# Geometrie der Modulräume minimaler isometrischer Immersionen der Sphären in Sphären

Gregor Weingart

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Minimal immersierte Mannigfaltigkeiten bilden eine Fülle besonders schöner, geometrischer Studienobjekte. Neben den bekannten Bildern spezieller minimaler Immersionen bietet auch die Menge aller Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen einer Mannigfaltigkeit mit einer festgeschriebenen Riemannschen Metrik in runde Sphären ein geometrisches Studienobjekt mit einer faszinierend komplexen Struktur. Dabei werden zwei minimale isometrische Immersionen in runde Sphären als äquivalent bezeichnet, wenn sie sich nur um eine Isometrie der beiden Zielsphären unterscheiden.

Im Falle der minimalen isometrischen Immersionen der Sphären in runde Sphären beschrieben do Carmo–Wallach [dC&W] die Menge aller Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen in runde Sphären durch einen Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$, dessen Konstruktion später auf gewisse andere Mannigfaltigkeiten wie zum Beispiel die komplex–projektiven Räume übertragen wurde. Alle diese Mannigfaltigkeiten haben gemeinsam, daß sie eine ausgezeichnete Standardimmersion besitzen, die in die Konstruktion des Modulraums unmittelbar eingeht. So wurden die Standardimmersionen der isotropie–irreduziblen homogenen Räume von Takahashi [Ta] schon vor der ersten Beschreibung der minimalen isometrischen Immersionen der Sphären durch do Carmo–Wallach [dC&W] konstruiert.

Eine neue Interpretation der Konstruktion von do Carmo–Wallach ermöglicht es nun, den Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$ der minimalen isometrischen Immersionen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in völliger Allgemeinheit ohne die explizite Wahl irgendeiner Standardimmersion zu konstruieren, und das Problem verlagert sich dahin zu zeigen, daß dieser Modulraum nicht die leere Menge ist. Ein unmittelbarer Vorteil dieser neuen Interpretation ist zum Beispiel, daß sie die Modulräume einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten direkt mit den Modulräumen ihrer Quotientenmannigfaltigkeiten in Beziehung setzt, über deren minimale isometrische Immersionen man im allgemeinen wenig weiß, geschweige denn, daß man eine Standardimmersion kennt.

In dieser neuen Interpretation wird eine Äquivalenzklasse minimaler isometrischer Immersionen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $N$ durch eine positiv semidefinite Bilinearform auf dem Dualraum $E_\lambda^*$ des Eigenraums $E_\lambda$ des skalaren Laplaceoperators auf $N$ für einen vom Radius $r$ der Zielsphäre abhängenden Eigenwert $\lambda = \frac{\dim N}{r^2} > 0$ repräsentiert. Umgekehrt muß eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform auf $E_\lambda^*$ einige Zusatzbedingungen erfüllen, damit sie Modul einer Äquivalenzklasse minimaler isometrischer Immersionen wird.

Diese Zusatzbedingungen hängen einzig von der Geometrie der Diracschen Deltafunktionale in $E_\lambda^*$ ab und zeigen, daß der Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$ aller minimalen isometrischen Immersionen zum Eigenwert $\lambda$ der Schnitt eines affinen Unterraums mit der Menge aller positiv semidefiniten Bilinearformen auf $E_\lambda^*$ ist. In diesem Sinne stellen die Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ eine Zusatzstruktur auf dem Spektrum einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $N$ dar, die natürlich nur relevant für Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist, für die es überhaupt minimale isometrische Immersionen in eine Sphäre gibt.

Die geometrische Beschreibung der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ als Schnitt eines affinen Unterraums mit dem Kegel der positiv semidefiniten symmetrischen Bilinearformen auf $E_\lambda^*$ setzt die Frage nach der Beschreibung der Randstruktur dieser Modulräume in direkte Analogie zu anderen Problemen wie etwa das Hurwitz–Radon–Problem der Klassifikation aller orthogonalen Multiplikationen. Die einfache Konstruktion der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ täuscht nämlich darüber hinweg, wie schwierig es ist, genaue Aussagen über die Struktur ihrer Ränder zu beweisen. Die Lösung dieser Fragen ist bis jetzt nur in Einzelfällen möglich, und ein vergleichendes Studium der Kegelschnitte, das heißt der Schnitte affiner Unterräume mit Kegeln positiv semidefiniter symmetrischer Bilinearformen, erscheint unumgänglich.

Eine große Klasse von Beispielen für interessante Kegelschnitte erhält man dadurch, daß man in der zweiten symmetrischen Potenz $\mathrm{Sym}^2 E$ einer irreduziblen Darstellung $E$ einer kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ diejenigen affinen Räume durch das bis auf einen skalaren Faktor eindeutige $\mathcal{G}$–invariante Element $G$ von $\mathrm{Sym}^2 E$ betrachtet, deren Modell– bzw. Parameterräume $\mathcal{G}$–invariante Unterräume von $\mathrm{Sym}^2 E$ sind. Diese Beispielklasse umfaßt die Modulräume $\mathcal{M}_{\lambda_k}$ der minimalen isometrischen Immersionen der Sphären zum $k$–ten Eigenwert und daneben einen ganzen Turm kompakter Kegelschnitte

$$\mathcal{M}_k^{(0)} \supset \mathcal{M}_k^{(1)} = \mathcal{M}_{\lambda_k} \supset \ldots \supset \mathcal{M}_k^{(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1)}$$

in dem alle Unterkegelschnitte eine geometrische Interpretation als Raum von Abbildungen der Sphären in Sphären besitzen [To2]. Dabei läuft die vollständige Beschreibung der Kegelschnitte in dieser Klasse im wesentlichen auf die Beschreibung der Invarianten der Darstellungen der auf den Kegelschnitten operierenden Gruppe $\mathcal{G}$ hinaus. Die übliche Methode der Zerlegung in irreduzible Darstellungen hilft bei der Beschreibung dieser Kegelschnitte offensichtlich wenig, denn die interessantesten Randpunkte sind im allgemeinen über mehrere irreduzible Darstellungen verschmiert.

Eines der zentralen Ergebnisse dieser Arbeit ist die Identifizierung der Kegelschnitte $\mathcal{M}_k^{(d)}$ mit dem Modulraum aller Eigenabbildungen der Sphäre in Sphären mit Standardfundamentalformen bis zum Grad $d$, und der anschließenden Berechnung der Dimensionen der Parameterräume dieser Kegelschnitte. Die entscheidende Neuerung besteht dabei in einer algebraischen Charakterisierung dieser Parameterräume, die im Gegensatz zum Ansatz von do Carmo–Wallach ohne Darstellungstheorie auskommt. Umgekehrt läßt sich diese Charakterisierung sofort in Darstellungstheorie übersetzen, so daß man damit einen Überblick über die im Parameterraum enthaltenen, irreduziblen Darstellungen erhält. Die Berechnung der Dimensionen der Parameterräume ist dann eher eine Formsache.

Mit anderen Methoden wurde dieses Ergebnis von Toth [To4] für $d = 1$ und in Gauchman–Toth [G&T] für allgemeine $d > 1$ bewiesen, wobei aber letztlich der interessante Fall $d > 1$ für die dreidimensionale Sphäre $S^3$ aufgrund der unterschiedlichen Darstellungstheorie der

$\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$ offen blieb. Gerade die Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ mit $d \geq 3$ scheinen aber die Möglichkeit der Konstruktion neuer minimaler isometrischer Immersionen der $S^3$ zum $k$–ten Eigenwert zu eröffnen, die in Zielsphären der Dimension kleiner als $k$ gehen. Allerdings hätte die Berechnung konkreter Beispiele den Rahmen dieser Arbeit überschritten.

Die neue Interpretation der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ der minimalen isometrischen Immersionen hat insbesondere den Vorteil, daß der Modul einer vorgegebenen minimalen isometrischen Immersion berechenbar wird. Dies zeigt sich in einem zweiten wesentlichen Ergebnis dieser Arbeit, der Lokalisierung der Moduli der von Mashimo konstruierten minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ im Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$. Es ist nämlich weitaus einfacher, die Moduli selbst zu manipulieren, als neue minimale isometrische Immersionen explizit hinzuschreiben. Als ein Beispiel für diese Philosophie mag die Bestimmung aller Zieldimensionen für die sogenannten äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ dienen, deren schwieriger Teil die Existenzaussage ist. Die entsprechenden Moduli lassen sich ganz leicht konstruieren, um die minimalen isometrischen Immersionen als Orbiten der Gruppe $\mathbf{SU}_2$ zu realisieren, bedarf es etwas mehr Arbeit.

Das zweite Kapitel stellt die Konstruktion von do Carmo–Wallach im allgemeinen Rahmen vor und beschreibt einige unmittelbare Folgerungen für die Geometrie der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$. Schon dabei zeigen sich die Vorteile der neuen Interpretation dieser Konstruktion, die eine Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten und ihrer Quotientenmannigfaltigkeiten herstellt. Daneben wird eine allgemeine Konstruktion vorgestellt, mit der man Beispiele minimaler isometrischer Immersionen finden kann, deren Bilder keine eingebetteten Untermannigfaltigkeiten der Zielsphären sind.

Das dritte Kapitel wiederholt die bekannten Grundkonstruktionen minimaler isometrischer Immersionen von Takahashi und Mashimo. In der neuen Interpretation scheint dabei eine bemerkenswerte Verbindung der Konstruktion von Mashimo mit dem Satz von Peter–Weyl auf. So kann man zum Beispiel treue Darstellungen einer kompakten Liegruppe stets als minimale isometrische Immersionen in Sphären auffassen.

