CLASIFICACIÓN DE 2 – VARIEDADES CONEXAS COMPACTAS

ROLANDO JIMÉNEZ BENITEZ
IMATE-OAXACA

Curso de Topología, XXXVIII Congreso de la SMM 2005
www.matcuer.unam.mx/˜ rolando

El subespacio de un espacio topológico

Definición 0.1. . *Sea* (X, τ) *un espacio topológico,* $Y \subset X$ *un subconjunto de* X*. La topología* $\tau_Y = \{V : V = U \cap Y,\ U \in \tau\}$ *se llama la topología inducida de* X *sobre* Y*. El espacio* (Y, τ_Y) *se llama un subespacio del espacio* (X, τ)*.*

El Espacio Cociente y la Topología Cociente

Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia sobre X. Entonces el conjunto X se descompone en clases de equivalencia que lo denotaremos por X/R.

Definición 0.2. . *El conjunto* X/R *se llama conjunto cociente de* X *con respecto a la equivalencia* R*. Sea* $\pi : X \to X/R$ *la proyección natural.*

Sea (X, τ) *un espacio topológico y* R *una relación de equivalencia. Entonces en el conjunto cociente* X/R *podemos definir una topología* τ_R *de la siguiente manera:* V *es abierto en* X/R *si y solo si* $\pi^{-1}(V)$ *es abierto en* X*. La topología* τ_R *es la topología mas fina que hace continua a* π*.*

n-variedades

Definición 0.3. . *Sea* n *un entero positivo. Una* n*-variedad es un espacio de Hausdorff numerable tal que cada punto tiene una vecindad abierta homeomorfa a la bola abierta* n*-dimensional* $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$*.*

Ejemplos:
1. $\mathbb{R}^n$, la n-esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$

2. La 2-esfera S^2 obtenida como un espacio cociente.
Sea X el disco cerrado unitario en el plano. Sea R la relación de equivalencia: $(x,y) \sim (x,y)$ para todo $(x,y) \in X$ y $(x,y) \sim (x,-y)$ si y solo si (x,y) y $(x,-y)$ estan en la frontera del disco y $x \neq 1, -1$. Entonces X/R es la 2-esfera.

3. El 2-toro $T = S^1 \times S^1$ obtenido como espacio cociente.
Sea X el cuadrado unidad en el plano. Sea R la relación de equivalencia: $(x,y) \sim (x,y)$ para todo $(x,y) \in X$, $(0,y) \sim (1,y)$ para $0 \leq y \leq 1$ y $(x,0) \sim (x,1)$ para $0 \leq x \leq 1$. Entonces X/R es el toro.

4. El 2-plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ obtenido como espacio cociente.
Sea X el cuadrado unidad en el plano. Sea R la relación de equivalencia: $(x,y) \sim (x,y)$ para todo $(x,y) \in X$, $(0,y) \sim (1,1-y)$ para $0 \leq y \leq 1$ y $(x,0) \sim (1-x,1)$ para $0 \leq x \leq 1$. Entonces X/R es el plano proyectivo.

5. La banda de Möbius.
Sea X el siguiente rectángulo del plano: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \leq x \leq 10,\ -1 < y < 1\}$. Sea R la relación de equivalencia: $(x,y) \sim (x,y)$ para todo $(x,y) \in X$, $(10,y) \sim (-10,-y)$ para $-1 < y < 1$. Entonces X/R es la banda de Möbius.

6. La botella de Klein.
Sea X el cuadrado unidad en el plano. Sea R la relación de equivalencia: $(x,y) \sim (x,y)$ para todo $(x,y) \in X$, $(0,y) \sim (1,1-y)$ para $0 \leq y \leq 1$ y $(x,0) \sim (x,1)$ para $0 \leq x \leq 1$. Entonces X/R es la botella de Klein.

Sumas Conexas de 2-variedades

Definición 0.4. *La suma conexa de dos 2-variedades conexas S_1 y S_2, que se denota por $S_1 \# S_2$ se define de la siguiente manera: Sean $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$, con D_1 y D_2 discos cerrados. Sean S_i' el complemento del interior de D_i en S_i, $i = 1,2$. Escojamos un homeomorfismo h de la frontera de D_1 sobre la frontera de D_2. Entonces $S_1 \# S_2$ es el espacio cociente de $S_1' \cup S_2'$, obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x de la frontera de D_1.*

Es claro que la suma conexa de 2-variedades conexas es nuevamente una 2-variedad conexa.

