general $e = R\ f$

Es llamada lineal porque su representación gráfica es una línea recta, en términos algebraicos la fuerza es proporcional a la velocidad. El caso más común es cuando es constante pero b puede variar con la temperatura o con algún otro factor.

La media flecha apunta hacia R, porque en ella siempre el producto FV es positivo.



Es lógico pensar que FV sea, con este sentido de la flecha, siempre positivo, puesto que la fricción siempre disipa potencia.

se puede expresar la potencia como P = F V = b V^2

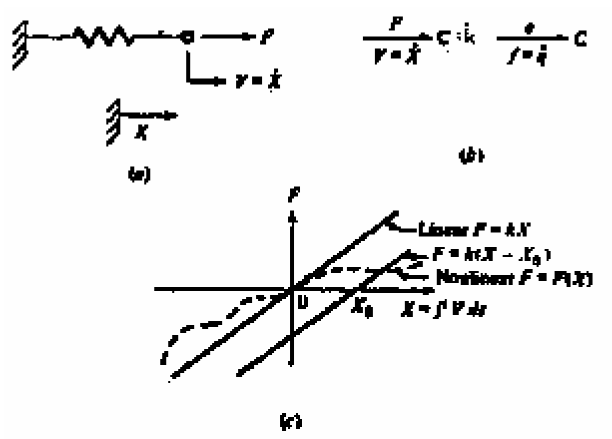
Consideremos el caso más general en que la ley del resistor resulta ser lineal. La idea es que FV será positiva cuando tanto F como V sean ambos positivos o ambos negativos. De este modo toda posible ley constitutiva que sea puramente disipativa estará en el 1º y 3º cuadrante del plano F-V. Para resistores no lineales se observa la línea de trazos de la figura. Para el caso del amortiguador no lineal la relación puede ser indicada como:

$$F=F(V)$$

Donde la notación indica que hay una relación funcional entre F y V.

Hay una regla útil, siempre la flecha apunta hacia la resistencia entonces FV representa potencia en el resistor y la ley constitutiva siempre estará restringida al 1º y 3º cuadrante.

El próximo elemento a considerar es el resorte. El diagrama de enlace del elemento usa como símbolo general de un resorte, a un capacitor C.



La ley constitutiva del capacitor es una relación entre fuerza y desplazamiento.

En un extremo del resorte está fijo, mientras que el otro se mueve a la velocidad V, expresada como el cambio de X, desplazamiento del resorte. De este modo mientras nosotros hablamos de esfuerzo y flujo para el resorte, el resorte relaciona una fuerza a la integral de tiempo del flujo (desplazamiento).

En el caso lineal:

$$F = k\,X \qquad \text{o} \qquad F = (1/C)\,X$$

donde k es la constante del resorte y C es la docilidad.

Si apuntamos la media flecha del diagrama de enlace hacia C, FV positivo representa flujo de potencia hacia el capacitor.

Para los resortes y otros tipos de capacitores, el flujo de potencia representa el promedio de la energía almacenada. Puesto que potencia es el promedio en el tiempo de

$$E(t) = \int^{t} \mathcal{P}\, dt = \int^{t} FV\, dt$$

energía, podemos computar la energía por la integración de la potencia en el tiempo.

Como V dt es justamente dx esta integral puede ser convertida en una expresión de la energía en función de x:

$$E(X) = \int^{X} F\, dX$$

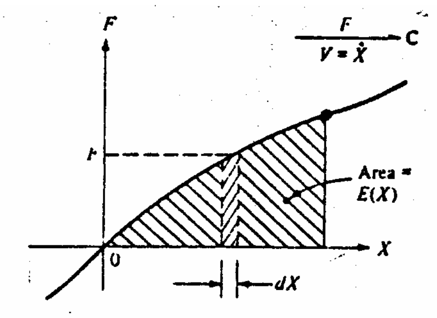
y para resortes no lineales

$$E(X) = \int^{X} F(X)\, dX$$

y para el caso lineal teniendo en cuenta que F =k X

$$E(X) = \int_{0}^{X} kX\, dX = \tfrac{1}{2}kX^{2}$$

Esta ultima expresión indica que la energía almacenada en un resorte lineal es justo ½ k X^2



La figura muestra el caso general. El incremento F dx de energía aparece como un infinitesimal de área, y de este modo E(x) corresponde al área sombreada bajo la ley constitutiva. Cuando dx es positiva un incremento adicional de energía es almacenado, el área crece. Cuando dx es negativo, un incremento de energía almacenada deja el resorte; el área decrece. De este modo, si nosotros extendemos el resorte hasta x desde 0 y después lo retornamos a cero, la energía almacenada es subsecuentemente disipada, desaparece el área.

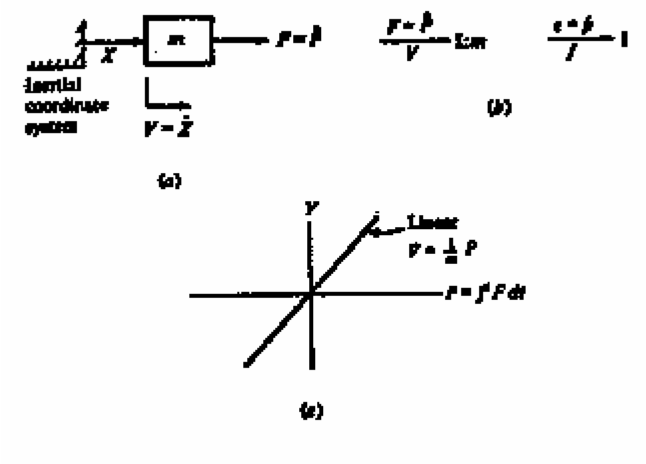
Por esta razón, un resorte mecánico representado por un C es un almacenador de energía llamada usualmente en mecánica energía potencial.

Siendo la energía potencial función del desplazamiento, denominamos a X una variable de energía para distinguirlas de las variables de potencia F y V.

Escribiendo en términos de la notación general correspondiente a los distintos tipos de energía tendremos:

$$E(q) = \int^{q} e(q)\, dq$$

El tercer y ultimo elemento pasivo a ser considerado es el elemento masa,



representado en el diagrama de enlaces por el elemento inercia. El símbolo es I. Las propiedades del elemento se observan en la figura.

La descripción convencional de una masa afirma que el valor absoluto de la aceleración de una masa es proporcional a la fuerza neta. Si la aceleración es medida en un sistema de coordenadas inercial como el de la fig., entonces V es una velocidad absoluta y su derivada segunda es una aceleración absoluta y se puede escribir:

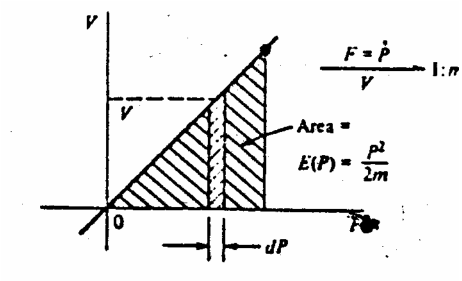
El elemento I es almacenador de energía, igual que el elemento C. Notar que el flujo de potencia de la media flecha nuevamente indica que siempre que FV es positiva, la energía está siendo almacenada por el elemento inercia.

$$E(t) = \int^{t} P\, dt = \int^{t} VF\, dt$$

$$E(P) = \int^{P} V\, dP$$

$$E(P) = \int^{P} V(P)\, dP = \int^{P} \frac{P}{m}\, dP = \frac{P^2}{2m}$$

Esta es la forma correcta para energía cinética en una masa. Esta es una función de la variable momento, lo cual explica porque una variable p, igual que una variable q, es una variable de energía. La figura muestra que la energía cinética es representable como el área debajo de la ley constitutiva del elemento I dibujada en el plano V-p. Se observa que si una masa incrementa su momento desde o hasta un cierto valor y entonces lo retrocedemos a cero otra vez, la energía almacenada desaparece. Por esto se dice que I es un elemento conservativo.



Palabras acerca de la notación: hay inevitables conflictos entre los símbolos usados en varios terrenos, es común usar F para fuerza y nosotros usamos f para flujo. Además usamos p para momento generalizado, P para momento mecánico, pero también P para potencia y eventualmente P para presión. Un símbolo también cuestionado es q, puesto que este es usado para el desplazamiento de una carga eléctrica, y flujo de calor.

Los problemas desaparecen cuando utilizamos solamente las variables generalizadas e, f, p y q, P y E.

Otra cosa a tener en cuenta es no confundir a los elementos R,C e I con sus parámetros, pueden denotar elementos no lineales y no tener entonces constantes m, k o b asociadas.

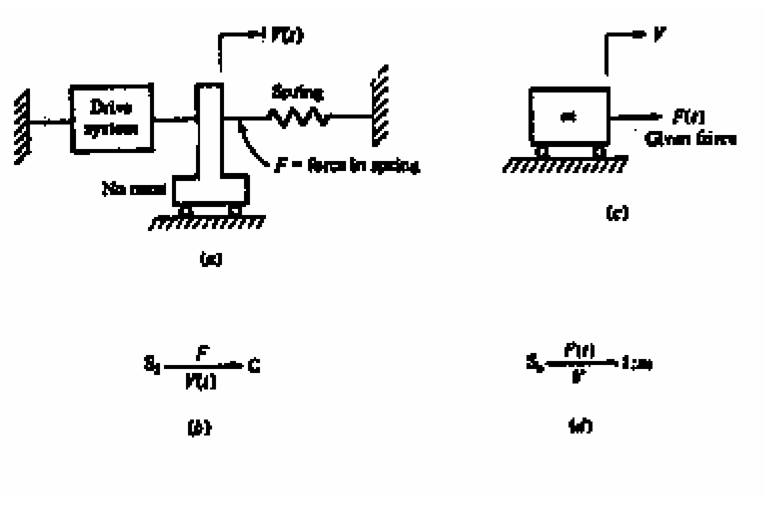
Elementos activos o fuentes.

Cuando subís a un ascensor y pulsas el botón para tu piso, esperas que la suela de tus zapatos sea sujeta a una velocidad vertical que será función del tiempo. Si la velocidad es grande notas que tu estomago responde dinámicamente. Suponemos además que el ascensor impone una velocidad a tus pies independiente de la dinámica de tu cuerpo.

Este tipo de comportamiento es modelado por una fuente de velocidad actuando sobre tus pies. Aunque tus pies reaccionen con una fuerza sobre el ascensor o fuente, la fuente de velocidad no presta atención. La fuente esta lista para absorber o proveer potencia en orden a la velocidad impuesta al elemento relacionado con ella. Por esta razón las fuentes son llamadas activas, y es claro que el ascensor actúa como una fuente de velocidad ideal cuando la reacción no es tan grande.

La figura muestra una fuente de velocidad en forma esquemática. El símbolo S viene de source (fuente) y el subíndice f indica que se trata de una fuente de flujo.

Las fuentes tienen frecuentemente medias flechas apuntando en sentido contrario al símbolo S, porque la fuente es quien dá la potencia y el elemento pasivo es quien la absorbe. Con una fuente de velocidad la potencia en algún instante puede ser suministrada o absorbida dependiendo del valor de la reacción de la fuerza en dicho instante.