Im vierten Kapitel wird die algebraische Charakterisierung der Parameterräume der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^n$ beschrieben und diese Modulräume mit den Modulräumen der Eigenabbildungen der Sphäre $S^{n-1}$ in Sphären mit Standardfundamentalformen bis zum Grad $d$ identifiziert. Mit Hilfe dieser Charakterisierung läßt sich zum Beispiel auf der Vereinigung der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^n$ eine Multiplikation

$$\Psi : \quad \mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^{n_r} \longrightarrow \mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_r}$$

definieren, mit deren Hilfe man Beispiele minimaler isometrischer Immersionen höherdimensionaler Sphären aus niederdimensionalen Beispielen zusammenbasteln kann. Eine damit eng verwandte Konstruktion findet sich zum Beispiel in Toth [To3]. Im folgenden fünften Kapitel wird diese Charakterisierung dazu benutzt, die Dimensionen der Parameterräume der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^n$ zu berechnen.

Das sechste Kapitel ist eher philosophischer Natur und versucht, die Schnitte affiner Unterräume mit den Kegeln positiv semidefiniter symmetrischer Bilinearformen als neue geometrische Studienobjekte zu propagieren. Wie bereits angesprochen, kann man eine Vielzahl interessanter Beispiele dadurch bekommen, daß man in der zweiten symmetrischen Potenz

$\mathrm{Sym}^2 E$ einer irreduziblen Darstellung $E$ einer kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ affine, $\mathcal{G}$–invariante Unterräume durch das bis auf einen skalaren Faktor eindeutige $\mathcal{G}$–invariante Element $G$ betrachtet. Es stellt sich eigentlich eher die Frage, welche geometrische Bedeutung als Modulraum diese Kegelschnitte besitzen.

Im siebten Kapitel werden die Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ der dreidimensionalen Sphäre untersucht und eine grobe Landkarte dieser Modulräume skizziert. Danach werden die Moduli der minimalen isometrischen Immersionen von Mashimo lokalisiert und anschließend eine Beschreibung der Randstruktur eines gewissen Unterkegelschnitts $\mathcal{M}_k^{\mathit{Mashimo}}$ gegeben, der alle diese Moduli enthält. Es zeigt sich, daß die einzig möglichen Dimensionen für die Zielsphären der vollen minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zu den Randpunkten von $\mathcal{M}_k^{\mathit{Mashimo}}$ gerade von der Form $k(k+2) - n_L n_R$ sind, wobei $n_L$ und $n_R$ beliebig aus

$$\begin{array}{lll} k = 4 & & n_L,\, n_R \,\in\, \{1, 2, 3, 5\} \\ k \geq 6 & \text{gerade} & n_L,\, n_R \,\in\, \{1, 2, \ldots, k+1\} \\ k \geq 5 & \text{ungerade} & n_L,\, n_R \,\in\, \{2, 4, \ldots, k+1\} \end{array}$$

aber nicht beide gleich $k + 1$ gewählt werden dürfen. Alle diese Zieldimensionen werden tatsächlich auch realisiert. Im Fall $k = 4$ wurde dieses Ergebnis zuvor von Toth–Ziller [T&Z] veröffentlicht, die auch anmerken, daß sich diese Ergebnisse auf höhere $k$ verallgemeinern lassen. Allerdings ist der schwierigere Teil des Beweises die Existenzaussage. Daneben werden im siebten Kapitel die ersten Beispiele für minimale isometrische Immersionen der $S^3$ konstruiert, deren Bilder keine glatten Untermannigfaltigkeiten der Zielsphären sind.

Das achte Kapitel beschreibt den Rand des Modulraums $\mathcal{M}_4^{(1)}$ der $S^3$ mehr oder weniger vollständig. Dabei wird insbesondere eine bemerkenswerte Verbindung zwischen diesem Modulraum und den zweiten Fundamentalformen der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zu beliebigen Eigenwerten hergestellt. Dadurch kann man ein Ergebnis von Cartan für diese Fundamentalformen dazu benutzen zu zeigen, daß alle minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ in die $S^9$ zum vierten Eigenwert unter der Operation der Isometriegruppe $\mathbf{O}_4\mathbb{R}$ der $S^3$ konjugiert zueinander sind. Im Anschluß daran werden alle Klassen minimaler isometrischer Immersionen der $S^3$ in die $S^{14}$ zum vierten Eigenwert unter der Operation von $\mathbf{O}_4\mathbb{R}$ klassifiziert. Dieses Ergebnis ist nicht nur für sich alleine genommen interessant, sondern ist auch im Zusammenhang mit den zweiten Fundamentalformen minimaler isometrischer Immersionen zu beliebigen Eigenwerten zu sehen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit entstammen im wesentlichen aus zwei verschiedenen Zeitabschnitten, und dementsprechend besteht diese Arbeit aus zwei Teilen, die durch das eher philosophische Kapitel über die geometrische Struktur von Kegelschnitten zusammengehalten werden. Dabei lehnt sich der erste Teil in Form und Inhalt noch an die unmittelbare Vorgängerarbeit von Otto [O] an, die mich persönlich mit dem Thema bekanntmachte. Allerdings hat dieser erste Teil später zahlreiche Änderungen und Erweiterungen erfahren, so daß sich der zeitliche Abstand der beiden Teile dem Leser hoffentlich nicht zu störend bemerkbar macht.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Werner Ballmann, der mir die Zeit und Unterstützung gab, mich mit diesem faszinierenden Thema zu beschäftigen. Viele Diskussionen und Gespräche halfen mir gerade in den letzten Wochen, noch etliche Verbesserungen an dieser Arbeit vorzunehmen. Insbesondere ist dabei ein Briefwechsel mit Christine Escher und Gabor Toth zu erwähnen, in dem sich eine Konzeptionslücke früherer Versionen dieser Arbeit auftat. Außerdem will ich mich an dieser Stelle bei meiner Familie und bei all den Menschen bedanken, Mathematikern und Nichtmathematikern, die mir in der einen oder anderen Art und Weise beim Schreiben dieser Arbeit geholfen haben.

Gregor Weingart
Bonn, im August 1998

# Kapitel 2

# Minimale isometrische Immersionen

Nach einem Satz von Calabi [Cal] kann die zweidimensionale Sphäre $S^2$ nur in die geradedimensionalen Sphären $S^{2k} \subset \mathbb{R}^{2k+1}$, $k \geq 1$, minimal und isometrisch so abgebildet werden, daß das Bild bereits den ganzen Vektorraum $\mathbb{R}^{2k+1}$ aufspannt, wobei sich je zwei solcher Immersionen nur um eine Isometrie des umgebenden $\mathbb{R}^{2k+1}$ unterscheiden. Dies bedeutet unter anderem, daß jede innere Isometrie der $S^2$ zu einer äußeren Isometrie des ganzen umgebenden $\mathbb{R}^{2k+1}$ fortgesetzt werden kann. Hingegen besitzen minimale Untermannigfaltigkeiten der Sphären im allgemeinen weder eine eindeutige minimale isometrische Einbettung noch lassen sich ihre inneren Isometrien stets zu äußeren Isometrien der umgebenden Sphäre fortsetzen.

Eine Konstruktion von do Carmo–Wallach [dC&W] beschreibt die Menge aller Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen der Sphären in runde Sphären unter äußeren Isometrien. Eine neue Interpretation dieser Konstruktion gibt eine einfache, geometrische Beschreibung der Menge aller Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen einer beliebigen, kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit in runde Sphären unter einer analogen Äquivalenzrelation. Beide Konstruktionen beruhen einzig auf einem Lemma von Takahashi [Ta], das die minimalen unter den isometrischen Immersionen in Sphären durch eine elliptische Differentialgleichung charakterisiert:

**Lemma 2.1** *(Lemma von Takahashi [Ta])*
*Sei $(N, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\phi : N \longrightarrow S_W \subset W$ eine isometrische Immersion in die Sphäre $S_W$ vom Radius $r$ eines euklidischen Vektorraums $W$ mit Metrik $\langle\ ,\ \rangle_W$, aufgefaßt als Schnitt des trivialen $W$–Bündels über $N$. $\phi$ ist genau dann minimal, wenn es Eigenschnitt des horizontalen Laplaceoperators $\Delta$ zum Eigenwert $\lambda = \frac{\dim N}{r^2}$ ist.*

**Beweis:** Als triviales Vektorbündel trägt das $W$–Bündel über $N$ den trivialen Zusammenhang, der für Vektorfelder $X$, $Y$ auf $N$ und den Schnitt $\phi$ einfach als $X\phi$, $Y\phi$ usw. geschrieben werde. In diesem Sinne gilt für einen Punkt $p \in N$:

$$\phi_* : T_pN \longrightarrow T_{\phi(p)}W \cong W, \qquad X \longmapsto (X\phi)(p)$$