Ejemplos:
1. La suma conexa $S^2 \# S = S$.

2. La suma conexa es conmutativa y asociativa.

3. La suma conexa de n toros.

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

4. La suma conexa de n planos proyectivos

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$$

En los ejemplos 3 y 4 hemos obtenido la forma canónica de la suma conexa de n toros y de la suma conexa de n planos proyectivos. La forma canónica de la esfera es: aa^{-1}.

Triangulación de 2-variedades conexas compactas

Definición 0.5. . *Una triangulación de una 2-variedad conexa compacta S consiste en una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ que cubren S, y una familia de homeomorfismos $\phi_i : T_i' \to T_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ donde T_i' es un triángulo del plano $\mathbb{R}^2$. Los subconjuntos T_i se llaman triángulos. Los subconjuntos de T_i que son imagen por ϕ_i de vértices y aristas del triángulo T_i' se llaman también vértices y aristas respectivamente. Finalmente se impone la condición de que dos triángulos distintos T_i y T_j o son distintos, o tienen un solo vértice común, o tienen toda una arista común.*

Notemos que toda triangulación de una 2-variedad conexa compacta satisface las dos condiciones siguientes:

(1) Cada arista lo es exactamente de dos triángulos.
(2) Sea v un vértice de una triangulación. Entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos que tienen el vértice v cíclicamente $T_0, T_1, T_2, \cdots, T_n = T_0$ de manera que, para $0 \leq i \leq n-1$, T_i y T_{i+1} tengan una arista común.

Teorema 0.6. . *Cualquier 2-variedad conexa compacta admite una triangulación.*

2-variedades orientables y no orientables

Sea T una triangulación. Entonces a cada triángulo le podemos dar una orientación, por ejemplo en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sean T_i y T_j dos triángulos con una arista común a. Diremos que las orientaciones de T_i y T_j son consistentes si inducen orientaciones opuestas en a.

Definición 0.7. . *Una orientación de una triangulación T es una elección de orientación en cada triángulo tal que cada dos triángulos que se intersectan en una arista son consistentemente orientados. Si una triangulación admite una orientación, entonces se dice que es orientable.*

Por el Teorema anterior cualquier 2-variedad conexa compacta admite una triangulación.

Definición 0.8. . *Sea S una 2-variedad conexa compacta. Diremos que S es orientable si cualquier triangulación T de S es orientable. En caso contrario se dice que S es no orientable.*

Ejemplos

1. El toro es orientable.

2. El plano proyectivo es no orientable.

Teorema 0.9. . *Sea $\phi : X \to Y$ una aplicación biyectiva, X compacto e Y de Hausdorff. Entonces f es un homeomorfismo.*

El Teorema de clasificación

Teorema 0.10. . *Toda 2-variedad conexa compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Proof. Sea S una 2-variedad conexa compacta. Por demostrar que S es homeomorfa a un poligono con las aristas indentificadas a pares, según alguno de los simbolos aa^{-1}, $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$, $a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n$.

Primer paso. S es triangulable. Sea n el número de triángulos. Podemos enumerar los triángulos $T_1, T_2, \cdots, T_n$, de manera que el triángulo T_i tenga una arista e_i común con uno, al menos, de los triángulos $T_1, \cdots, T_{i-1}$, $2 \leq i \leq n$. Para demostrarlo, llamemos T_1 a uno cualquiera de los triángulos; elegimos como T_2 cualquier triángulo que tenga alguna arista común con T_1, como T_3 cualquier triángulo que tenga arista común con T_1 o con T_2, etc. Si en algún punto no pudiéramos continuar este proceso, entonces tendríamos dos conjuntos de triángulos $\{T_1, \cdots, T_k\}$ y $\{T_{k+1}, \cdots, T_n\}$ tales que ningún triángulo del primer conjunto tendría una arista o vértice común con ningún triángulo del segundo conjunto. Pero esto daría una particiíon de S en dos conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos, en contra de la hipótesis de que S es conexa.

Utilizando ahora esta ordenación de los triángulos T_1, T_2, $\cdots$, T_n, junto con la elección de aristas e_2, e_3, $\cdots$, e_n para construir en el plano, un modelo de S; este modelo será un poligono cuyos lados estén identificados a pares.

Recordemos que para cada triángulo T_i, existe un triángulo ordinario T_i' en $\mathbb{R}^2$ y un homeomorfismo $\phi_i : T_i' \to T_i$. Podemos suponer que los triángulos T_1', T_2', $\cdots$, T_n' son disjuntos dos a dos; si no lo fueran podríamos trasladar algunos de ellos a otras partes del plano.