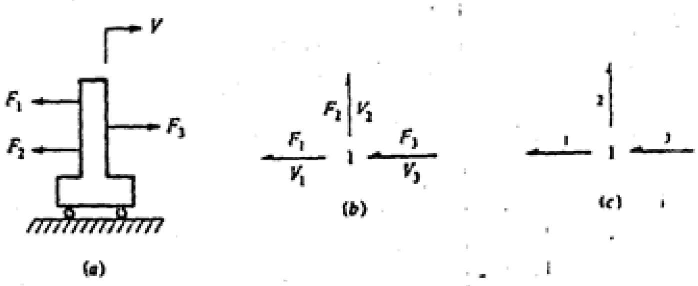
La figura de la derecha muestra el otro tipo de fuente, la fuente de esfuerzo, como se da que F y V son positivos la potencia esta siendo suministrada por la fuente Se y absorbida por la masa, por lo tanto la media flecha apunta hacia I. Recordar que es posible que FV sea negativo en algún instante, esto indica que la potencia esta fluyendo en la dirección opuesta a la media flecha en tal instante (las medias flechas indican el sentido de positividad de potencia).

Aunque las fuentes son comunes en todos los campos, las fuentes de esfuerzo y flujo son sumamente idealizadas en la mayoría de los casos. Las fuentes físicas pueden ser modeladas ellas mismas usando fuentes ideales y otros elementos de modo que se pongan de manifiesto el comportamiento no ideal. Un caso en sistemas dinámicos en el cual una fuente ideal es un buen modelo por si mismo es la fuerza de gravedad.

Elementos estructurales.

Enlace tipo 1.

Este símbolo representa velocidad común para varias conexiones. La figura muestra un carro supuesto sin masa, tres elementos son agregados a este. La figura es realmente un diagrama de cuerpo libre y las tres fuerzas nacen de elementos conectados tal como resortes, amortiguadores y elementos de masa. El símbolo del diagrama de enlace para este carro es ‘1’ con tres enlaces conectados, por ejemplo:



Las leyes constitutivas para este elemento son simples pero muy útiles. Las velocidades son idénticas, así partimos que puede ser escrito como:

$$V1=V2=V3=V$$

donde V es la velocidad común. La otra parte de la ley constitutiva proviene de balancear fuerzas sobre el diagrama, el resultado es:

$$F3-F1-F2=0$$

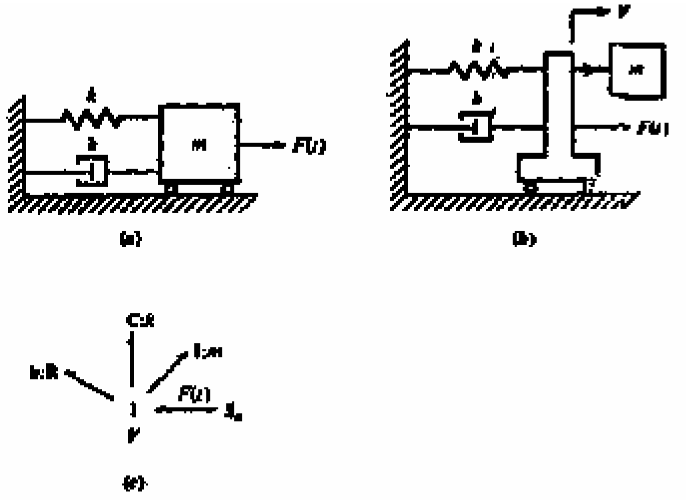
La cual es verdadera porque el carro no tiene masa. La especial naturaleza del enlace tipo 1 tiene que ver con la conservación de potencia. Puesto que todas las velocidades son las mismas, si multiplicamos los términos de la ecuación anterior por V obtenemos:

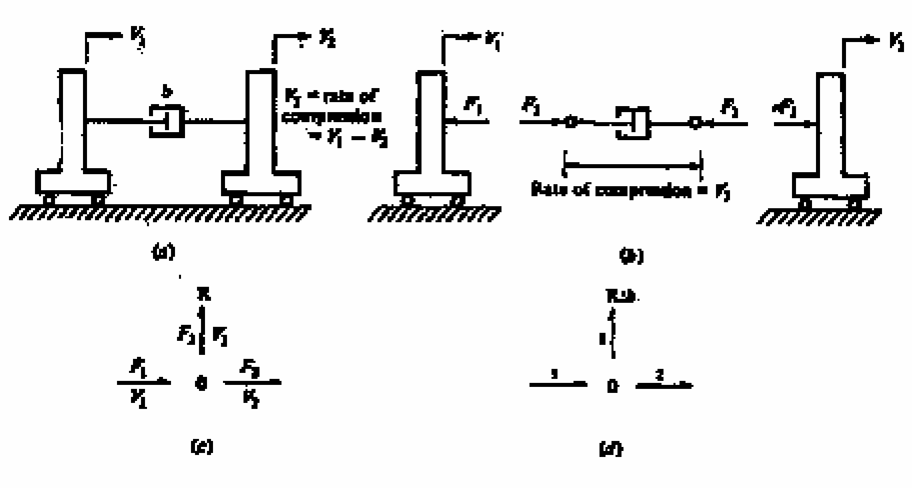
$$P3-P1-P2=0$$

Estos signos en la ley de potencia son reflejados en las medias flechas.

Ejemplo.

Enlace tipo 0.



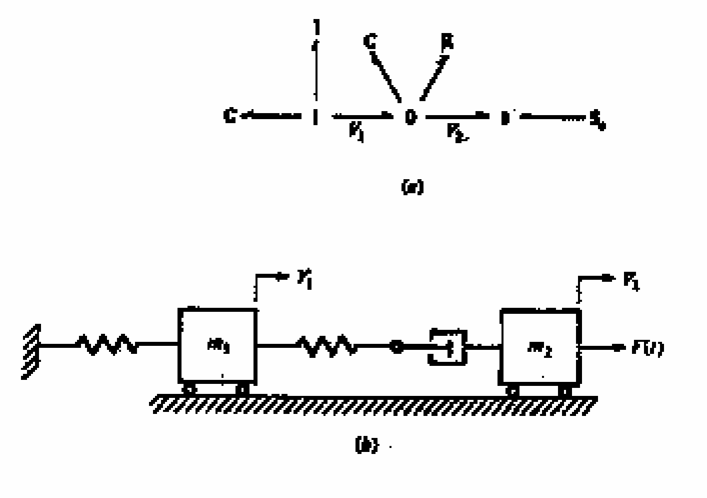


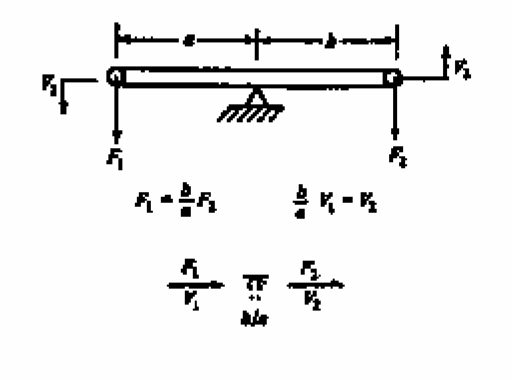
El enlace tipo 0 es justo el enlace dual del tipo1, en el sentido que los roles de esfuerzo y flujo se invierten. Un enlace tipo 0 tiene un esfuerzo común que aparece sobre todos los enlaces y una suma algebraica de los flujos. El enlace tipo 0 también conserva potencia.

P3 = P1 – P2

F1 = F2 = F3 = F   V3 = V1 – V2

Ejemplo:


I
C
R
C
I
0
1
S_e
V_1
V_2
(a)
V_1
V_2
m_1
m_2
$F(t)$
(b)

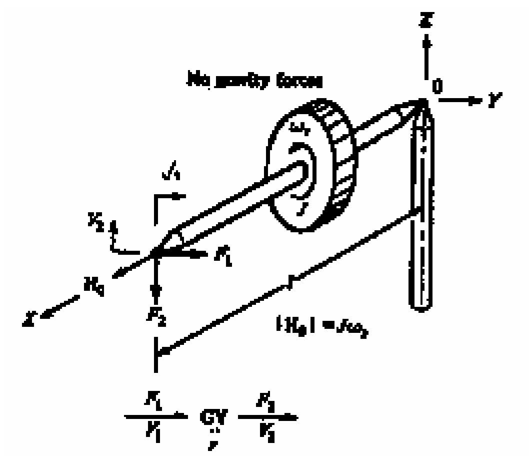

a
b
V_1
V_2
F_1
F_2
$F_1 = \frac{b}{a} F_2$
$\frac{b}{a} V_1 = V_2$
$\frac{F_1}{V_1}$
TF
b/a
$\frac{F_2}{V_2}$

Elemento ideal de dos puertas.

Uno de los elementos ideales de 2 puertas es llamado transformador (Tf), también conservan potencia. En sistemas mecánicos una variedad de artefactos son representados en forma idealizada como un Tf incluyendo el rígido y sin masa subibaja mostrado en la figura. El Tf tiene dos puertas y los esfuerzos en las dos puertas son proporcionales entre si, como lo son los también los flujos.

Otro, también conservador de potencia es el llamado girador (Gy).

Ejemplo:



F1 = r V2

r V1 = F2

F1 l = Moz =|Ho| = Jws V2/l => F1 = Jws/l^2 V2

Análogamente F2 = Jws/l^2 V1

Entonces el modulo del girador para este ejemplo es r = Jws/l^2

La diferencia entre transformador y girador es que el Tf relaciona esfuerzo con esfuerzo y flujo con flujo, mientras que los giradores relacionan el esfuerzo de una puerta con el flujo de la otra.

Método sistemático para modelizar sistemas mecánicos.

1-Asignar las velocidades absolutas que hay en el sistema, tanto internas como externas. Por cada velocidad establecer un vínculo tipo 1 representativo.

2- Asignar velocidades relativas (o dependientes o diferenciales) de las absolutas relevantes o pertinentes. Y establecer el vínculo tipo 1 representativo.

3-Vincular las velocidades usando las relaciones matemáticas definidas entre ellas.

4-Colgar los elementos (I, C y R) que correspondan a cada velocidad colocando el flujo de potencia que corresponda.

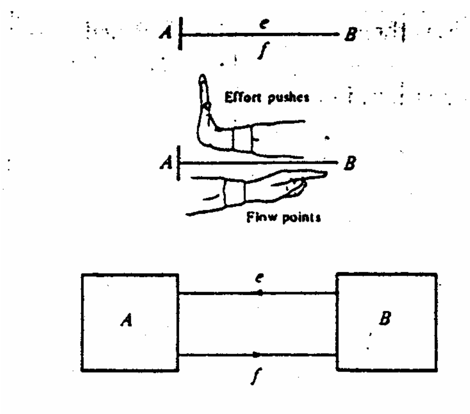
5-Establecer convención de positividad del flujo de potencia.

6-Simplificar vínculos pasantes.

Causalidad.