Dementsprechend gibt es eine orthogonale Zerlegung von $W$ in

$$W \quad \cong \quad \underbrace{\mathbb{R}\phi(p)}_{\text{radial}} \oplus \underbrace{\phi_*(T_pN)}_{\text{tangential}} \oplus \underbrace{\phi_*(T_pN)^\perp}_{\text{normal}}$$

wo $\phi_*(T_pN)^\perp$ das Normalenbündel zu $\phi_*(T_pN)$ in $T_{\phi(p)}S_W$ ist. Die zweite Fundamentalform $\mathrm{II}$ scheint dann definitionsgemäß in der entsprechenden Zerlegung von

$$XY\phi \;=\; \frac{1}{r^2}\langle XY\phi,\, \phi\rangle_W\phi \oplus \phi_*(\nabla_X Y) \oplus \mathrm{II}(X,Y)$$

auf, denn wegen $\langle\phi,\, \phi\rangle_W \;=\; r^2$ ist $\frac{1}{r^2}\langle XY\phi,\, \phi\rangle_W\phi$ der radiale Teil, und $\phi_*(\nabla_X Y)$ ist der tangentiale Teil, weil $\phi$ eine Isometrie ist. Mittels $\langle XY\phi,\, \phi\rangle_W = -\langle X\phi,\, Y\phi\rangle_W = -g(X,Y)$ erhält man damit zunächst

$$\mathrm{II}(X,Y) \;=\; XY\phi - (\nabla_X Y)\phi + \frac{1}{r^2}g(X,Y)\phi$$

und beim Bilden der Spur über $X$, $Y$ schließlich:

$$\mathrm{tr}_g\mathrm{II} = -\Delta\phi + \frac{\dim N}{r^2}\phi \quad \square$$

**Definition 2.2** *(Äquivalenz minimaler isometrischer Immersionen)*
*Seien $\phi : N \longrightarrow S_W \subset W$ und $\tilde\phi : N \longrightarrow S_{\tilde W} \subset \tilde W$ zwei minimale isometrische Immersionen in Sphären, deren Bilder Unterräume* $\mathrm{Spann}\{\phi\}$ *und* $\mathrm{Spann}\{\tilde\phi\}$ *von $W$ bzw. $\tilde W$ aufspannen. Dann heißen $\phi$ und $\tilde\phi$ äquivalent, geschrieben $\phi \sim \tilde\phi$, wenn es eine Isometrie $F : \mathrm{Spann}\{\phi\} \longrightarrow \mathrm{Spann}\{\tilde\phi\}$ gibt mit $\tilde\phi = F \circ \phi$.*

Dies ist die schwächste, sinnvolle Äquivalenzrelation. Auf ihren Äquivalenzklassen operiert die Gruppe aller Isometrien von $N$ durch Verknüpfung einer Isometrie $\gamma :\; N \longrightarrow N$ mit einem Repräsentanten $\phi :\; N \longrightarrow W$. Im allgemeinen sind $\phi$ und $\phi\circ\gamma$ nicht äquivalent, es sei denn, die Isometrie $\gamma$ von $N$ läßt sich zu einer Isometrie des ganzen, umgebenden Vektorraums $W$ fortsetzen. Anstatt der obigen Äquivalenz könnte man deshalb auch den stärkeren Äquivalenzbegriff untersuchen, der neben Isometrien der Zielvektorräume auch Isometrien von $N$ zuläßt. Implizit spielt dieser stärkere Begriff bei den folgenden Überlegungen durchaus eine Rolle, aber die schwächere Äquivalenz erlaubt die Konstruktion eines „geometrischen" Modulraums.

Sei nun $\phi : N \longrightarrow S_W \subset W$ eine minimale isometrische Immersion in eine Sphäre vom Radius $r$, dann ist $\phi$ ein Eigenschnitt des Laplaceoperators $\Delta$ zum Eigenwert $\lambda = \frac{\dim N}{r^2}$. Also kann man $\phi$ mit Eigenfunktionen im Eigenraum $E_\lambda = \{f \in C^\infty N :\; \Delta f = \lambda f\}$ des skalaren Laplaceoperators auf $N$ vergleichen, und dazu die kanonische Abbildung betrachten:

$$\phi^* : W^* \longrightarrow E_\lambda, \quad \alpha \longmapsto \alpha\circ\phi$$

Genau dann ist $\phi^*$ injektiv, wenn das Bild von $\phi$ den ganzen Zielvektorraum $W$ aufspannt, nach Definition charakterisiert diese Eigenschaft die vollen minimalen isometrischen Immersionen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß der Begriff „voll" in der Literatur zum Thema nicht einheitlich benutzt und gelegentlich mit dem weiter unten eingeführten Begriff der erzeugenden minimalen isometrischen Immersion verwechselt wird. Offensichtlich kann man nun jede minimale isometrische Immersion als volle Immersion in den von ihrem Bild aufgespannten Unterraum $(\mathrm{Kern}\,\phi^*)^\perp \subset W$ auffassen, die resultierende kanonische

Abbildung $\phi^* : (\mathrm{Kern}\,\phi^*)^{\perp *} \cong W^*/\mathrm{Kern}\,\phi^* \longrightarrow E_\lambda$ ist denn auch injektiv nach Definition. Deshalb wird im folgenden angenommen, daß alle minimalen isometrischen Immersionen auch voll sind, solange nicht explizit das Gegenteil erlaubt bleibt. In diesem Sinne sind zwei minimale isometrische Immersionen $\phi$ und $\tilde{\phi}$ genau dann äquivalent, wenn es eine Isometrie $F$ der Zielvektorräume gibt mit $\tilde{\phi} = F \circ \phi$.

**Definition 2.3** *(Erzeugende minimale isometrische Immersionen)*
*Eine minimale isometrische Immersion $\phi$ zum Eigenwert $\lambda$ heißt erzeugende minimale isometrische Immersion für diesen Eigenwert, wenn das Bild von $\phi^*$ im Eigenraum $E_\lambda$ die Bilder aller kanonischen Abbildungen $\tilde{\phi}^*$ zu minimalen isometrischen Immersionen $\tilde{\phi}$ zu diesem Eigenwert enthält.*

Trivialerweise erfüllt eine minimale isometrische Immersion diese Eigenschaft, wenn $\phi^*$ surjektiv ist. Obwohl dies in konkreten Beispielen genau darauf hinausläuft, scheint diese vorsichtigere Definition für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten dennoch angebracht, denn so und nur so charakterisiert der Begriff der erzeugenden minimalen isometrischen Immersionen die Immersionen mit einer in einem gewissen Sinne universellen Eigenschaft. Es stellt sich nämlich heraus, daß wenn mindestens eine so auch immer eine erzeugende minimale isometrische Immersion zu einem Eigenwert $\lambda$ existiert und jede weitere aus ihr durch Verknüpfen mit einer linearen und surjektiven Abbildung der Zielvektorräume entsteht. Insbesondere sind alle erzeugenden minimalen isometrischen Immersionen zu einem Eigenwert über Isomorphismen ihrer Zielvektorräume verschränkt und somit als differenzierbare Abbildungen äquivalent.

**Definition 2.4** *(Der Modul einer minimalen isometrischen Immersion)*
*Die kanonische Abbildung $\phi^* : W^* \longrightarrow E_\lambda$ einer minimalen isometrischen Immersion $\phi$ bildet nach Fortsetzung auf zweite symmetrische Potenzen die Metrik $\langle\ ,\ \rangle_W \in \mathrm{Sym}^2 W^*$ des Zielraums auf eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform ab*

$$\mathrm{Sym}^2\phi^* : \quad \mathrm{Sym}^2 W^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 E_\lambda, \qquad \langle\ ,\ \rangle_W \longmapsto G$$

*die als Modul von $\phi$ bezeichnet wird. Dieser Modul $G$ hängt nur von der Einschränkung der Metrik $\langle\ ,\ \rangle_W$ auf den Unterraum $\mathrm{Spann}\{\phi\}$ und somit nur von der vollen minimalen isometrischen Immersion zu $\phi$ ab.*

Als Bild des positiv definiten Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_W$ von $W$ unter der Fortsetzung der Abbildung $\phi^*$ ist $G$ auf jeden Fall positiv semidefinit. Positiv definit ist $G$ hingegen nur, wenn $\phi^*$ surjektiv und $\phi$ damit insbesondere erzeugend ist. Zwei äquivalente minimale isometrische Immersionen $\phi \sim \tilde{\phi}$ bestimmen denselben Modul, denn wegen $\tilde{\phi} = F \circ \phi$ gilt natürlich $\tilde{\phi}^* = \phi^* \circ F^*$ und $(\mathrm{Sym}^2 F^*)\langle\ ,\ \rangle_{\tilde{W}} = \langle\ ,\ \rangle_W$ ist gerade die Bedingung der Isometrie an $F$. Entscheidend für die Konstruktion des Modulraums ist nun, daß man $\phi$ bis auf Äquivalenz aus seinem Modul $G$ rekonstruieren kann. Um $\phi$ zurückzugewinnen, muß man $\phi^*$ zunächst dualisieren, und bekommt so $(\phi^*)^* : E_\lambda^* \longrightarrow W$. Offensichtlich gibt es nun eine Möglichkeit $N$ kanonisch nach $E_\lambda^*$ abzubilden, nämlich als Diracsches Deltafunktional:

$$\begin{array}{ccccc} N & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} & E_\lambda^* & \stackrel{(\phi^*)^*}{\longrightarrow} & W \\ p & \longmapsto & \delta_p & \longmapsto & ? \end{array}$$

Das Ergebnis sollte natürlich $\phi(p)$ sein, und tatsächlich gilt für alle $\alpha \in W^*$:

$$\langle \alpha,\, (\phi^*)^*\delta_p \rangle \;=\; \langle \alpha \circ \phi,\, \delta_p \rangle \;=\; \langle \alpha,\, \phi(p) \rangle$$