Sean $\phi_i : T_i' \to T_i$, $\phi_j : T_j' \to T_j$, homeomorfismos y $T_i \cap T_j = e_{ij}$ una arista común a ellos; Sean $e_i' = \phi_i^{-1}(e_{ij})$, $e_j' = \phi_j^{-1}(e_{ij})$ las correspondientes aristas en T_i', T_j'. Entonces está definido el homeomeorfismo entre aristas $\phi_{ij} : e_i' \to e_j'$ dado por $\phi_{ij} = \phi_j^{-1}|e_{ij} \circ \phi_i|e_i' : e_i' \to e_j'$.

De esta forma a la triangulación T le hacemos corresponder el sistema $\{\{T_i'\}, \{\phi_{ij}\}\}$ de triángulos ordinarios del plano junto con los homeomorfismos ϕ_{ij} para los corrrespondientes parejas de aristas.

En la unión $T' = \bigcup_{i=1}^{n} T_i'$; definimos una relación de equivalencia R definida por los homeomorfismos ϕ_{ij}. El espacio cociente T'/R es homeomorfo a S. En efecto, Definimos una aplicación $\phi : T' \to S$ por $\phi|T_i' = \phi_i$; Esta aplicación induce una aplicación $\overline{\phi} : T'/R \to S$ que es obviamente continua y biyectiva. Puesto que T'/R es compacto y S es un espacio de Hausdorff, entonces por el Teorema 2 $\overline{\phi}$ es un homeomorfismo.

El poligono que deseamos lo construiremos como un espacio cociente de T'. Consideremos una arista cualquiera de las e_i, $2 \leq i \leq n$. Por hipótesis, e_i es una arista del triángulo T_i y de otro triángulo T_j con $1 \leq j \leq i$. Por tanto, $\phi^{-1}(e_i)$ consta de una arista del triángulo T_i' y una arista del triángulo T_j'. Identificamos estas dos aristas de los triángulos T_i' y T_j', identificando aquellos puntos que se aplican por ϕ en un mismo punto de e_i. Hacemos estas dos identificaciones para cada una de las aristas e_2, e_3, $\cdots$, e_n. Designemos por D el espacio cociente de T' así obtenido. Está claro que la aplicación $\phi : T' \to S$ induce una aplicación $\psi : D \to S$, y que S tiene la topología cociente inducida por ψ. Veamos ahora que D es topológicamente equivalente a un disco cerrado.

Ahora es claro que S se obtiene a partir de D identificando ciertos pares de aristas del borde de D.

Segundo paso. Eliminación de aristas adyacentes de primera especie.

Hemos obtenido un polígono D tal que S resulta al identificar a pares las aristas de D. Podemos indicar estas identificaciones con los simbolos apropiados. Si la letra que indica un cierto par de aristas aparece en el símbolo con los dos exponentes $+1$ y -1, entonces decimos que este par de aristas es de **primera especie**; de lo contrario, el par es de **segunda especie**.

Vamos a mostrar que podemos eliminar un par de aristas adyacentes de primera especie, supuesto que el polígono tenga por lo menos cuatro aristas. Veamos en un diagrama como se hace. Podemos continuar este proceso hasta que hayan sido eliminados todos los pares de este tipo, o hasta que obtengamos un polígono con sólo dos lados. En el último caso, este polígono, cuyo simbolo será aa o aa^{-1}, será un plano proyectivo o una esfera, y ya habremos acabado con la demostración. En caso contrario procedemos de la siguiente manera.

Tercer paso. Transformación de un polígono tal que todos los vértices estén identificados a uno solo.

A pesar de que las aristas de nuestro polígono han de estar identificados a pares, los vértices pueden estar identificados en conjuntos de uno, dos, tres, etc. Diremos que dos vértices del polígono son equivalentes si y sólo si están identificados.

Supongamos que hemos llevado a cabo el segundo paso tantas veces como ha sido posible. Queremos demostrar que podemos transformar nuestro polígono en otro tal que todos los vértices pertenezcan a una sola clase de equivalencia.