Por ultimo para organizar las leyes constitutivas de los componentes como ecuaciones diferenciales necesitamos tomar decisiones de causa y efecto. Es decir asignar causalidad al modelo, el cual se trabajo hasta el momento como acausal. Este es otro concepto importante acerca de los BGs, los sistemas o subsistemas físicos procesan energía son acausales. La causalidad es necesaria para procesar matemáticamente señales(fuerzas, velocidades, desplazamientos, etc.). Al poner causalidad lo que hago es definir matemáticamente para cada subsistema cuales son las entradas y cuales son las salidas, es decir armo un esquema de computo ordeno y acoplo las ecuaciones estructurales y constitutivas.

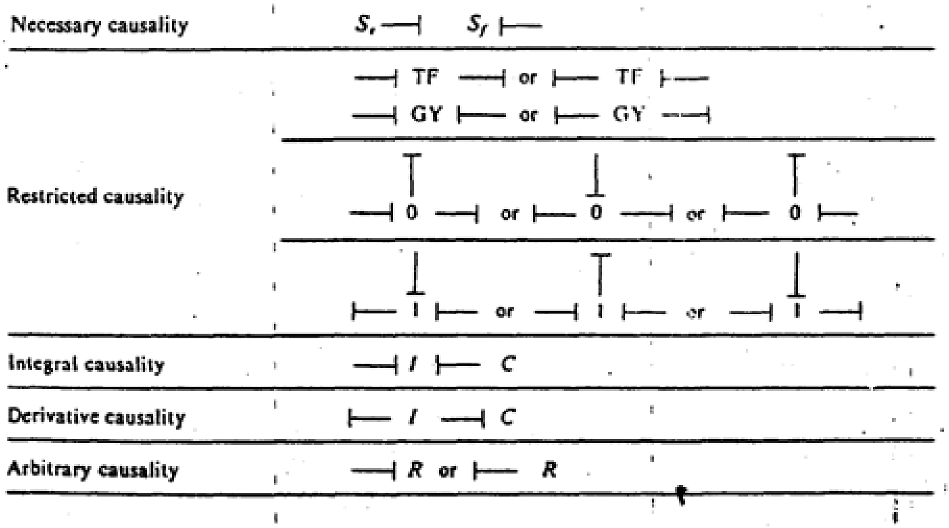
El procedimiento consiste en poner en el diagrama una barra causal por cada enlace, del lado donde se calcula el flujo o lo que es lo mismo donde se impone el esfuerzo. No



confundir la barra causal con el sentido de positividad, este esta dado por la semiflecha.

De este modo las relaciones causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas para cada subsistema.

El procedimiento de causalización se empieza por las fuentes, es una causalidad necesaria dada por la definición de las fuentes. Lo mismo para los Tf y los Gy.



El vinculo 1 solo puede tener un enlace que le imponga el flujo por definición (velocidad común o única). El vinculo 0 solo puede tener un enlace que le imponga el esfuerzo por definición (esfuerzo como o único). Por esto se dice que estos enlaces tienen causalidad restringida.

Los elementos tipo I y C se dice que tienen causalidad preferencial (ver tabla) siempre es conveniente asignarles en lo posible causalidades integrales, las cuales permiten establecer condiciones iniciales.

Para los elementos tipo R la causalidad es arbitraria.

Procedimiento

1- Elegir alguna Se o Sf y asignar a esta la causalidad requerida. Inmediatamente extender la causalidad a todo enlace tipo 0,1, Tf y Gy cuya causalidad haya quedado restringida a una única posibilidad.

2- Repetir el paso anterior hasta que todas las fuentes tengan su causalidad asignada.

3- Elegir algún C o I y asignarle causalidad integral. Extender la asignación todo lo posible.

4-Repetir el paso hasta que todo C e I tengan su causalidad asignada.

5-Elegir una R y darle una causalidad arbitraría. Extender la causalidad todo lo posible.

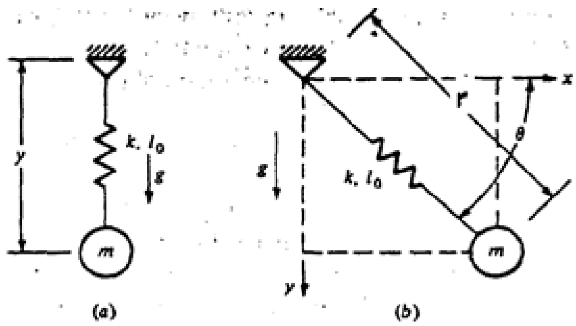
6-Repetir el paso hasta que todos los elementos R tengan su causalidad asignada.

Sistemas mecánicos generales.

Los sistemas mecánicos tienen una peculiaridad no presente en otros sistemas físicos. Sistemas mecánicos generales tienen leyes de conexión influenciadas por la geometría, pero muchos otros sistemas físicos tienen leyes de conexión basados sólo en la topología. Esto significa que en los diagramas de circuitos eléctricos (y sus diagramas de enlaces) no nos preocupamos por los ángulos con que concurren los conductores en un nudo o de la longitud de los cables.

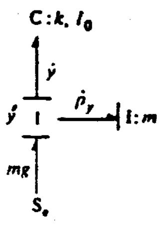
En un sistema mecánico, sin embargo, cuando uno balancea fuerzas sobre una masa, el ángulo de los vectores fuerza es importante y, para sistemas deformables, los ángulos generalmente cambian con el movimiento del sistema. De este modo no alcanza con saber que varios resortes están conectados a una masa, nosotros debemos además conocer la geometría instantánea del sistema.

Sistemas mecánicos exhiben geometría no lineal debido a estos efectos. Puesto que los diagramas de enlaces son ellos mismos entidades topológicas, puede resultar sorprendente que relaciones geométricas pueden ser incorporadas en ellos, pero esto es posible cuando el transformador con modulo constante es generalizado en un

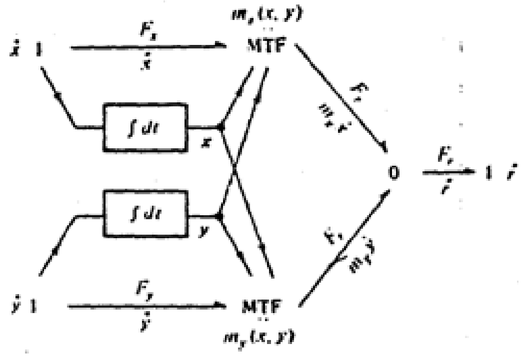


transformador modulado, donde los módulos varían con el desplazamiento.

La figura muestra como el mismo sistema algunas veces puede actuar como un simple sistema lineal y en otros casos exhibir la típica complejidad que hace de la mecánica una ciencia interesante.

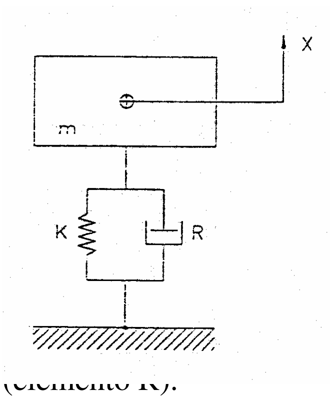


(a)



Modelado de sistemas de un grado de libertad. Ejemplos.

Ejemplo de un sistema masa, resorte y amortiguador.



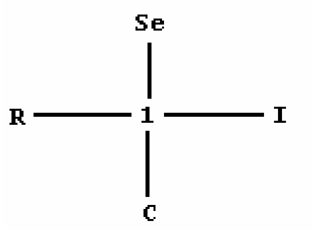
Datos: masa = 4000KG.

Constante del resorte K = 157913,4 N /m.

nstante del amortiguador R = 12566,36 N s/m.

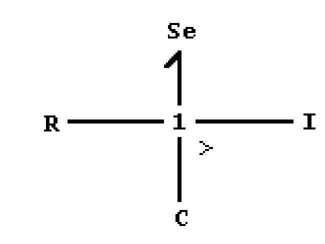
tema esta compuesto de una masa (elemento I) y su peso nto Se), de un resorte (elemento C) y de un amortiguador (elemento R).

El primer paso para el modelado en BGs es determinar las velocidades absolutas del sistema, en este caso hay una sola y es la de la masa m. Observar además que dado que el piso se considera estático, en este sistema no hay ninguna velocidad relativa y por lo tanto los elementos C (resorte) y R (amortiguador) trabajan a la misma velocidad que la masa m. Con lo cual el modelo en BGs quedaría de la siguiente forma:

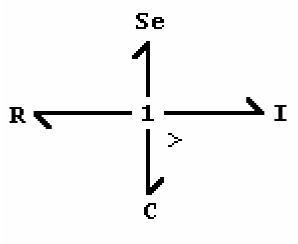


El próximo paso es asignar el sentido de positividad de cada elemento del modelo. Dado que los elementos pueden estar entregando o consumiendo potencia, asignar el sentido de positividad de cada elemento es justamente establecer en que momento el elemento va a entregar o a consumir potencia de acuerdo con algún sistema de referencia.

Por ejemplo en este caso el sistema de referencia indica que la velocidad de la masa es positiva para arriba, pero el peso (representado con el elemento 'Se') es de sino contrario. En conclusión el elemento 'Se' va a estar consumiendo potencia cuando la velocidad de la masa sea positiva y va a estar entregando potencia cuando la velocidad de la masa sea negativa, esto es indicado en un BGs de la siguiente forma:

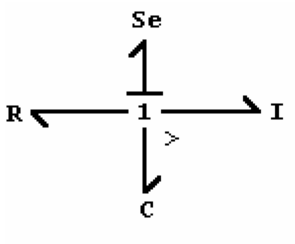


Una convención utilizada es que a los elementos ‘R’, ‘I’ y ‘C’, se le asigne un sentido positivo cuando consumen potencia, con lo cual el BGs quedaría de la siguiente forma:



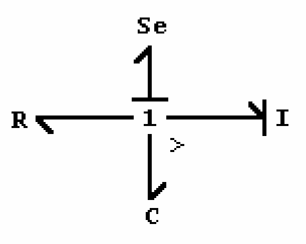
El elemento ‘R’ siempre va a estar consumiendo potencia, pero esta convención de positividad no indica que los elementos ‘I’ y ‘C’ siempre estén consumiendo potencia, por ejemplo el elemento ‘I’ va a entregar potencia cuando la aceleración de la masa sea de signo opuesto a la velocidad y el elemento ‘C’ va a entregar potencia cuando este estirado y comprimiéndose o cuando este comprimido y estirándose.

Lo siguiente es la asignación de causalidad, como habíamos visto primero se empieza por las fuentes, en este ejemplo hay una y es una fuente que impone el esfuerzo:

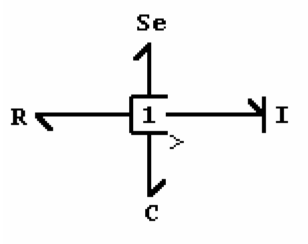


La causalidad en este caso no se puede propagar a los demás elementos porque no hay una única posibilidad (recordemos que al elemento tipo ‘1’ un solo elemento le puede imponer el flujo).