Die einzige Metrik, die $(\phi^*)^*$ zu einer Isometrie machen kann, ist natürlich der Modul $\phi^*\langle\ ,\ \rangle_W = G$ von $\phi$. Dazu muß man aber zuvor seinen Kern $G := \{\mathfrak{F} \in E_\lambda^* :\ G(\mathfrak{F}, \cdot) = 0\}$ herausdividieren, denn $G$ ist positiv semidefinit und sein Kern deswegen gerade die Menge aller $\mathfrak{F} \in E_\lambda^*$ mit $G(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = 0 = \langle (\phi^*)^*\mathfrak{F},\, (\phi^*)^*\mathfrak{F} \rangle_W$:

$$N \xrightarrow{\delta} E_\lambda^* \xrightarrow{\pi} E_\lambda^*/\mathrm{Kern}\, G \xrightarrow{(\phi^*)^*} W$$

$G$ induziert ein positiv definites Skalarprodukt auf $E_\lambda^*/\mathrm{Kern}\, G$, das $(\phi^*)^*$ zu einer Isometrie macht, so daß $\pi \circ \delta$ nach Definition äquivalent zu $\phi$ ist. Insbesondere wird die differenzierbare Abbildung zu einem Modul $G$ nur von dem Unterraum $\mathrm{Kern}\, G$ festgelegt, $G$ bestimmt lediglich die Metrik auf dem zugehörigen Zielraum $E_\lambda^*/\mathrm{Kern}\, G$. Diese Rekonstruktion legt jedenfalls eindeutig fest, wie zu einer beliebig vorgegebenen symmetrischen Bilinearform $G \geq 0$ in $\mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ die Abbildung $\pi \circ \delta$ zu definieren ist, und es stellt sich nun umgekehrt die Frage, welche zusätzlichen Bedingungen $G$ erfüllen muß, damit diese Abbildung tatsächlich eine minimale isometrische Immersion und $G$ damit ein Modul wird. Die Antwort auf diese Frage ist offensichtlich:

**Satz 2.5** *(Charakterisierung der Moduli)*
*Eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform $G \in \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ ist genau dann der Modul einer minimalen isometrischen Immersion, wenn*

$$\begin{array}{llcll} 1. & G(\ \delta_p\ ,\ \delta_p\ ) & = & \frac{\dim N}{\lambda} & \text{für alle } p \in N \\ 2. & G(X\delta_p, Y\delta_p) & = & g(X, Y) & \text{für alle } p \in N \text{ und } X,\, Y \in T_pN \end{array}$$

*Die erste Bedingung stellt sicher, daß das Bild von $\pi \circ \delta$ in der Sphäre vom Radius $\sqrt{\frac{\dim N}{\lambda}}$ liegt, und die zweite bedeutet gerade, daß $\pi \circ \delta$ isometrisch ist. Das Lemma 2.1 von Takahashi stellt dann bereits sicher, daß $\pi \circ \delta$ auch minimal ist.*

Von der Frage abgesehen, ob es für einen gewählten Eigenwert $\lambda$ des skalaren Laplaceoperators auf $N$ Lösungen $G$ dieser Gleichungen gibt oder nicht, kann man ganz allgemein schon einige Aussagen über die Menge der Lösungen machen, das heißt über die Form des Modulraums:

**Satz 2.6** *(Die Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ von do Carmo–Wallach [dC&W])*
*Wenn der Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$ der minimalen isometrischen Immersionen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $N$ zu einem gewählten Eigenwert $\lambda$ des skalaren Laplaceoperators nicht leer ist, dann ist er der Schnitt des positiven Kegels $P^+E_\lambda := \{G \in \mathrm{Sym}^2 E_\lambda :\ G \geq 0\}$ mit einem affinen Unterraum $M \subset \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ modelliert nach dem Vektorunterraum $M_0 \subset \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ der Lösungen $G_0$ der Gleichungen:*

$$\begin{array}{llcll} 1. & G_0(\ \delta_p\ ,\ \delta_p\ ) & = & 0 & \text{für alle } p \in N \\ 2. & G_0(X\delta_p, Y\delta_p) & = & 0 & \text{für alle } p \in N \text{ und } X,\, Y \in T_pN \end{array}$$

Als Schnitt zweier abgeschlossener, konvexer Mengen, des positiven Kegels $P^+E_\lambda$ und des affinen Unterraums $M$ in $\operatorname{Sym}^2 E_\lambda$, sind die Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ von do Carmo–Wallach ebenfalls abgeschlossen und konvex. Außerdem sind alle diese Modulräume kompakt. Um dies zu beweisen benötigt man das Lemma:

**Lemma 6.11** *(Kompakte Kegelschnitte)*
*Wenn der Schnitt des positiven Kegels $P^+E := \{G \in \operatorname{Sym}^2 E : \ G \geq 0\}$ mit einem affinen Unterraum $M$ modelliert nach einem Unterraum $M_0$ nicht leer ist, dann ist er kompakt genau dann, wenn $P^+E \cap M_0 = \{0\}$.*

Der Beweis dieses Lemmas findet sich im Kapitel 6, das sich allgemein mit der Geometrie von Schnitten affiner Unterräume mit positiven Kegeln befaßt. An dieser Stelle sei nur bemerkt, daß die Voraussetzung $P^+E \cap M_0 = \{0\}$ äquivalent dazu ist, daß für jeden eindimensionalen affinen Unterraum $\tilde{M} \subset M$ der Schnitt $P^+E \cap \tilde{M}$ kompakt oder leer ist. Mit Hilfe der Konvexität von $P^+E \cap M$ kann man daraus bereits folgern, daß auch $P^+E \cap M$ kompakt ist. Als unmittelbare Folgerung erhält man:

**Satz 2.7** *(Kompaktheit der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ [dC&W])*
*Wenn der Modulraum zu einem gewählten Eigenwert $\lambda$ nicht leer ist, dann ist er kompakt.*

**Beweis:** Nach dem Trägheitssatz von Sylvester hat ein positiv semidefinites $G_0 \geq 0$ in $M_0$ eine Darstellung $G_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^m \psi_\nu^2$ mit $m := \operatorname{Rang} G_0$ linear unabhängigen $\psi_\nu \in E_\lambda$, die letztlich reelle Funktionen auf $N$ sind. Deshalb gilt

$$G_0(\delta_p, \delta_p) \ = \ 0 \ = \ \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m} \langle \psi_\nu^2, \, (\delta_p)^2 \rangle \ = \ \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu(p)^2$$

für alle $p \in N$. Das kann aber nur sein, wenn $m = 0$ und somit $G_0 = 0$ ist. Die erste Bedingung $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ für alle $p \in N$ alleine stellt also bereits sicher, daß der Modulraum kompakt ist. $\square$

Wenn eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $N$ zu einem Eigenwert $\lambda > 0$ überhaupt eine minimale isometrische Immersion besitzt, dann gibt es auch eine erzeugende minimale isometrische Immersion zu diesem Eigenwert. Der Beweis benutzt ebenfalls eine ganz allgemeine, geometrische Eigenschaft von Schnitten affiner Unterräume mit positiven Kegeln, die erst im Kapitel 6 bewiesen wird:

**Lemma 6.9** *(Elemente maximalen Rangs in Kegelschnitten)*
*Wenn der Schnitt $P^+E \cap M$ eines affinen Unterraums $M \subset \operatorname{Sym}^2 E$ mit dem positiven Kegel $P^+E \subset \operatorname{Sym}^2 E$ nicht leer ist, dann haben alle Elemente $G$ von maximalem Rang in diesem Schnitt den gleichen Kern in $E^*$, und dieser gemeinsame Kern ist auch im Kern jedes beliebigen Elements $\tilde{G}$ von $P^+E \cap M$ enthalten.*

**Satz 2.8** *(Existenz erzeugender minimaler isometrischer Immersionen)*
*Wenn der Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$ der minimalen isometrischen Immersionen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $N$ zu einem bestimmten Eigenwert $\lambda$ nicht leer ist, dann besitzt $N$ auch eine erzeugende minimale isometrische Immersion $\phi$ zu diesem Eigenwert. Jede andere volle minimale isometrische Immersion $\tilde{\phi}$ entsteht daraus durch Verknüpfung mit einer linearen und surjektiven Abbildung der Zielvektorräume.*

**Beweis:** Jede minimale isometrische Immersion $\tilde{\phi} : N \longrightarrow S_W \subset W$ mit Modul $\tilde{G}$ läßt sich schreiben als:

$$\tilde{\phi} : N \xrightarrow{\delta} E_\lambda^* \xrightarrow{\pi} E_\lambda^* / {}_{\mathrm{Kern}\, \tilde{G}} \xrightarrow{(\tilde{\phi}^*)^*} W$$

Wenn $G$ ein Modul maximalen Rangs in $\mathcal{M}_\lambda \neq \emptyset$ ist, dann faktorisiert $\tilde{\phi}$ über die minimale isometrische Immersion $\phi : N \longrightarrow E_\lambda^*/\mathrm{Kern}\, G$ wegen $\mathrm{Kern}\,(\tilde{\phi}^*)^* = \mathrm{Kern}\, \tilde{G} \supset \mathrm{Kern}\, G$. Für eine volle Immersion ist $\tilde{\phi}^*$ aber injektiv und folglich $(\tilde{\phi}^*)^*$ surjektiv. $\square$

Der abstrakten Konstruktion des Standardrepräsentanten $\pi \circ \delta : N \longrightarrow E_\lambda^*/\mathrm{Kern}\, G$ einer Äquivalenzklasse minimaler isometrischer Immersionen zu einem vorgegebenen Modul $G$ aus $\mathcal{M}_\lambda$ kann man alternativ ganz konkrete Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse zur Seite stellen. Diese neuen Repräsentanten sind zwar in keinerlei Weise eindeutig, dafür können sie explizit in Koordinaten hingeschrieben werden:

**Bemerkung 2.9** *(Alternative Realisierung eines Moduls)*
*Jede positiv semidefinite Bilinearform $G \in \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ hat nach dem Trägheitssatz von Sylvester eine Darstellung $G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^m \psi_\nu^2$ als Summe von $m := \mathrm{Rang}\, G$ Quadraten linear unabhängiger $\psi_\nu \in E_\lambda$, die man als Komponenten einer vollen, glatten Abbildung*

$$\psi : N \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad p \longmapsto (\, \psi_1(p), \, \ldots \, , \psi_m(p) \,)$$

*auffassen kann. Die kanonische Abbildung $\psi^*$ bildet dann die Standardlinearformen $de_\nu$ des $\mathbb{R}^m$ auf die $\psi_\nu$ und das Standardskalarprodukt $\frac{1}{2}\sum de_\nu^2$ des $\mathbb{R}^m$ damit auf $G$ ab. Deshalb ist $\psi$ eine minimale isometrische Immersion mit dem gewünschten Modul $G$. Aufgrund der Ambivalenz der Darstellung von $G$ als Summe von Quadraten ist $\psi$ offenbar nicht eindeutig, jedoch wird diese Ambivalenz gerade durch die Operation der orthogonalen Gruppe $\mathbf{O}_m\mathbb{R}$ vermittelt, so daß die Äquivalenzklasse von $\psi$ nur von dem Modul $G$ abhängt.*

Im Vergleich zur oben vorgestellten, neuen Interpretation der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ benutzt die ursprüngliche Konstruktion von do Carmo–Wallach [dC&W] für die Sphären $S^{n-1}$ explizit die sogenannte Standardimmersion $\psi = (\, \psi_1, \, \ldots \, , \psi_m \,) : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ zum gewählten Eigenwert $\lambda > 0$, deren Komponenten $\psi_\nu$ eine Orthonormalbasis von $E_\lambda$ bezüglich des geeignet reskalierten $L^2$–Skalarprodukts auf $E_\lambda$ bilden. Jede andere minimale isometrische Immersion läßt sich dann aus dieser notgedrungen erzeugenden Standardimmersion durch Verknüpfung mit einer linearen, surjektiven Abbildung $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ gewinnen, die durch eine $\tilde{m} \times m$–Matrix $A_{\nu\mu}$ beschrieben werden kann. Die kanonische Abbildung zu dieser minimalen isometrischen Immersion $A \circ \psi$ bildet die Standardlinearformen $de_\nu$ des $\mathbb{R}^{\tilde{m}}$ auf die Funktionen $\sum_\mu A_{\nu\mu}\psi_\mu$ und das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^{\tilde{m}}$ somit auf den Modul ab:

$$G \;:=\; \frac{1}{2}\sum_{\nu\mu\rho}(A_{\nu\mu}\psi_\mu)\cdot(A_{\nu\rho}\psi_\rho) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu\rho}(A^TA)_{\mu\rho}\psi_\mu \cdot \psi_\rho$$

In der Konstruktion von do Carmo–Wallach wird die Äquivalenzklasse von $A \circ \psi$ nicht durch ihren Modul $G$, sondern durch die Matrix $A^TA - I$ repräsentiert, wobei $I$ die $m \times m$–Einheitsmatrix bezeichnet. Aber $A^TA$ ist im Gegensatz zum Modul $G$ nicht kanonisch zu der Äquivalenzklasse der minimalen isometrischen Immersion $A \circ \psi$ assoziiert, denn es hängt offensichtlich auch von der Auswahl der Orthonormalbasis $\{\psi_\nu\}$ für die Standardimmersion ab. Insofern findet die Klasse von $A \circ \psi$ niemals ihren endgültigen Platz im Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$, und es wird schwieriger, zwei minimale isometrische Immersionen auseinanderzuhalten.

Wenn man weiß, daß eine gewisse Riemannsche Mannigfaltigkeit $N$ minimale isometrische Immersionen in Sphären besitzt, so kann man sich fragen, ob diese Immersionen über Quotienten $N/\Gamma$ von $N$ durch eine diskrete, fixpunktfreie Gruppe $\Gamma$ von Isometrien faktorisieren. Insbesondere ist das der Fall, wenn das Bild selbst wieder eine Mannigfaltigkeit und die Riemannsche Überlagerung $\phi : N \longrightarrow \phi(N)$ normal ist. Letzteres ist zum Beispiel bei einfach zusammenhängendem $N$ stets erfüllt. Weil die Eigenräume $E_\lambda$ der skalaren Laplaceoperatoren auf $N$ und $N/\Gamma$ in enger Beziehung stehen, gibt es nun eine ebenso einfache Beziehung zwischen den Modulräumen $\mathcal{M}_\lambda$ der minimalen isometrischen Immersionen:

**Bemerkung 2.10** *(Minimale isometrische Immersionen von Quotienten)*
*Der Eigenraum des skalaren Laplaceoperators $\Delta$ zum Eigenwert $\lambda$ auf dem Quotienten $N/\Gamma$ ist gerade der Raum der $\Gamma$–invarianten Eigenfunktionen $(E_\lambda)_\Gamma$ auf $N$. In diesem Sinne bildet die zu einer minimalen isometrischen Immersion $\phi : N/\Gamma \longrightarrow W$ gehörende kanonische Abbildung $\phi^* : W^* \longrightarrow (E_\lambda)_\Gamma$ die Metrik von $W$ auf einen Modul $G$ in $\mathrm{Sym}^2(E_\lambda)_\Gamma \subset \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ ab. Anders ausgedrückt ist der Modulraum der minimalen isometrischen Immersionen des Quotienten $N/\Gamma$ der Schnitt des Modulraums $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ von $N$ mit dem Unterraum $\mathrm{Sym}^2(E_\lambda)_\Gamma \subset \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$. Insbesondere geht jede volle minimale isometrische Immersion des Quotienten $N/\Gamma$ in eine Sphäre der Dimension höchstens $\dim (E_\lambda)_\Gamma - 1$.*

Zum Schluß dieses Kapitels sei noch ein allgemeines Argument vorgestellt, mit dem man Beispiele für minimale isometrische Immersionen konstruieren kann, deren Bilder keine glatten Untermannigfaltigkeiten sind. Es ist vielleicht nicht so sehr überraschend, daß es tatsächlich solche minimalen isometrischen Immersionen mit Selbstschnitten gibt, aber ein Nachteil der etwa in Kapitel 3 erläuterten Grundkonstruktionen ist, daß sie stets minimale isometrische Immersionen ergeben, deren Bilder eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind. Für dieses Argument sei zunächst angemerkt, daß alle minimalen isometrischen Immersionen zu den Moduli $tG_1 + (1-t)G_2$ mit $0 < t < 1$ auf der Verbindungsstrecke zweier $G_1$ und $G_2$ aus $\mathcal{M}_\lambda$ wegen $\mathrm{Kern}\,(tG_1 + (1-t)G_2) = \mathrm{Kern}\,G_1 \cap \mathrm{Kern}\,G_2$ durch dieselbe differenzierbare Abbildung $N \longrightarrow E^*_\lambda/(\mathrm{Kern}\,G_1 \cap \mathrm{Kern}\,G_2)$ realisiert werden. Deren Zielraum kann man als Unterraum von $E^*_\lambda/\mathrm{Kern}\,G_1 \oplus E^*_\lambda/\mathrm{Kern}\,G_2$ auffassen [T&Z] vermöge der exakten Sequenz

$$0 \to E^*_\lambda/_{\mathrm{Kern}\,G_1 \cap \mathrm{Kern}\,G_2} \longrightarrow E^*_\lambda/_{\mathrm{Kern}\,G_1} \oplus E^*_\lambda/_{\mathrm{Kern}\,G_2} \longrightarrow E^*_\lambda/_{\mathrm{Kern}\,G_1 + \mathrm{Kern}\,G_2} \to 0$$

die so gewählt werden kann, daß $\mathfrak{F} + \mathrm{Kern}\,G_1 \cap \mathrm{Kern}\,G_2$ auf $(\mathfrak{F} + \mathrm{Kern}\,G_1) \oplus (\mathfrak{F} + \mathrm{Kern}\,G_2)$ abgebildet wird. In diesem Sinne faktorisieren die minimalen isometrischen Immersionen zu den Moduli $tG_1 + (1-t)G_2$ mit $0 < t < 1$ über die diagonale Immersion von $N$ in das Produkt der Bilder der Immersionen zu $G_1$ und $G_2$:

**Satz 2.11** *(Das Tunnelargument)*
*Seien $G_1$ und $G_2$ zwei Moduli minimaler isometrischer Immersionen von $N$ zum gleichen Eigenwert $\lambda$, deren Bilder glatte Quotienten von $N$ durch diskrete, fixpunktfreie Gruppen $\Gamma_1$*

*bzw. $\Gamma_2$ von Isometrien sind. Ist dann $N$ zusammenhängend, so sind die Bilder der minimalen isometrischen Immersionen zu den Moduli $tG_1 + (1-t)G_2$ mit $0 < t < 1$ auf der Verbindungsstrecke zwischen $G_1$ und $G_2$ genau dann glatte Mannigfaltigkeiten, wenn keine Isometrie in der Menge $\Gamma_1\Gamma_2^{-1} = \{\gamma_1\gamma_2^{-1} : \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2\}$ außer der Identität Fixpunkte in $N$ besitzt. In diesem Fall ist das Bild der Quotient $N/(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.*

**Beweis:** Nach der oben vorgestellten Konstruktion des Zielraums der minimalen isometrischen Immersionen zu den Moduli $tG_1 + (1-t)G_2$ auf der Verbindungsstrecke ist das Bild genau dann eine glatte Untermannigfaltigkeit, wenn das Bild der diagonalen Immersion $\Delta : N \longrightarrow N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2$, $p \longmapsto (p\Gamma_1, p\Gamma_2)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2$ ist. Natürlich ist das zum Beispiel erfüllt, wenn $\Gamma_1 = \Gamma_2 =: \Gamma$. In diesem Fall gibt es auch keine Isometrie in $\Gamma\Gamma^{-1} = \Gamma$ mit Fixpunkten außer der Identität einfach aufgrund der Voraussetzungen an $\Gamma$. Die möglichen Singularitäten des Bildes der diagonalen Immersion kommen also daher, daß $N \times N$ durch zwei verschiedene Gruppen geteilt wird.

