No hay quinto malo

Elsa Puente Vázquez

Universidad Nacional Autónoma de México

Junio de 2012

-Y es que no hay nada mejor que revolver el tiempo con el café.
Es que no hay nada mejor que componer sin guitarra ni papel.
Paralelas, vienen siguiéndome. Espacio y tiempo juegan al ajedrez.-

Una décima de segundo. Nacha Pop, 1984

Contenido

Elementos

La búsqueda de lo que debería ser

El encuentro con lo que también es

El fin de una guerra

Elementos

- Tales de Mileto (624-548 a.C.) es el primero en hacer incapié en que los enunciados matemáticos se establecieran a través de un razonamiento deductivo. Este enfoque resultaba completamente nuevo. Antes se utilizaba el método de ensayo y error (egipcios y mesopotámicos).
- Este intento por sistematizar la generación y exposición de los resultados geométricos lo continuaron, durante los siguientes dos siglos, Pitágoras de Samos (572-497 a.C.) y sus discípulos.
- Cerca del año 400 a.C., aparece un tratado, escrito por Hipócrates de Quíos, cuyo título era Elementos.

- Cerca del año 300 a.C., Euclides (330-275 a.C.) concluyó un tratado monumental, en trece volúmenes, también titulado Elementos.

  En este tratado se presenta, de manera sistemática, las proposiciones fundamentales de la geometría y de la teoría de números conocidas por los griegos de esta época.

- Libros I-VI: (respectivamente) triángulos, rectángulos, círculos, polígonos, proporción y similitud.
- Libros VII-X: teoría de números. Dos logros notables: las demostraciones de la existencia de una infinidad de números primos y la irracionalidad de $\sqrt{2}$.
- Libro XI: Fundamentos de la geometría de los sólidos.
- Libro XII: cálculo de áreas y volúmenes (método de agotamiento).
- Libro XIII: cinco sólidos regulares (o platónicos).

En el Libro I se encuentra la manzana de la discordia de la historia que contaremos.

Euclides establece que, a partir de resultados ya conocidos, se obtendrán los nuevos a través de la deducción lógica.

The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg. Thomas L. Heath, Dover Publications, New York, 1956.

En dicho Libro:

- (23) Líneas rectas paralelas: son líneas rectas que, estando en el mismo plano y si se prolongan indefinididamente en ambas direcciones, no se cortan en ninguna dirección.

Expícitamente, Euclides postula lo siguiente:

- Trazar una línea recta desde cualquier punto hasta cualquier punto.
- Prolongar una línea recta finita continuamente a una línea recta.
- Describir un círculo con cualesquiera centro y distancia.
- Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

- Que, si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas hace que los ángulos interiores en el mismo lado sean menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se intersectarán en aquel lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Una de las luchas más prolongadas y feroces que muchos matemáticos, profesionales y aficionados, han librado durante el desarrollo de las Matemáticas, ha sido la búsqueda de ya fuera una demostración o de una refutación formal y rigurosa del quinto postulado de Euclides.

De acuerdo con la opinión de varios filósofos e historiadores de la ciencia, esta gran batalla, el descubrimiento de las geometrías no euclideanas, ha sido un factor primordial y determinante para el acelerado desarrollo por el que transcurrieron las Matemáticas en los siglos XIX y XX y, también, ha influido, de manera contundente, en el nuevo significado que adquirió, para los lógicos y matemáticos, la palabra validez, con la consecuente revolución de las ideas y del pensamiento humano.

Este texto es una obra pura, en el sentido de que no incluye o menciona aplicaciones prácticas. El pensamiento de Euclides es puro, ya que no tiene la necesidad de hacer experimentos físicos para asegurarse de que los enunciados son correctos y sólo se debe verificar que el razonamiento en las demostraciones es adecuado.

El método axiomático utilizado por Euclides es el prototipo para la exposición sistemática en todo lo que conocemos como Matemáticas Puras.

Es prudente tomar en cuenta lo maravilloso que resulta que una gran parte de la exposición de Euclides permanece válida, después de más de veinte siglos de haber sido redactada.

-Durante algún trecho oí sus gritos aplastados por las altas peñas de las cumbres.-

Pigmalión y otros relatos. Manuel Vázquez Montalbán (1939-2003)

La búsqueda de lo que debería ser

Una característica común en los primeros intentos por demostrar el enunciado del quinto postulado, es que partieron de una suposición que expresa alguna propiedad de las figuras rectilíneas (que sus autores consideraban como axioma), la cual resultó ser lógicamente equivalente al quinto postulado y, por lo tanto, dichas suposiciones no podían considerarse como más válidas y no se obtuvo mucha ganancia con estos reemplazos.

La mayor parte del estudio temprano de los fundamentos de la geometría, consistió en el descubrimiento y consecuente debate de dichas equivalencias lógicas.

Un ejemplo, bastante conocido, de un resultado lógicamente equivalente al quinto postulado de Euclides es el siguiente, el cual fue publicado por John Playfair (1748-1819) en 1795:

Axioma de Playfair: Dados un punto p y una recta L que no pasa por p, existe una y sólo una recta M, distinta de L, tal que pasa por p y es paralela a L.