El próximo paso es elegir un elemento tipo ‘I’ o ‘C’ y asignarle causalidad integral, si elegimos el tipo ‘I’ la causalidad sería:

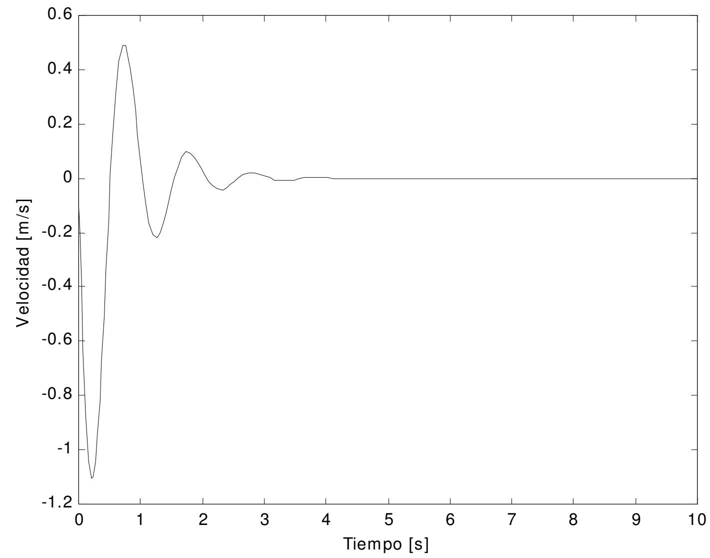


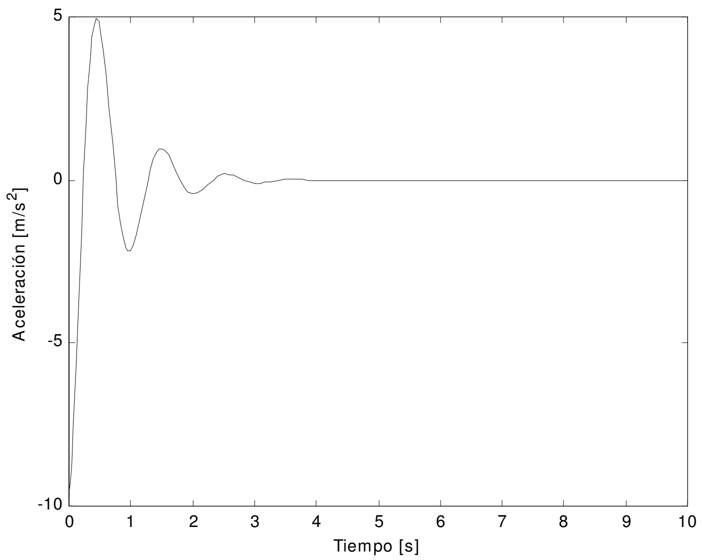
Ahora sí para la causalidad de los restantes elementos hay una sola posibilidad ya que al elemento tipo ‘1’ un solo elemento le debe imponer el flujo (en este ejemplo el elemento ‘I’), entonces lo que se hace es propagarla, obteniéndose el BGs completo:

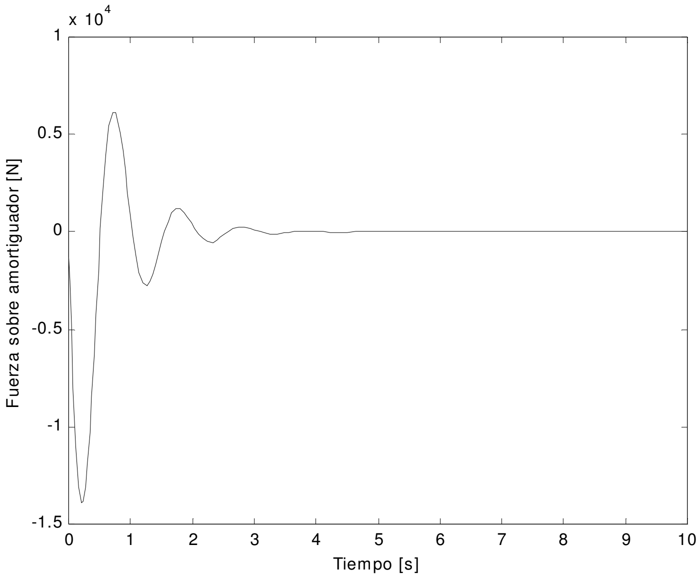


De este BGs ya pueden obtenerse las ecuaciones de estado del sistema o puede obtenerse también el diagrama de bloques (modelo matemático) de forma sistematizada. El software Power Dynamo hace este pasaje directamente a

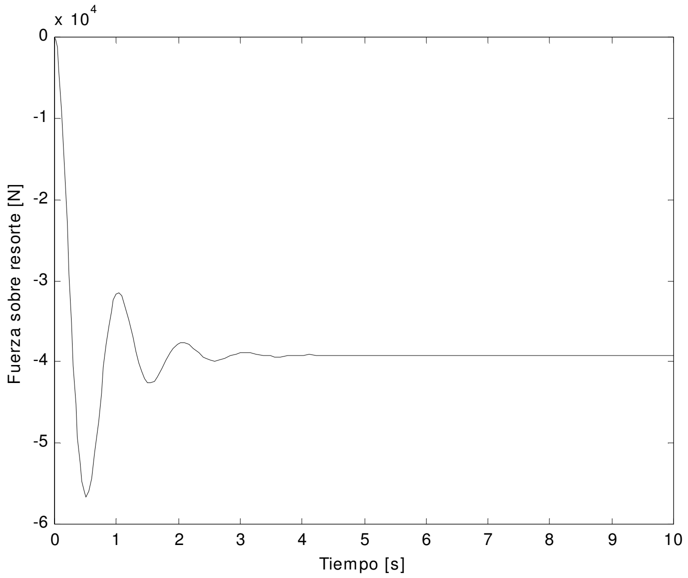
Simulink de Matlab (diagrama de bloques). Se realizo la simulación resolviendo el modelo por el método ODE45 de Matlab con una tolerancia relativa de 1e-6 durante un tiempo de 10s, obteniendo los siguientes resultados:



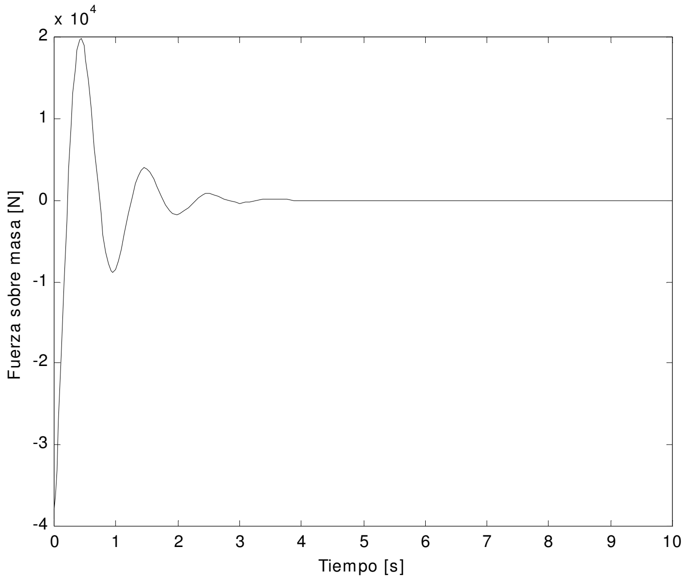




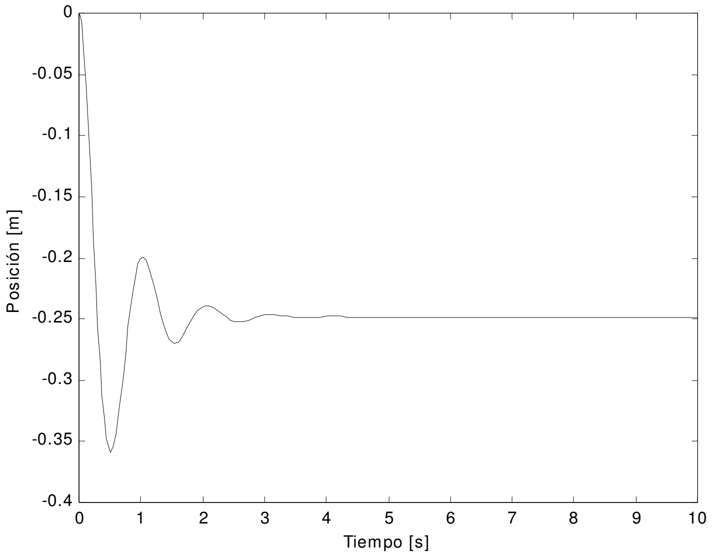
x 10^4
Fuerza sobre amortiguador [N]
Tiempo [s]



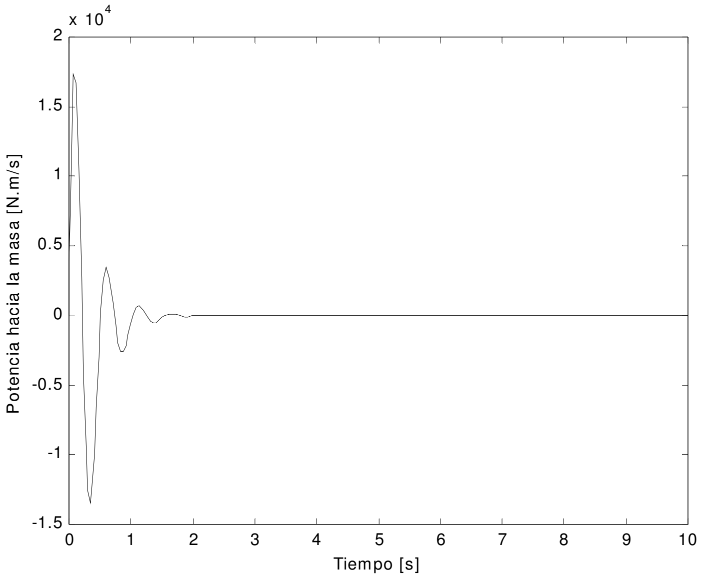
x 10^4
Fuerza sobre resorte [N]
Tiempo [s]



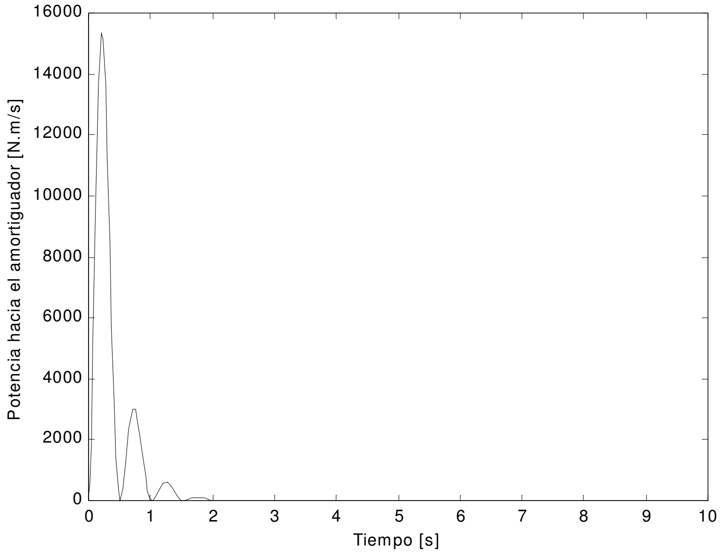
x 10^4
Fuerza sobre masa [N]
Tiempo [s]