Vor dem eigentlichen Beweis sei bemerkt, daß die Fixpunkte der Isometrien in $\Gamma_1\Gamma_2^{-1}$ in enger Beziehung zu Paaren von Urbildern eines Punktes von $N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2$ in $N$ stehen. Sind nämlich $p$ und $\tilde{p}$ aus $N$ zwei Urbilder eines Doppelpunkts $(p\Gamma_1,\, p\Gamma_2) = (\tilde{p}\Gamma_1,\, \tilde{p}\Gamma_2)$, dann gibt es $\gamma_1 \in \Gamma_1$ und $\gamma_2 \in \Gamma_2$ mit $\tilde{p} = p\gamma_1 = p\gamma_2$, und $p$ ist ein Fixpunkt der Isometrie $\gamma_1\gamma_2^{-1}$. Umgekehrt sind $p$ und $p\gamma_1 = p\gamma_2$ für einen Fixpunkt $p$ einer Isometrie $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in \Gamma_1\Gamma_2^{-1}$ zwei verschiedene Urbilder des Doppelpunkts $(p\Gamma_1,\, p\Gamma_2)$. Gibt es nun keine Isometrie in $\Gamma_1\Gamma_2^{-1}$ mit Fixpunkten außer der Identität, dann sind alle Paare von Urbildern eines Doppelpunkts von der Form $p$ und $p\gamma_1 = p\gamma_2$ für ein beliebiges $p \in N$ und jede Darstellung $\gamma_1\gamma_2^{-1} = 1$ der Identität von $N$ mit $\gamma_1 = \gamma_2 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Somit ist das Bild der diagonalen Immersion $\Delta$ gerade der Quotient $N/(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ und infolgedessen glatt.

Andernfalls gibt es eine Isometrie $\gamma_1\gamma_2^{-1} \neq 1$ mit Fixpunkt $p$, und somit in $N$ mindestens zwei Urbilder $p$ und $\tilde{p} := p\gamma_1 = p\gamma_2$ des Punkts $(p\Gamma_1,\, p\Gamma_2)$ unter der diagonalen Immersion $\Delta$. Wenn nun das Bild von $N$ unter $\Delta$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2$ wäre, dann müßten die Bilder der Tangentialräume $T_pN$ und $T_{\tilde{p}}N$ unter dem Differential von $\Delta$ als Unterräume von $T_{(p\Gamma_1, p\Gamma_2)}(N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2)$ mit dem Tangentialraum dieser Untermannigfaltigkeit und insbesondere untereinander übereinstimmen. Auf jeden Fall faktorisiert nun die diagonale Immersion $\Delta$ über die Diagonale $N \longrightarrow N \times N$ und die Quotientenabbildung $N \times N \longrightarrow N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2$. Infolgedessen kann man die Bilder von $T_pN$ und $T_{\tilde{p}}N$ in $T_{(p\Gamma_1, p\Gamma_2)}(N/\Gamma_1 \times N/\Gamma_2)$ mittels der durch die Quotientenabbildung induzierten Identifikation

$$T_pN \oplus T_pN \;\cong\; T_{(p\Gamma_1, p\Gamma_2)}(N/_{\Gamma_1} \times N/_{\Gamma_2}) \;\cong\; T_{\tilde{p}}N \oplus T_{\tilde{p}}N$$

auch als Graphen $\{(X, X) : X \in T_pN\}$ der Identität von $T_pN$ bzw. $T_{\tilde{p}}N$ auffassen. Allerdings ist der resultierende Isomorphismus $T_{\tilde{p}}N \oplus T_{\tilde{p}}N \longrightarrow T_pN \oplus T_pN$ einfach durch $\gamma_{1*}^{-1} \oplus \gamma_{2*}^{-1}$ gegeben, und bildet deshalb den Graphen der Identität von $T_{\tilde{p}}N$ auf den Graphen $\{(\gamma_{1*}^{-1} X, \gamma_{2*}^{-1} X) : X \in T_{\tilde{p}}N\} = \{(X, \gamma_{2*}^{-1}\gamma_{1*}X) : X \in T_pN\}$ des Differentials der Isometrie $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 = \gamma_1\gamma_2^{-1}$ im Tangentialraum $T_pN$ des Fixpunkts $p$ ab. Aber auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $N$ ist dieses Differential wegen $\gamma_1\gamma_2^{-1} \neq 1$ nach Voraussetzung nicht die Identität und hat damit auch einen anderen Graphen. $\square$

Es zeigt sich, daß man die Voraussetzungen an die beiden Gruppen $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$, daß keine Isometrie in $\Gamma_1\Gamma_2^{-1}$ außer der Identität einen Fixpunkt besitzt, auf der dreidimensionalen

Sphäre $N = S^3$ leicht verletzten kann, indem man einfach zwei konjugierte Untergruppen in den beiden $\mathbf{SU}_2$–Faktoren der Isometriegruppe $\mathbf{SO}_4\mathbb{R} = \mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2/\mathbb{Z}_2$ wählt. Ein Quotient der $S^3$ durch eine diskrete, fixpunktfreie Untergruppe eines der beiden $\mathbf{SU}_2$–Faktoren ist eine homogene Raumform und besitzt damit eine minimale isometrische Immersion nach den Ergebnissen von DeTurck–Ziller [DT&Z]. Also liegen auf der Verbindungsstrecke zweier geeigneter $G_1$ und $G_2$ aus $\mathcal{M}_\lambda$ die Moduli von minimalen isometrischen Immersionen der dreidimensionalen Sphäre $S^3$ mit Selbstschnitten.

# Kapitel 3

# Beispiele und Konstruktionen

Die Konstruktion des Modulraums $\mathcal{M}_\lambda$ minimaler isometrischer Immersionen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $N$ zum Eigenwert $\lambda$ hat die Frage offengelassen, ob dieser Modulraum überhaupt eine Klasse von Immersionen enthält. Um Beispiele für Klassen im Modulraum $\mathcal{M}_\lambda$ aufzuzeigen, gibt es im wesentlichen zwei verschiedene Konstruktionen, die erste von Takahashi [Ta], die zweite von Mashimo [Ma].

Beide haben gemeinsam, daß auf die eine oder andere Art das Lemma von Schur benutzt wird. Insofern benötigen beide Konstruktionen eine irreduzible Darstellung einer Gruppe. Bei der ersten Konstruktion wird dementsprechend vorausgesetzt, daß der Tangentialraum eines homogenen Raums eine irreduzible Darstellung der Isotropiegruppe ist, während für die zweite Konstruktion der Zielraum $W$ der Immersion selbst eine isotypische, das heißt eine direkte Summe äquivalenter, irreduzibler Darstellungen der kompakten Liegruppe $N = \mathcal{G}$ sein muß.

## 3.1 Die Konstruktion von Takahashi

Diese Konstruktion zeigt, daß eine bestimmte Klasse kompakter, homogener Räume zu jedem Eigenwert $\lambda > 0$ des skalaren Laplaceoperators eine minimale isometrische Immersion besitzt:

**Definition 3.1** *(Isotropie–irreduzible homogene Räume)*
*Ein isotropie–irreduzibler homogener Raum ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $N$ mit einer transitiven Liegruppe $\mathcal{G}$ von Isometrien*

$$N \;\cong\; \mathcal{G}/_{\mathcal{H}_p} \qquad\qquad \mathcal{H}_p := \{\gamma \in \mathcal{G} :\; \gamma p = p\} \qquad \textit{mit } p \in N$$

*so daß die Isotropiegruppe $\mathcal{H}_p$ für ein und somit alle $p \in N$ irreduzibel auf $T_pN$ operiert.*

**Satz 3.2** *(Die Standardimmersionen von Takahashi [Ta])*
*Sei $N \cong \mathcal{G}/\mathcal{H}_p$ ein kompakter, isotropie–irreduzibler homogener Raum und $E_\lambda \subset C^\infty N$ der Eigenraum des Laplaceoperators $\Delta$ zum Eigenwert $\lambda > 0$. Sei $W \subset E_\lambda$ ein $\mathcal{G}$–invarianter Unterraum von $E_\lambda$, dann gibt es eine minimale isometrische Immersion*

$$\phi : N \longrightarrow W^*, \quad p \longmapsto \delta_p|_W$$

*die Standardimmersion zu $W$, wobei $W^*$ die folgende $\mathcal{G}$–invariante Metrik $G$ trägt:*

$$G(\cdot,\cdot) := \frac{\operatorname{vol} N}{\lambda}\,\frac{\dim N}{\dim W}\left[(\cdot,\cdot)_{L^2}\big|_{W\times W}\right]^{-1}$$

*Die Notation $^{-1}$ bezeichnet dabei die zu $(\cdot,\cdot)_{L^2|W\times W}$ duale Metrik auf $W^*$.*

**Beweis:** Zunächst sei daran erinnert, daß die duale Metrik über die „Spur“ berechnet werden kann:

$$(\cdot,\cdot)^{-1}(\alpha,\beta) = \sum_{\text{ONB}} \alpha(e_\nu)\beta(e_\nu)$$