Supongamos que por lo menos hay dos clases de equivalencias distintas. Entonces es fácil de ver que existen un par de vértices adyacentes del polígono que no son equivalentes. Designemos a estos vértices por P y Q. La figura siguiente muestra como debemos de proceder. Puesto que P y Q no son equivalentes y hemos realizado ya el segundo paso, los lados a y b no pueden ser identificados. Cortemos a lo largo de la linea c, desde el vértice Q hasta el otro vértice de la arista a distinto de P. Entonces pegamos las dos aristas designadas por a. Resulta así un nuevo polígono con un vértice menos en la clase de equivalencia de P y uno más en la de Q. Si es posible, realizamos de nuevo el segundo paso. Viendo las posibilidades que pueden ocurrir con los vértices después del tercer paso para aplicar el segundo paso es fácil de ver que no cambia la diferencia entre en conjunto de vértices equivalentes a Q y el conjunto de vértices equivalentes a P, en realidad o identificamos dos Q y desaparece un P o identificamos dos P y desaparece un Q y en ambos casos desaparece un Q y un P. Entonces, llevamos a cabo, otra vez, el tercer paso para reducir el número de vértices de la clase de equivalencia de P, y volvemos a realizar el segundo paso. Vamos alternando el tercero y segundo pasos hasta que la clase de equivalencia de P sea totalmente eliminada. Si quedan aún más de una clase de equivalencia de vértices, repetimos este proceso para reducir su número. Si continuamos así, obtenemos finalmente un polígono con todos los vértices identificados a uno solo.

Cuarto paso. Cómo hacer adyacentes todo par de aristas de segunda especie.

Queremos demostrar que podemos transformar nuestra S de manera que todo par de aristas de segunda especie sean adyacentes. Supongamos que tenemos un par de aristas de segunda especie que no sean adyacentes, tal como muestra la figura. Cortemos a lo largo de la linea punteada a y peguemos a lo largo de b. Las dos aristas son ahora adyacentes. Continuemos este proceso hasta que todos los pares de aristas de segunda especie sean adyacentes. Si no hay pares de primera especie ya hemos acabado, puesto que el símbolo del polígono será de la forma $a_1a_1a_2a_2 \cdots a_na_n$ y por tanto S es la suma conexa de n planos proyectivos.

Supongamos, por el contrario que en este punto de la reducción hay al menos un par de aristas de primera especie; designémoslas con la letra c. Afirmamos entonces que por lo menos hay otro par de aristas de primera especie tal que estos dos pares se separan uno al otro; es decir, al recorrer el borde del polígono las aristas de estos dos pares aparecen alternativamente, por lo tanto, el símbolo será de la forma $c \cdots d \cdots c^{-1} \cdots d^{-1} \cdots$, donde los puntos indican otras letras posibles.

Para probar esto, supongamos que las aristas c no están separadas por ningún otro par de aristas de primera especie. Entonces, nuestro polígono tendría un aspecto como la figura siguiente, donde A y B designa sendas sucesiones de aristas. Importa señalar que ninguna arista de A puede identificarse con otra arista de A, y análogamente para B; ninguna arista de A está identificada con una arista de B. Pero esto contradice el que los vértices inicial y final de cada una de las aristas c han de estar identificadas, en virtud del tercer paso.

Quinto paso. Pares de primera especie.

Supongamos que tenemos dos pares de primera especie que se separan uno al otro ver figura. Demostraremos que podemos transformar el polígono de manera que los cuatro lados en cuestión sean consecutivos a lo largo del perímetro del polígono.

En primer lugar, cortamos a lo largo de c y pegamos a lo largo de b. Después cortamos a lo largo de d y pegamos a lo largo de a.

Continuamos este proceso hasta que todos los pares de primera especie estén en grupos adyacentes de cuatro aristas. Si no hay pares de segunda especie, tenemos ya el resultado buscado porque, en tal caso, el símbolo será de la forma

$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$

y S es la suma conexa de n toros.

Falta, pues, considerar el caso en que, después de estos cinco pasos, haya pares de aristas de primera y de segunda especie simultáneamente. En este caso obtendremos una suma conexa de planos proyectivos.

Unimos por una diagonal el vértice común de las aristas a y a con el vértice común de las aristas y y x^{-1}, cortamos por d y pegamos por a. Obtenemos dos parejas separadas de aristas x, x y y, y. Usando el paso 2 los convertimos en zz y ww. Después de este paso se obtiene la separación de d^{-1} y d^{-1}, nuevamente por el paso 2 lo convertimos en vv. Obtenemos $w^{-1}w^{-1}z^{-1}z^{-1}vv$. Si todavia existen otras combinaciones de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$ y aa estas no cambian y seguimos con el proceso anterior hasta terminar con las combinaciones $xyx^{-1}y^{-1}$.

Con esto se completa la demostración del Teorema 3.

$\square$