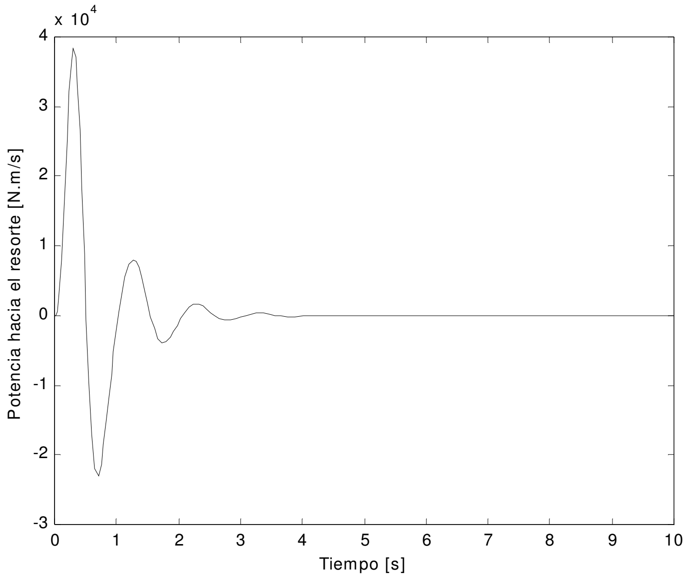
Para que pueda entenderse como fluye la potencia hacia cada elemento, lo que puede hacerse es multiplicar la fuerza sobre cada elemento por la velocidad (en este caso común a todos), obteniendo:



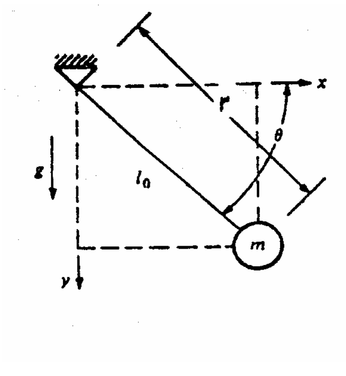
En la grafica anterior puede notarse que el elemento 'I' absorbe potencia cuando la velocidad y aceleración tienen el mismo signo y entrega potencia al resto del sistema cuando tienen signo opuesto. En la siguiente puede observarse que el elemento 'R' siempre esta consumiendo potencia.



Por ultimo se ve como el elemento ‘C’ absorbe potencia cuando está comprimido y comprimiéndose o cuando está estirado y estirándose; y que entrega potencia al resto del sistema cuando está comprimido y estirándose o cuando está estirado y comprimiéndose.



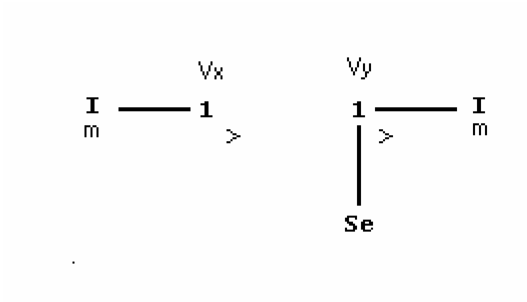
Ejemplo de un péndulo simple.



Datos: masa = 5Kg

Lo = 1m

El sistema está compuesto por una masa (elemento 'I') y su peso (elemento 'Se'). La velocidad de la masa puede descomponerse en dos velocidades Vx y Vy, pero observar que el elemento 'Se' siempre trabaja verticalmente (trabaja transfiriendo potencia al sistema a la velocidad Vy). Con lo que el BGs del sistema quedaría hasta ahora así:



Lo próximo es encontrar alguna relación que vincule las velocidades Vx y Vy para poder resolver el sistema.

$$V_x \cos\alpha + V_y \operatorname{sen}\alpha = V_r \text{ para cada } \alpha$$

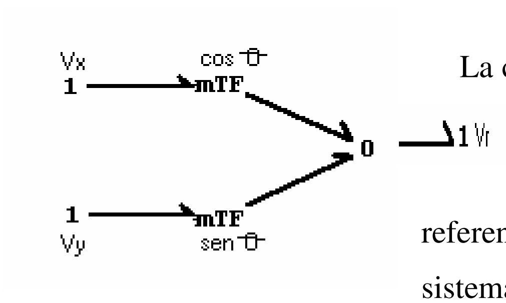
(es decir para cada instante de tiempo)

Notar que en la dirección de r la velocidad de la masa m es cero (considerando que el cable que sostiene la masa m tiene rigidez infinita, es indeformable) pero esto es solo un caso particular, el BGs es mas general y el cable que sostiene la masa se modela como un elemento 'C' (resorte), para este caso particular con rigidez infinita.

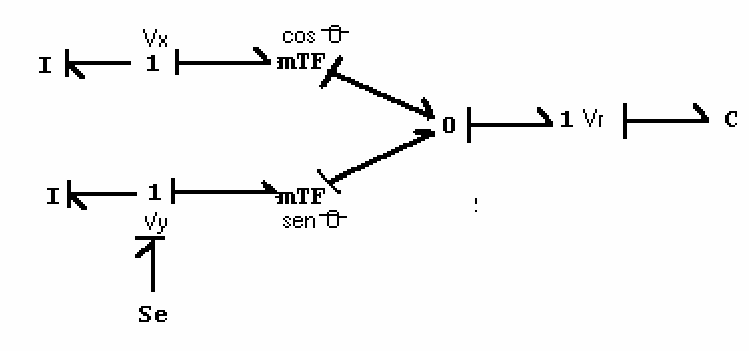
Si Fr es la fuerza en la dirección de r (la del cable), se sabe que:

$$F_r \cos\alpha = F_x \qquad \text{y} \qquad F_r \operatorname{sen}\alpha = F_y$$

Recordando que el vínculo '0' combinado con los elementos 'Tf' representa justamente las relaciones matemáticas anteriores de velocidades y fuerzas (la fuerza fluye en un sentido y la velocidad o flujo en otro), la estructura del sistema en BGs es la siguiente:



La convención de positividad se corresponde con las expresiones matemáticas anteriores, las cuales están en correspondencia con el sistema de referencia del esquema del péndulo. El BGs del sistema completo, colgando los elementos y aplicando causalidad queda de la siguiente forma:



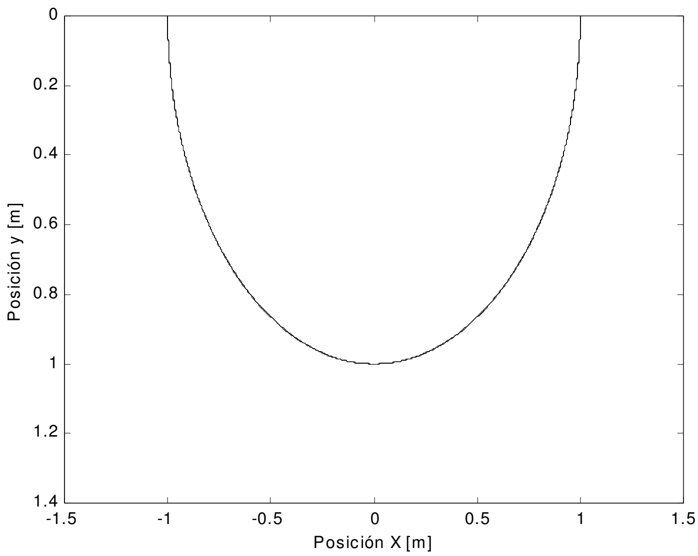
Hay dos vínculos pasantes que pueden simplificarse el ‘1Vr’ y el ‘1Vx’. Solo simplificaremos el vinculo ‘1Vr’ porque el valor del vinculo ‘1Vx’, como se verá a continuación es necesario en este caso para resolver el sistema.

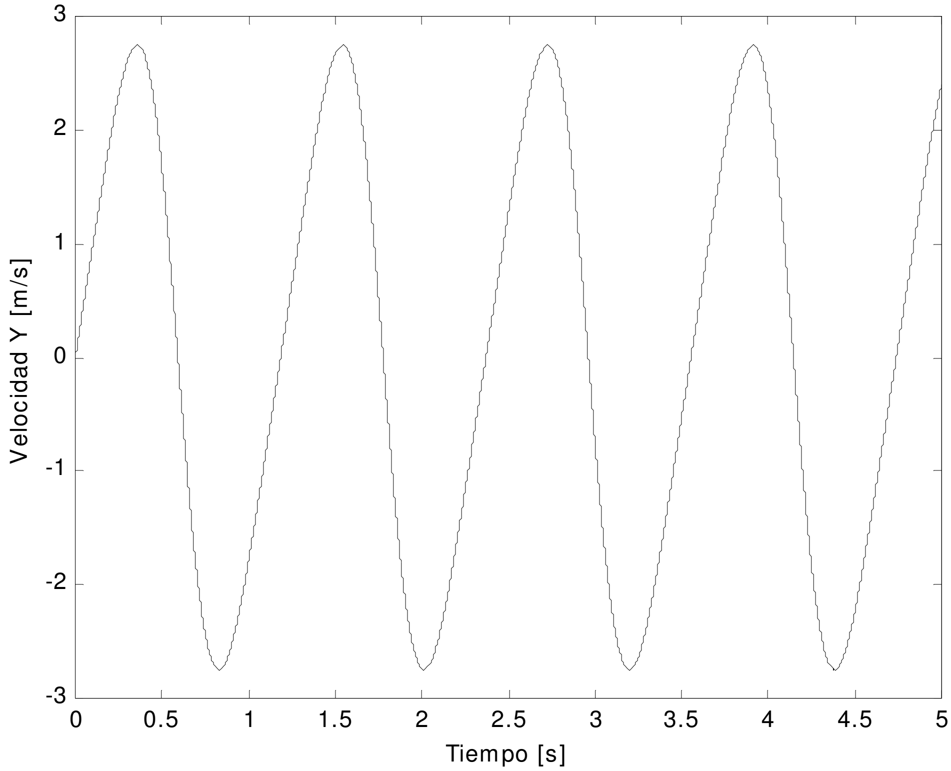
Para poder resolver el sistema hay que conocer el coseno y el seno de α en cada instante, para esto es conveniente escribirlo en función de las coordenadas x e y.