Los enunciados de los cuatro primeros postulados de Euclides son lo bastante poderosos para demostrar la existencia de al menos una tal recta M. Lo que ya no son capaces de demostrar es la unicidad de dicha recta.

Sin embargo, muchas personas sostuvieron que el enunciado del quinto postulado se podría deducir de los primeros cuatro.

- Claudio Ptolomeo (85-165)
- Proclo (410-485)

- Nasîr Eddîn al-Tusi (1201-1274)

- John Wallis (1616-1703)
- Girolamo Saccheri (1667-1733)
- Alexis Clairaut (1713-1765)
- Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

-Los hombres de genio son meteoros destinados a incendiarse para iluminar su época.-

Napoleón Bonaparte (1769-1821)

El encuentro con lo que también es

Había que enfrentarse a una fuerte influencia en la dirección contraria: la interpretación que por esa época se hizo de la filosofía propuesta por Isaac Barrow (1630-1677) y Emmanuel Kant (1724-1804), la cual afirmaba que la única geometría admisible era la euclideana.

El enciclopedista y matemático francés Jean le Rond d´Alembert (1717-1783) pensaba que la definición y las propiedades que estaban en uso de la línea recta y de las paralelas, eran un obstáculo para una fundamentación eficiente de la geometría.

Para 1763, George Klügel (1739-1812) presentó su tesis doctoral, titulada Conatuum praecipuorum theoria parallelarum demonstrandi recensio, en la que señalaba las fallas de cerca de treinta de los muchos intentos diferentes que existían para demostrar el quinto postulado.

Después de realizar esta tesis, expresó sus profundas dudas respecto a que, en efecto, se pudiese encontrar tal demostración y mencionó que, sin algún recurso disponible para experimentar, el quinto postulado podría muy bien ser indecidible.

En el inicio de la segunda etapa del estudio de los fundamentos de la geometría, el enfoque principal fue reemplazar a ésta por la trigonometría, la cual era considerada como más básica.

Para la parte final de esta etapa, se habían desarrollado los primeros conceptos y resultados de la geometría diferencial, los cuales sirvieron para entender mejor la naturaleza de la geometría de Euclides. Es por esto que la estrategia más frecuente consistió en negar el enunciado del quinto postulado y verificar que el sistema de axiomas resultante era consistente.

Esta nueva posición trajo como resultado el descubrimiento de la existencia de las geometrías no euclideanas, lo cual fue impensable durante veinte siglos y se convirtió en una revolución en el estudio de los fundamentos de la geometría equiparable, por su profundidad, con la Revolución Copernicana iniciada en 1543 en la astronomía y, por su impacto filosófico, con la *Teoría de la Evolución* de Darwin publicada en 1859.

- Johann Lambert (1728-1777)
- Farkas Bolyai (1775-1856)
- Karl Gauss (1777-1855)

- Ferdinand Schweikart (1780-1859) y Franz Taurinus (1794-1859)

- János Bolyai (1802-1860)
- Nicolai Lobachevsky (1792-1856)

-Tenía la necesidad de transformar la confusión en orden, como todos los hombres de la Historia que no son personajes de opereta.-

Les chênes qu´on abat. André Malraux (1901-1976)

-Una verdad matemática no es, en sí misma, simple ni complicada, solamente es.-

Émile Lemoine (1840-1912)

El fin de una guerra

Fue hasta el siglo XIX cuando muchos matemáticos empezaron a aceptar el hecho de que la negación del enunciado del quinto postulado da como resultado dos nuevas geometrías consistentes.

Sin embargo, esto no bastaba para dar por terminada (de una vez por todas) la búsqueda de una demostración o una refutación formal y rigurosa del quinto postulado.

Era necesario determinar si el enunciado del quinto postulado era o no independiente de los primeros cuatro postulados de Euclides.

- Karl Weierstrass (1815-1897)
- Guillaume Hoüel (1823-1886)

- Eugenio Beltrami (1835-1900)

- Sophus Lie (1842-1899)

- Felix Klein (1849-1925)
- J. H. Poincaré (1854-1912)

- David Hilbert (1862-1943)

Después de veinte siglos de esfuerzos, *gritos y sombrerazos*, se reivindicó a la teoría de las paralelas propuesta por Euclides, al demostrar que el enunciado del quinto postulado es independiente de los otros axiomas de la geometría neutral y que, por lo tanto, no existe la menor esperanza de encontrar la demostración o refutación buscada.

Al final de este largo camino, quedó claro que no tiene mucho sentido preguntar cuál geometría es verdadera. Desde el punto de vista de las Matemáticas, la pregunta relevante es si cada axioma es o no lógicamente consistente con los demás axiomas.

Esto tampoco resultaría una labor fácil de realizar. De acuerdo con el filósofo checo K. Gödel (1906-1978), no existe una demostración interna de consistencia para un sistema de axiomas que incluya conjuntos infinitos y debemos conformarnos con la consistencia relativa:

La geometría euclideana no posee contradicciones si y sólo si la geometría hiperbólica tampoco las tiene.

-Los matemáticos son como los franceses: cualquier cosa que se les diga, la traducen inmediatamente a su propio lenguaje y resulta algo enteramente diferente.-

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832)