Sei also $\{\psi_\nu\}$ eine $L^2$–ONB von $W$, dann gilt für alle $p \in M$:

$$G(\delta_p|_W, \delta_p|_W) \;=\; \frac{\operatorname{vol} N}{\lambda}\,\frac{\dim N}{\dim W} \sum_{L^2-\text{ONB}} \psi_\nu(p)^2$$

Nun operiert $\gamma \in \mathcal{G}$ orthogonal auf $E_\lambda$ und somit $W$, so daß mit $\{\psi_\nu\}$ auch $\{\gamma^{-1}\psi_\nu\}$ eine $L^2$–ONB von $W$ ist. Da die Spur nicht von der Wahl der ONB abhängt, ist die rechte Seite $\mathcal{G}$–invariant und somit konstant auf $N$. Durch Integration über $N$ folgt:

$$\operatorname{vol} N\; G(\delta_p|_W, \delta_p|_W) \;=\; \frac{\operatorname{vol} N}{\lambda}\,\frac{\dim N}{\dim W} \sum_{L^2-\text{ONB}} \int_N \psi_\nu(p)^2 \, d\text{vol} \;=\; \frac{\dim N}{\lambda} \operatorname{vol} N$$

Das Bild von $N$ ist somit in der Sphäre vom Radius $r^2 = \frac{\dim N}{\lambda}$ enthalten. Für den zweiten Teil des Beweises benötigt man die Voraussetzung, daß $N$ isotropie–irreduzibel ist. Dazu muß man die $\mathcal{G}$–Äquivarianz der etwas komplizierteren Spur

$$\sum_{L^2-\text{ONB}} d_{\gamma p}\psi_\nu(\gamma_* X) d_{\gamma p}\psi_\nu(\gamma_* Y) \;=\; \sum_{L^2-\text{ONB}} d_p\psi_\nu(X) d_p\psi_\nu(Y)$$

für alle $X$, $Y \in T_pN$ ausnutzen. Beschränkt man sich zunächst auf $\gamma \in \mathcal{H}_p$, so definiert die rechte Seite eine $\mathcal{H}_p$–invariante, positiv semidefinite symmetrische Bilinearform auf $T_pN$. Auf diesem Vektorraum operiert $\mathcal{H}_p$ nach Voraussetzung irreduzibel, also ist diese Bilinearform nach dem Lemma von Schur ein Vielfaches $\kappa$ der gegebenen Metrik $g$ auf $T_pN$. Sowohl die rechte Seite als Bilinearform als auch die Metrik $g$ sind aber bereits unter ganz $\mathcal{G}$ äquivariant und somit $\kappa$ konstant auf $N$. Nimmt man die Spur über $T_pN$ und integriert über $N$, so folgt

$$\begin{aligned}
\kappa\,(\dim N)\,(\operatorname{vol} N) &= \int_N \sum_{T_pN-\text{ONB}} \sum_{L^2-\text{ONB}} d_p\psi_\nu(X_\mu)^2 \, d\text{vol} \\
&= \sum_{L^2-\text{ONB}} \int_N g^{-1}(d_p\psi_\nu, d_p\psi_\nu) \, d\text{vol} \\
&= \sum_{L^2-\text{ONB}} \int_N \Delta\psi_\nu(p)\psi_\nu(p) \, d\text{vol} \quad = \quad \lambda \dim W
\end{aligned}$$

mit der Greenschen Formel. Deshalb ist $\kappa = \frac{\lambda}{\operatorname{vol} N} \frac{\dim W}{\dim N}$ und nach Definition von $\kappa$ gilt:

$$G(X\delta_p|_W, Y\delta_p|_W) \;=\; \frac{\operatorname{vol} N}{\lambda}\frac{\dim N}{\dim W} \sum_{L^2-\text{ONB}} d_p\psi_\nu(X) d_p\psi_\nu(Y) \;=\; \frac{\operatorname{vol} N}{\lambda}\frac{\dim N}{\dim W}\kappa g(X,Y) \quad \Box$$

Die so konstruierten minimalen isometrischen Immersionen sind voll, denn offenbar ist $\phi^* : W \longrightarrow E_\lambda$ gerade die Inklusion $W \subset E_\lambda$. Hingegen ist $\phi^*$ nur für $W = E_\lambda$ erzeugend, weil alle Voraussetzungen an den Unterraum $W$ offensichtlich auch für $E_\lambda$ selbst zutreffen. Der Modul von $\phi$ ist das Element

$$G \;:=\; \frac{\operatorname{vol} N}{\lambda}\frac{\dim N}{\dim W} \sum_{L^2-\text{ONB}} \frac{1}{2}\psi_\nu^2 \quad \in \operatorname{Sym}^2 E_\lambda$$

Das Bild von $N$ ist eine Untermannigfaltigkeit und selbst ein isotropie–irreduzibler homogener Raum [Li], denn mit $W$ trägt auch $W^*$ eine $\mathcal{G}$–Darstellung, für die

$$\langle \delta_{\gamma p}|_W, \psi\rangle \;=\; \psi(\gamma p) \;=\; \langle \delta_p|_W, \gamma^{-1}\psi\rangle \;=\; \langle \gamma\delta_p|_W, \psi\rangle$$

für alle $\psi \in W$ gilt. Demnach ist $\phi(N)$ der Orbit von $\delta_p|_W$, $p \in N$, unter $\mathcal{G}$, das heißt:

$$\phi(N) \;\cong\; \mathcal{G}/_{\tilde{\mathcal{H}}_p} \qquad\qquad \tilde{\mathcal{H}}_p \;:=\; \{\gamma \in \mathcal{G} :\; \gamma\delta_p|_W = \delta_p|_W\}$$

$\tilde{\mathcal{H}}_p$ ist eine diskrete und somit endliche Erweiterung von $\mathcal{H}_p$ in $\mathcal{G}$. Offensichtlich gilt neben $\mathcal{H}_{\gamma p} = \gamma\mathcal{H}_p\gamma^{-1}$ auch $\tilde{\mathcal{H}}_{\gamma p} = \gamma\tilde{\mathcal{H}}_p\gamma^{-1}$. Ist $\mathcal{H}_p$ nun normal in $\tilde{\mathcal{H}}_p$ für ein und folglich alle $p \in N$, zum Beispiel wenn $\mathcal{H}_p$ zusammenhängend ist, dann können die abstrakten Gruppen $\Gamma_p := \tilde{\mathcal{H}}_p/\mathcal{H}_p$ auf eineindeutige Art und Weise miteinander identifiziert werden. Diese Gruppe $\Gamma \cong \Gamma_p$ operiert dann auf $N$ durch Decktransformationen der Riemannschen Überlagerung $N \longrightarrow \phi(N)$ und somit selbst durch Isometrien, die mit allen $\gamma \in \mathcal{G}$ kommutieren:

$$\Gamma \times N \longrightarrow N, \quad (\tilde{\gamma}\mathcal{H}_p\,,\,\gamma p) \longmapsto \gamma\tilde{\gamma}p \;=\; (\gamma\tilde{\gamma}\gamma^{-1})\gamma p$$

Insbesondere ist $\Gamma$ eine zentrale Untergruppe von $\mathcal{G}$, wenn $\mathcal{G}$ selbst die Gruppe aller Isometrien von $N$ ist.

## 3.2 Die Konstruktion von Mashimo

In dieser Konstruktion werden minimale isometrische Immersionen einer kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ direkt durch geeignete Orbiten in einer Darstellung $W$ von $\mathcal{G}$ definiert, von der man nur voraussetzen muß, daß sie isotypisch ist, das heißt direkte Summe äquivalenter, irreduzibler Darstellungen. Diese Konstruktion von Mashimo harmoniert mit der in Kapitel 2 angegebenen neuen Interpretation der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ von do Carmo–Wallach in besonderer Weise und stellt dabei einen natürlichen Bezug zum Satz von Peter–Weyl her. Insbesondere gehört zu jeder irreduziblen Darstellung $W$ von $\mathcal{G}$, die zumindest eine treue Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von $\mathcal{G}$ ist, eine minimale isometrische Immersion $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{End} W$ von $\mathcal{G}$ bezüglich einer geeigneten biinvarianten Metrik, die nichts anderes als die Darstellung im eigentlichen Sinne des Wortes ist.