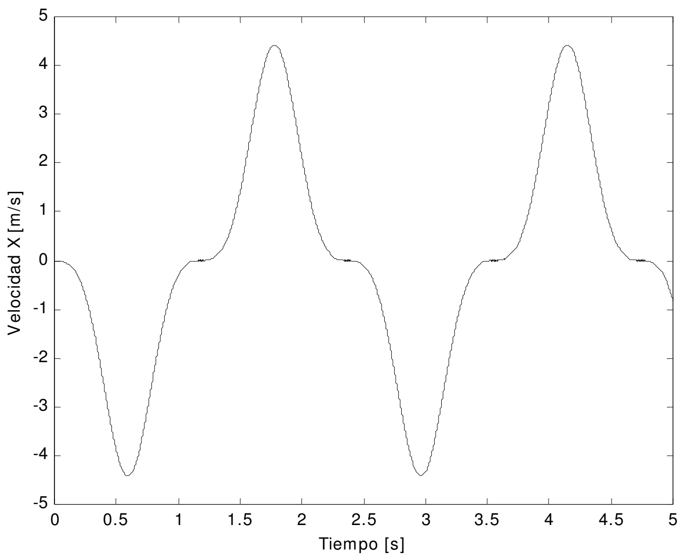
cosα = x / (x^2+y^2)^(1/2)

senα = y / (x^2+y^2)^(1/2)

Los valores de x e y pueden conocerse para cada instante integrando los valores de Vx y de Vy respectivamente:

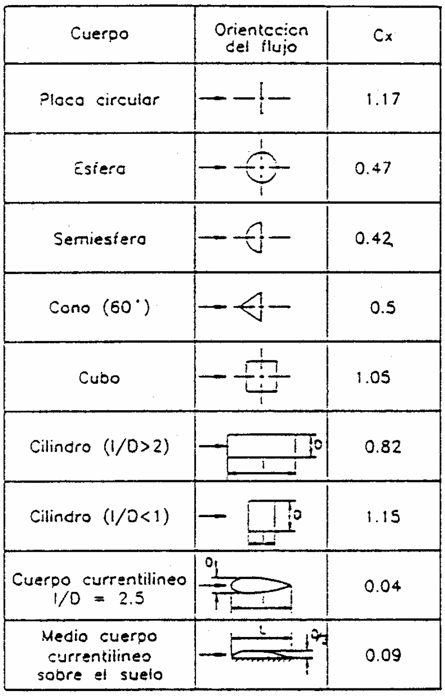

Posición y [m]
Posición X [m]


Velocidad Y [m/s]
Tiempo [s]


Velocidad X [m/s]
Tiempo [s]
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Ejemplo de objeto en caída libre con resistencia aerodinámica.

Ahora vamos a estudiar un objeto en caída libre con resistencia aerodinámica, en este caso una esfera de masa = 3kg y diámetro = 0.5m.



Cuerpo	Orientacion del flujo	Cx
Placa circular		1.17
Esfera		0.47
Semiesfera		0.42
Cono (60°)		0.5
Cubo		1.05
Cilindro (l/D>2)		0.82
Cilindro (l/D<1)		1.15
Cuerpo currentilineo l/D = 2.5		0.04
Medio cuerpo currentilineo sobre el suelo		0.09

Entonces el sistema está compuesto por un elemento 'I' (masa), un elemento 'Se' (el peso de la masa) y un elemento 'R' (la resistencia aerodinámica que como veremos no es lineal).

La fuerza de resistencia aerodinámica puede expresarse en función de un coeficiente aerod. (ver tabla).

Fa = C ½ ρ V^2 A

C: Coef. Aerodinámico

½ ρ V^2 : Presión dinámica

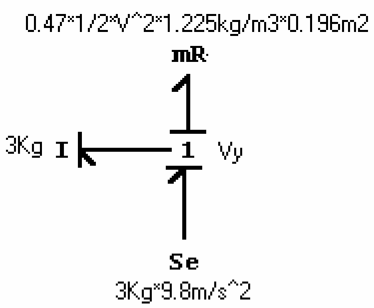
A: Area frontal.

ρ: Densidad del aire.

De tabla para este caso C = 0.47

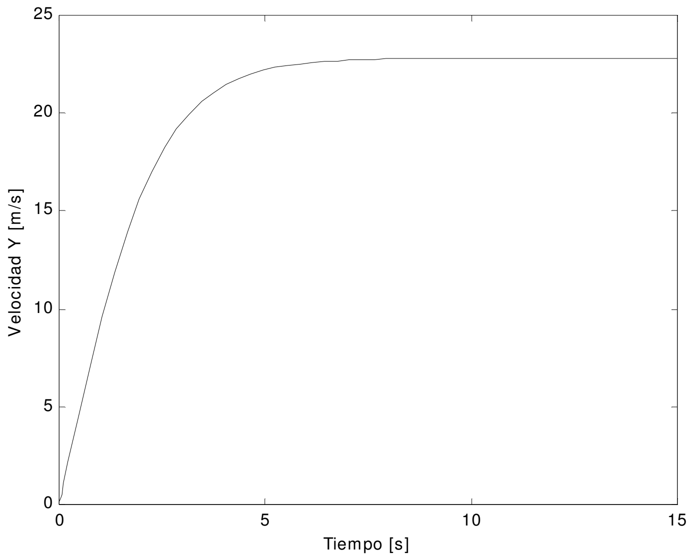
El área frontal = 0.196m^2

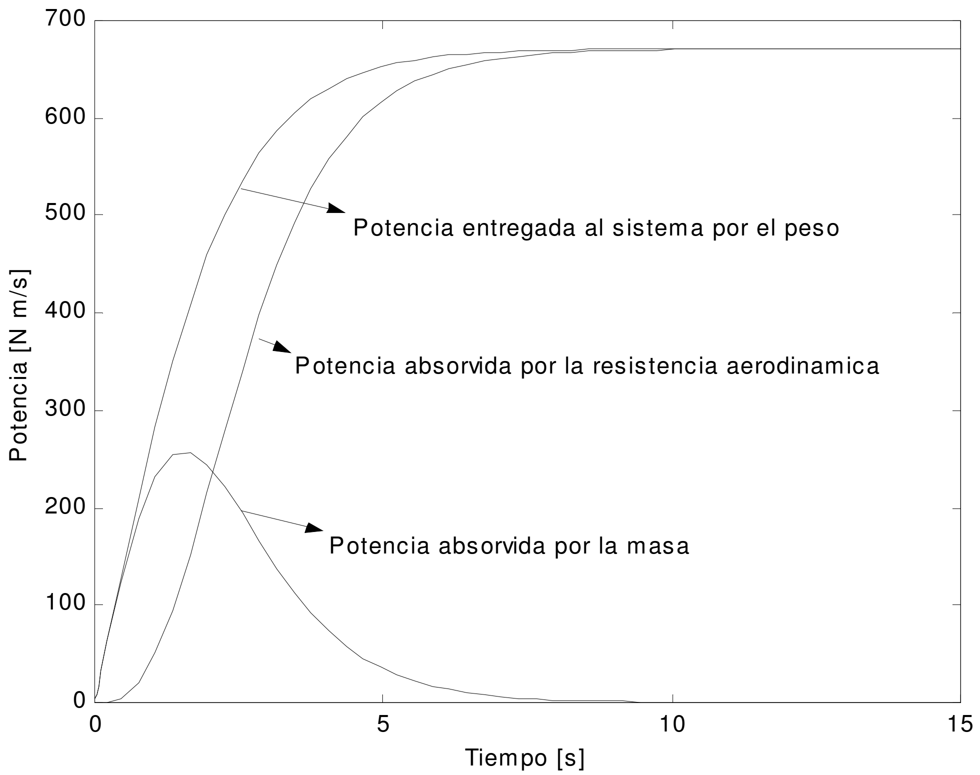
ρ = 1.225 kg/m^3



Por lo tanto la resistencia aerodinámica puede modelarse como un 'R' función de un coeficiente por la velocidad al cuadrado.

Tomando el sistema de referencia positivo para abajo el BGs queda de la siguiente forma.





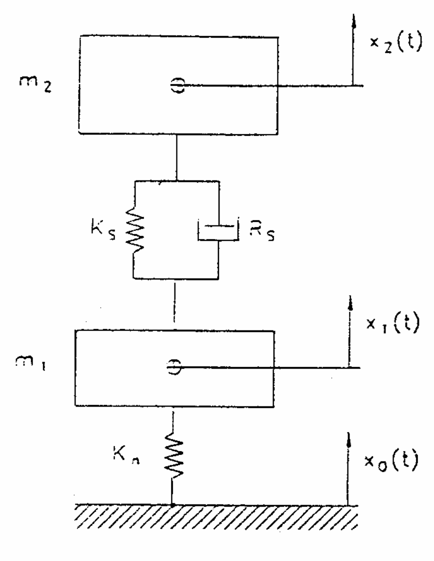
Del grafico se desprenden algunas conclusiones que pueden parecer obvias pero son interesantes de repasar porque hacen a la esencia de este método de modelado.

Observar que al principio cuando la potencia disipada por la resistencia aerodinámica es baja, como la sumatoria de potencia en el sistema es cero, la potencia entregada al sistema por el peso la absorbe la masa y esta la utiliza para aumentar su velocidad, es decir para acelerarse.

Pero cuando la potencia disipada por la resistencia aerodinámica iguala a la potencia entregada al sistema por la fuerza peso, la aceleración de la masa se hace cero es decir se mueve con movimiento uniforme.

Modelado de sistemas de dos grados de libertad. Ejemplo.

Ejemplo de un cuarto de vehículo.



El modelo inicial que se planteaba para el análisis de la suspensión, era de 1 G.D.L. y se conseguía despreciando la masa no suspendida y no considerando la rigidez del neumático.

Cuando se considera la masa no suspendida y la rigidez del neumático es necesario utilizar el modelo representado en la figura, que correspondería a un cuarto del vehículo.

Datos: masa m2 = 4000KG.

Constante del resorte Ks = 157913,4 N /m.

Constante del amortiguador Rs = 12566,36 N s/m.

masa m1 = 200KG

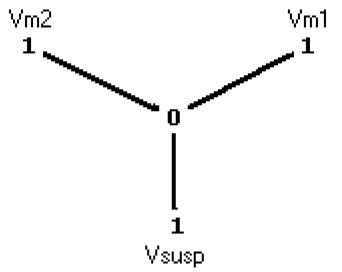
Rigidez del neumático Kn = 1207000 N /m

El sistema está compuesto por dos masas m1 y m2 (dos elementos ‘I’) y sus respectivos pesos (dos elementos ‘Se’), por un resorte de suspensión (elemento C), por un amortiguador (elemento R) y por la rigidez del neumático (elemento ‘C’).

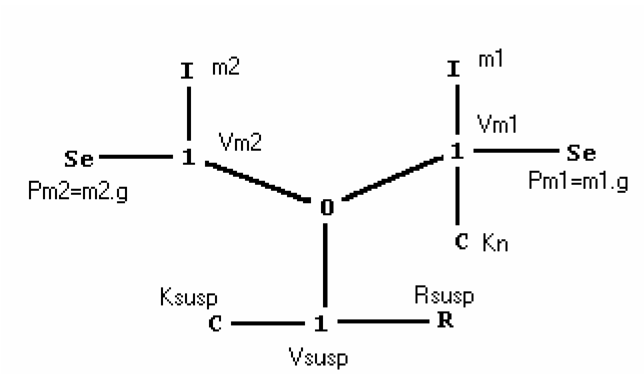
Para un primer análisis supondremos que el piso es estático.

El primer paso es determinar las velocidades absolutas del sistema, en este caso son dos, la velocidad de la masa m1 y la de la masa m2. Observar que el sistema de suspensión no trabaja ni a la velocidad de la masa m1, ni a la de la masa m2, trabaja a una velocidad relativa de las anteriores que se puede definir como Vsusp. = Vm2 – Vm1.

Ahora hay que encontrar una relación entre las tres velocidades anteriores, en este punto es importante darse cuenta que la relación buscada ya estuvo implícita cuando definimos Vsusp. y es justamente un vinculo ‘0’.



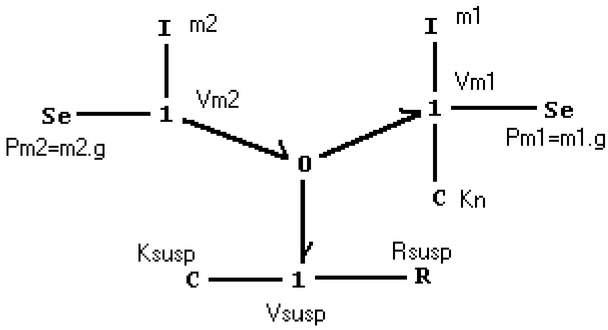
Lo próximo es ‘colgar’ en cada velocidad (vinculo ‘1’) los elementos componentes del sistema, observar que como el piso se considera estático el resorte equivalente a la rigidez del neumático trabaja a la misma velocidad que la masa m1.

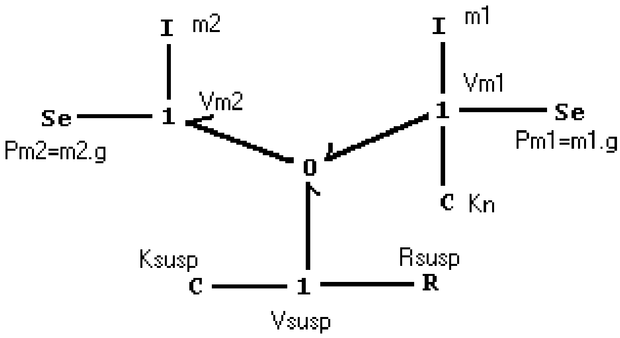


Ahora hay que aplicar el sentido de positividad como ya vimos en ejemplos anteriores, lo nuevo en este ejemplo es aplicar el sentido de positividad para el vinculo ‘o’, es decir la relación de positividad entre las velocidades, una manera es teniendo en cuenta la relación que define la velocidad Vsusp. = Vm2 – Vm1 como el ‘0’ indica que lo que está vinculado a él tiene igual fuerza en cada instante, multiplicando por está fuerza la relación anterior y distribuyendo (F.V=P) queda: Psusp. = Pm2 – Pm1, esto es lo mismo que

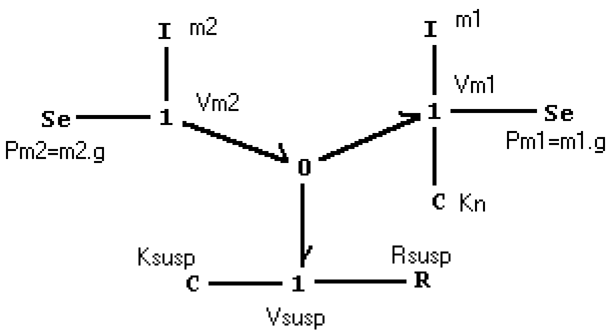
0 = Pm2 - Pm1 – Psusp y que Psusp. – Pm2 + Pm1 = 0

el problema es cual elijo, si elijo el primero o el segundo.

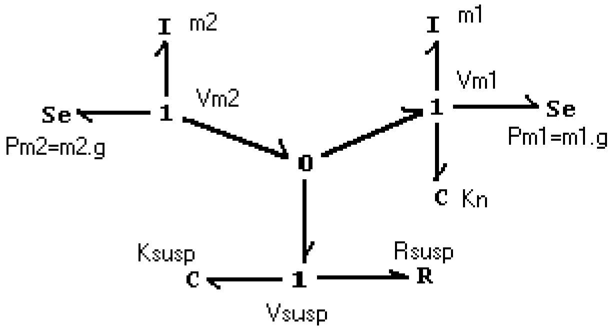




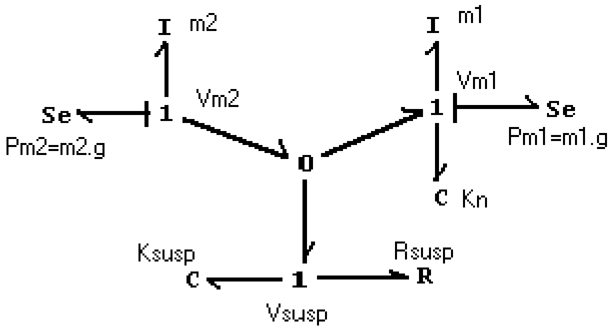
La que corresponde elegir depende del sistema de referencia, y se puede pensar de la siguiente manera: en nuestro ejemplo nosotros elegimos el sistema de referencia positivo para arriba, tanto para fuerzas como para velocidades. Pensemos que sucede en la masa m2 (la suspendida) en el instante inicial, suponiendo que los resortes no se encuentren inicialmente cargados, la masa m2 va a descender, es decir va a tener una fuerza resultante hacia abajo y va a adoptar una velocidad negativa. Esto es la mismo que pensar que va a entregar potencia al resto del sistema. Esto ya me define que la semiflecha que va desde el vínculo '1Vm2' al vínculo '0' se va a dirigir hacia el vínculo '0', lo cual me obliga a elegir la primera alternativa:



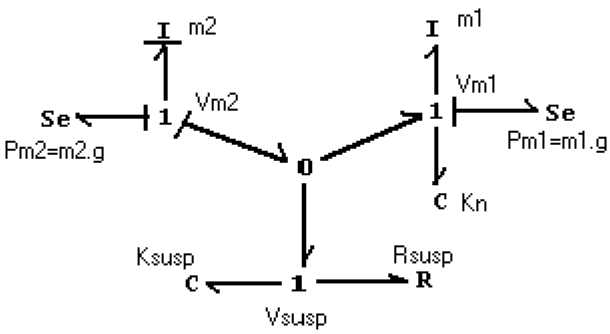
Aplicando el sentido de positividad al resto del sistema como ya vimos en ejemplos anteriores:



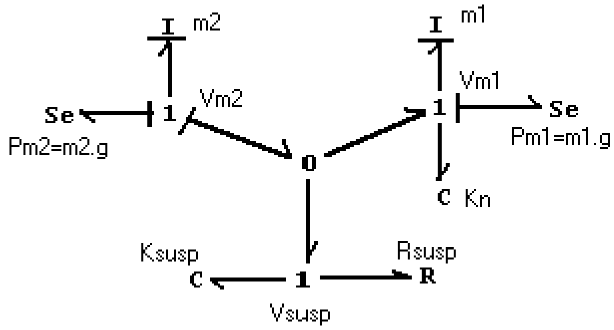
Lo siguiente es determinar la causalidad, para esto se empieza por las fuentes. Puedo empezar por una de las dos, le aplico causalidad, como imponen el esfuerzo y como están vinculadas a un '1', al no quedar una única posibilidad para el resto de los enlaces no puedo propagar la causalidad, queda de la siguiente forma:



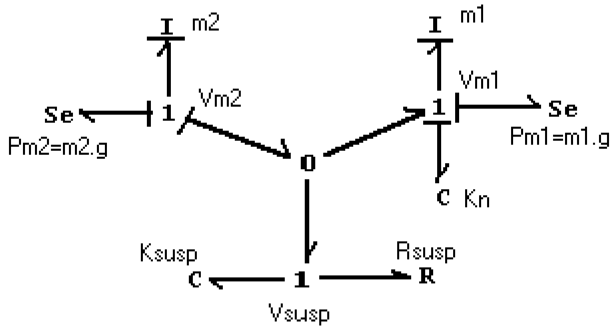
Como ya agote todas las fuentes del sistema, continúo con algún 'I' o algún 'C' y le aplico causalidad integral por ejemplo el 'I'm2, pero al aplicar causalidad al enlace entre 'I'm2 y '1'Vm2 el enlace entre '1'Vm2 y '0' tiene una sola causalidad posible:



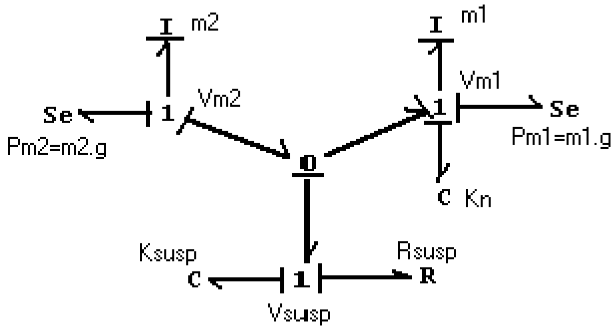
Como no puedo seguir propagando, elijo otro por ejemplo el 'I'm1 pero ahora puedo seguir propagando causalidad:

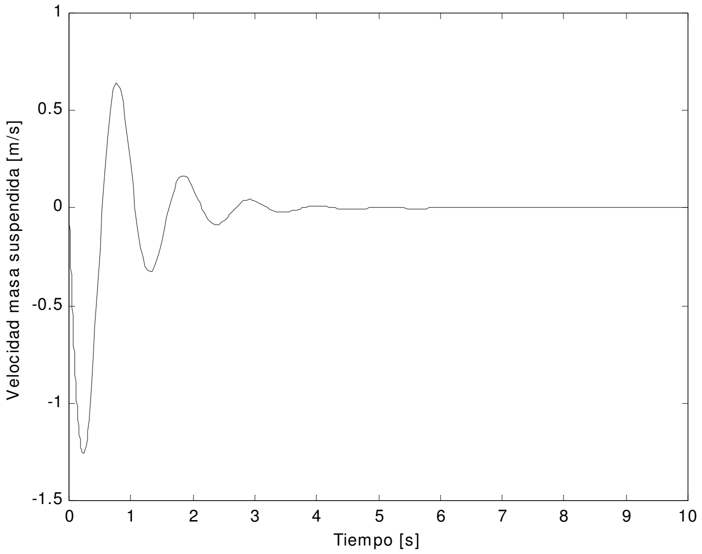


Si continuo propagando:

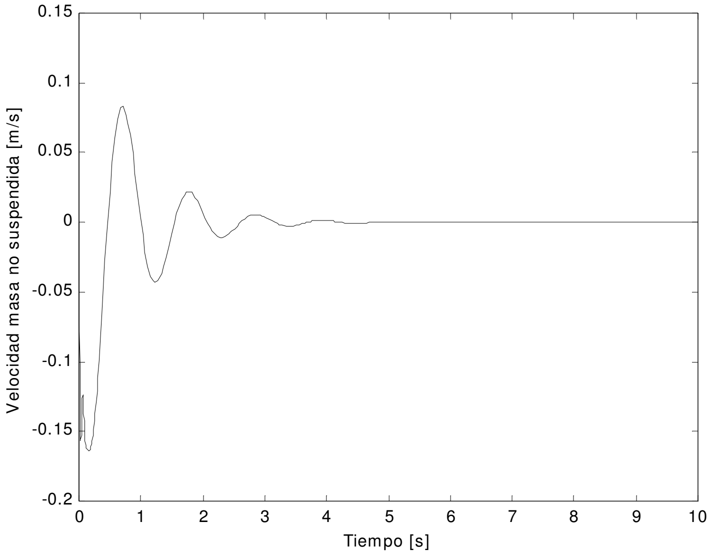


Puedo propagar la causalidad al resto de los enlaces (tengo una única opción) hasta completar todo el sistema:

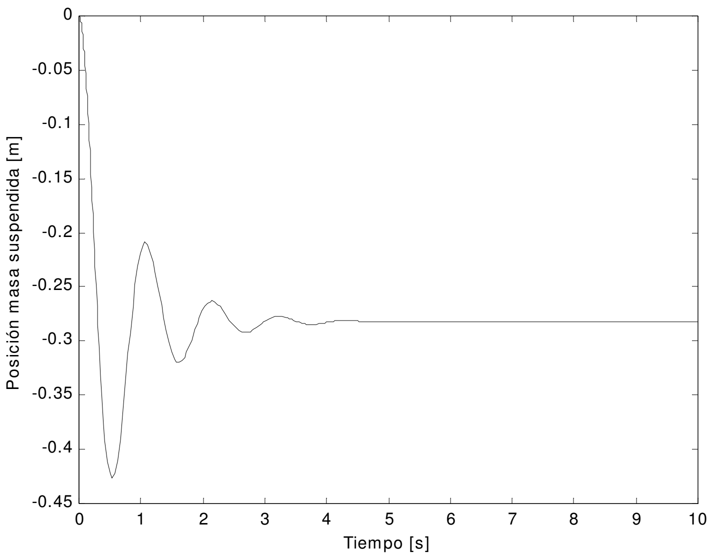


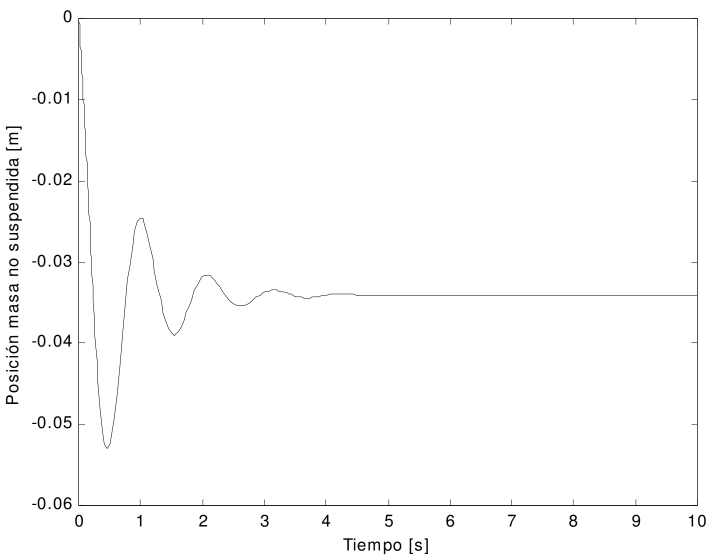


Velocidad masa suspendida [m/s]
Tiempo [s]
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

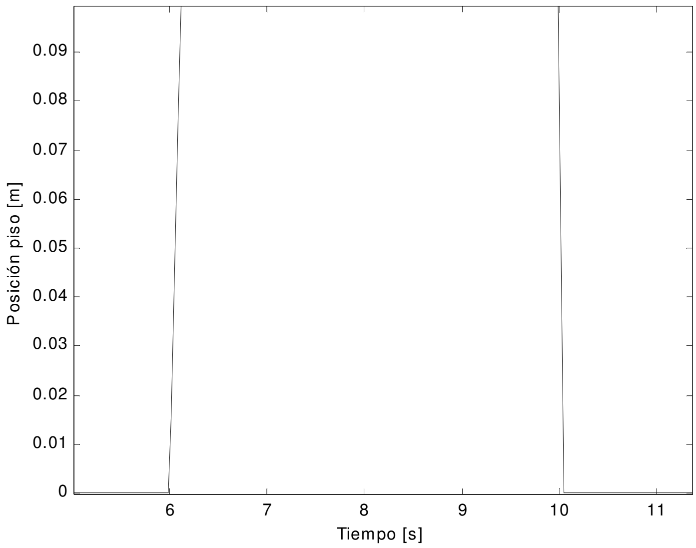


Velocidad masa no suspendida [m/s]
Tiempo [s]
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

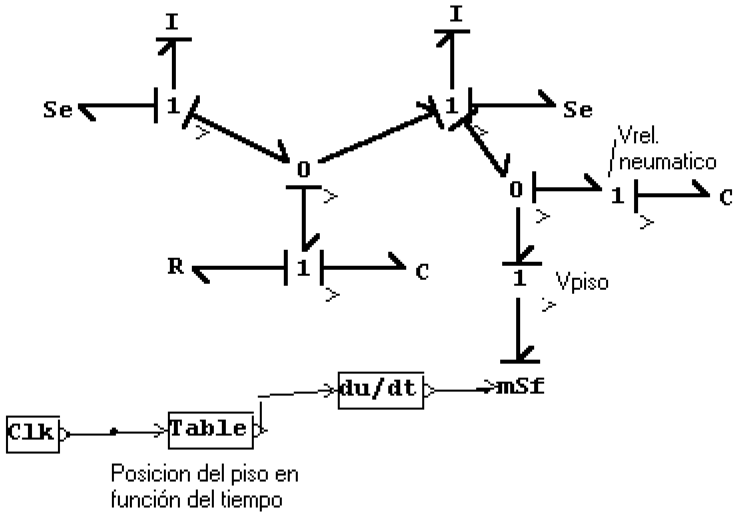


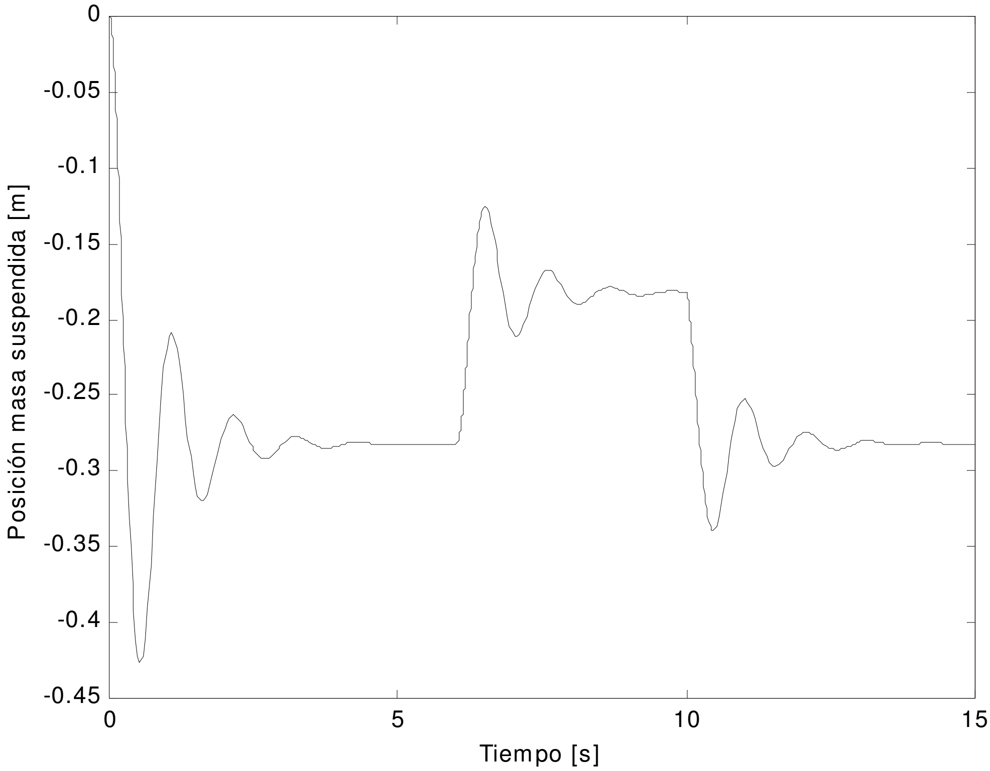


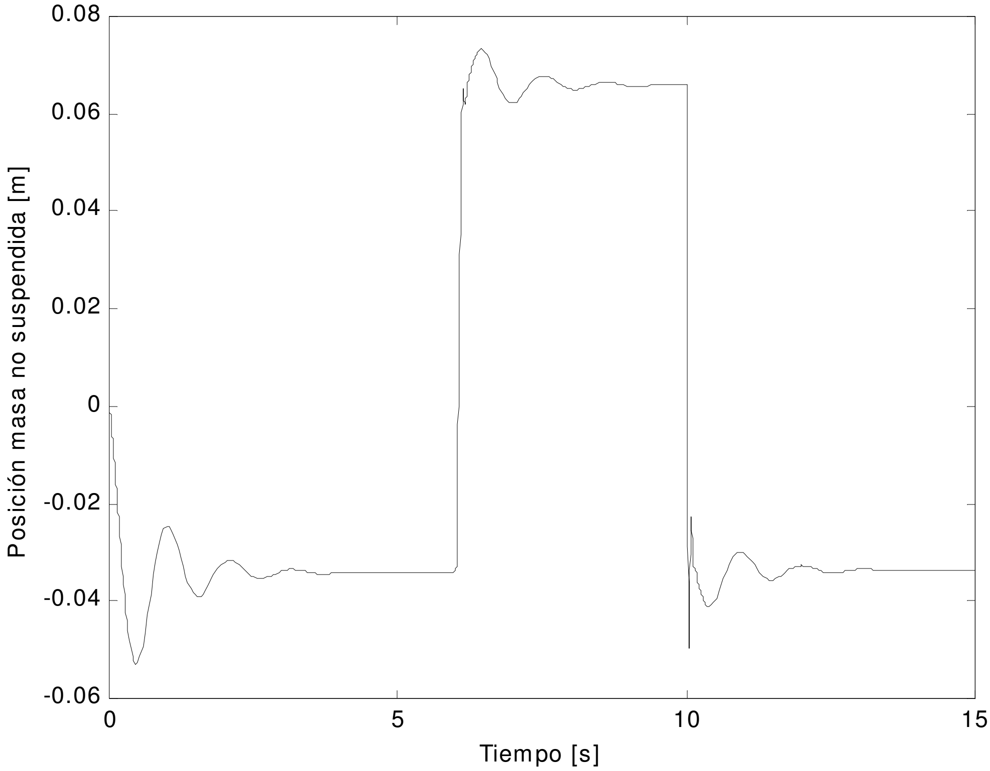
Si suponemos que el piso deja de ser estático, para pasar a tener una posición en función del tiempo por ejemplo como la siguiente (función escalón):



Veamos como se puede modelar esto. El elemento ‘C’ que representa la rigidez del neumático deja de trabajar a la velocidad de la masa no suspendida para trabajar a una velocidad relativa entre la velocidad de la masa no suspendida y la velocidad del piso. Esta última velocidad puede modelarse como una fuente ‘Sf’ cuyo valor puede obtenerse para cada instante de tiempo calculando la derivada de la posición del piso en el tiempo. Con lo cual el BGs queda de la siguiente forma:




0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
-0.35
-0.4
-0.45
Posición masa suspendida [m]
0
5
10
15
Tiempo [s]


0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
Posición masa no suspendida [m]
0
5
10
15
Tiempo [s]