**Satz 3.3** *(Die minimalen isometrischen Immersionen von Mashimo [Ma])*
*Sei $\mathcal{G}$ eine kompakte Liegruppe mit Algebra $\mathfrak{g}$ und $W$ eine isotypische $\mathcal{G}$–Darstellung mit invarianter Metrik $G$. Sei $w \in W$ ein Vektor, für den $\langle X, Y\rangle := G(Xw, Yw)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ induziert. Dann gibt es eine glatte Immersion von $\mathcal{G}$ als Orbit von $w$ unter $\mathcal{G}$*

$$\phi : \mathcal{G} \longrightarrow W, \quad \gamma \longmapsto \gamma w$$

*in die Sphäre vom Radius $r^2 = G(w,w) = \frac{\dim \mathcal{G}}{\lambda}$ mit $\lambda := \frac{\dim \mathcal{G}}{r^2} > 0$, die isometrisch bezüglich der linksinvarianten Metrik $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathcal{G}$ ist. Ist diese Metrik biinvariant, das heißt es gilt $\langle \mathrm{Ad}_\gamma X, \mathrm{Ad}_\gamma Y\rangle = \langle X, Y\rangle$ für alle $\gamma \in \mathcal{G}$, dann ist $\phi$ minimal.*

**Beweis:** Die einzige nichttriviale Aussage ist die über die Minimalität von $\phi$, denn die linksinvarianten Vektorfelder $X \in \mathfrak{g}$ werden vom Differential $\phi_*$ der Immersion im Punkt $\gamma \in \mathcal{G}$ auf $\phi_* X_\gamma = \frac{d}{dt}|_0 \gamma e^{tX} w = \gamma X w$ abgebildet. Infolgedessen gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ $G(\phi_* X_\gamma, \phi_* Y_\gamma) = G(\gamma X w, \gamma Y w) = \langle X, Y\rangle$ und $\phi$ ist eine isometrische Immersion von $\mathcal{G}$ in eine Sphäre vom Radius $r^2 = G(w,w)$. Ist nun $\langle\ ,\ \rangle$ eine biinvariante Metrik, so definiert die duale Metrik

$$\langle\ ,\ \rangle^{-1} = \sum_{\mathrm{ONB}} X_\nu \otimes X_\nu \quad \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

ein zentrales Element $\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle}$ in der universell einhüllenden Algebra $\mathcal{U}\mathfrak{g}$, den Casimiroperator. Daher induziert es einen symmetrischen Endomorphismus $\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle}$ von $W$, der nach dem Lemma von Schur auf jedem irreduziblen Summanden von $W$ und damit auch auf $W$ selber ein Vielfaches der Identität sein muß, genauer

$$G(\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle} w, w) = -\sum_{\mathrm{ONB}} G(X_\nu w, X_\nu w) = -\sum_{\mathrm{ONB}} \langle X_\nu, X_\nu\rangle = -\dim \mathcal{G} = -\lambda G(w,w)$$

das heißt $\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle} = -\lambda\, \mathrm{id}_W$. Nun ist der Levi–Civita–Zusammenhang zu jeder biinvarianten Metrik $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathcal{G}$ nach der Koszulformel gegeben durch $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ für alle linksinvarianten Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{g}$. Weil $\phi$ als isometrische Immersion jedenfalls den Levi–Civita–Zusammenhang auf $\mathcal{G}$ induziert, hat die zweite Fundamentalform von $\phi$

$$\mathrm{II}_W(X,Y) = (XY - \nabla_X Y)\phi = \frac{1}{2}(XY + YX)\phi$$

als Immersion in $W$ die rein radiale Spur $\mathrm{tr}\,\mathrm{II}_W = \mathrm{Cas}_{\langle,\rangle}\phi = -\lambda\phi$. Folglich verschwindet die Spur der zweiten Fundamentalform $\mathrm{II}$ als Immersion in die Sphäre $S_W$. Man kann auch anders argumentieren und $-\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle}$ direkt als Laplaceoperator zur Metrik $\langle\ ,\ \rangle$ interpretieren. Dann konstruiert man zunächst

$$W \xrightarrow{\sharp} W^* \xrightarrow{\phi^*} C^\infty \mathcal{G}, \quad \tilde{w} \longmapsto G(\tilde{w}, \cdot\, w)$$

und erreicht dadurch $\Delta G(\tilde{w}, \cdot\, w) = G(\tilde{w}, \cdot\,(-\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle})w) = \lambda\, G(\tilde{w}, \cdot\, w)$. Somit bildet $\phi^*$ den Raum $W^*$ nach $E_\lambda$ ab, und nach dem Lemma 2.1 von Takahashi ist $\phi$ minimal. $\square$

**Bemerkung 3.4** *(Positivität und treue Darstellungen)*
*Wenn $W$ keine treue Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist, dann kann natürlich kein Orbit von $\mathcal{G}$ in $W$ das Bild einer Immersion von $\mathcal{G}$ sein. Umgekehrt kann man für eine treue Darstellung $W$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ aus der Biinvarianz von $\langle X, Y\rangle := G(Xw, Yw)$ schon folgern, daß $\langle\,,\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ ist. Denn für ein $X \in \mathfrak{g}$ mit $\langle X, X\rangle = 0$ gilt*

$$\langle \mathrm{Ad}_{\gamma^{-1}}X,\ \mathrm{Ad}_{\gamma^{-1}}X\rangle \ = \ 0 \ = \ G(X\gamma w, X\gamma w)$$

*aufgrund der Biinvarianz, und $X$ verschwindet schon auf dem $\mathcal{G}$–invarianten Unterraum* Spann $\{\gamma w :\ \gamma \in \mathcal{G}\}$. *Weil dieser mindestens einen irreduziblen Summanden der isotypischen Darstellung $W$ enthält, operiert $X \in \mathfrak{g}$ trivial auf ganz $W$, was für eine treue Darstellung $W$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ gleichbedeutend mit $X = 0$ ist.*

**Beispiel 3.5** *(Darstellungen als minimale isometrische Immersionen)*
*Ein interessantes Beispiel für eine isotypische Darstellung ist der Raum* $\mathrm{End}\,W = W^* \otimes W$ *aller Endomorphismen einer irreduziblen Darstellung $W$ von $\mathcal{G}$, wobei $W^*$ als triviale $\mathcal{G}$–Darstellung aufgefaßt wird und $\mathcal{G}$ nur auf dem zweiten Faktor operiert, das heißt durch $(\gamma A) := \gamma \circ A$ für alle $\gamma \in \mathcal{G}$ und $A \in \mathrm{End}\,W$. Die von $G$ induzierte, $\mathcal{G}$–invariante Metrik* $\mathrm{End}\,G := G^{-1} \otimes G$ *auf* $\mathrm{End}\,W$ *ist das Hilbert–Schmidt–Skalarprodukt:*

$$(\mathrm{End}\,G)(A, B) \ := \ \sum_{\mathrm{ONB}} G(Aw_\nu,\ Bw_\nu) \qquad \textit{für } A,\ B \in \mathrm{End}\,W$$

*Insbesondere induziert die Identität* $\mathrm{id}_W \in \mathrm{End}\,W$ *von $W$ auf $\mathfrak{g}$ die biinvariante Bilinearform*

$$\langle X, Y\rangle \ := \ (\mathrm{End}\,G)(X\,\mathrm{id}_W, Y\,\mathrm{id}_W) \ = \ \sum_{\mathrm{ONB}} G(Xw_\nu, Yw_\nu) \ = \ -\,\mathrm{tr}_W XY \qquad X,\ Y \in \mathfrak{g}$$

*so daß der Orbit von* $\mathrm{id}_W$ *in* $\mathrm{End}\,W$ *für jede irreduzible Darstellung $W$, die eine treue Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist, eine minimale isometrische Immersion der kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ in eine Sphäre vom Radius* $r^2 = (\mathrm{End}\,G)(\,\mathrm{id}_W, \mathrm{id}_W) = \dim W$ *induziert, die nichts anderes als die Darstellung $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{End}\,W$ selbst ist. Man beachte, daß diese minimale isometrische Immersion im allgemeinen nicht voll ist.*

Sobald ein Vektor $w$ in einer isotypischen, auf dem Niveau der Liealgebra treuen Darstellung $W$ von $\mathcal{G}$ also eine biinvariante, symmetrische Bilinearform $\langle X, Y\rangle := G(Xw, Yw)$ auf $\mathfrak{g}$ induziert, ist der Orbit von $w$ unter $\mathcal{G}$ das Bild einer minimalen isometrischen Immersion $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow W,\ \gamma \longmapsto \gamma w$ in eine Sphäre vom Radius $r^2 = G(w, w)$. Das Bild dieser Immersion spannt dann einen $\mathcal{G}$–invarianten Unterraum Spann $\{\gamma w :\ \gamma \in \mathcal{G}\}$ auf, und ist somit eine orthonormale Summe von Kopien der typischen irreduziblen Darstellung von $W$.

Im folgenden sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Darstellung $W$ selbst irreduzibel ist. Dann ist die minimale isometrische Immersion $\phi$ voll und die kanonische Abbildung $\phi^*$ bildet die Linearform $\alpha \in W$ auf den Matrixkoeffizienten $\alpha(\cdot\, w)$ ab:

$$\phi^* : W^* \ \longrightarrow \ W^* \otimes W \ \longrightarrow \ E_\lambda \ \subset \ C^\infty\mathcal{G}, \quad \alpha \longmapsto \alpha(\cdot\, w)$$

Nach Beispiel 3.5 gibt es nun eine minimale isometrische Immersion, deren kanonische Abbildung nach Definition das Bild aller Matrixkoeffizienten $W^* \otimes W$ von $W$ in $E_\lambda$ trifft. Deshalb kann die Immersion $\phi$ nur dann eine erzeugende minimale isometrische Immersion sein, wenn auch $\phi^*$ surjektiv und die Dimension von $W$ deshalb 1, 2 oder 4 ist. Dazu benötigt man den Satz von Peter–Weyl in der Kategorie der Darstellungen auf reellen Vektorräumen und die Klassifizierung in reelle, komplexe und quaternionische Darstellungen:

**Definition 3.6** *(Reelle, komplexe und quaternionische Darstellungen)*
*Sei $W$ eine irreduzible Darstellung einer kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ auf einem reellen Vektorraum. Die Algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}W := \{A \in \mathrm{End}\,W : A\gamma = \gamma A$ für alle $\gamma \in \mathcal{G}\}$ aller $\mathcal{G}$–invarianten Endomorphismen von $W$ ist dann eine assoziative Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$, also isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Dementsprechend heißt $W$ reelle, komplexe oder quaternionische Darstellung.*

**Satz 3.7** *(Satz von Peter–Weyl für Darstellungen über $\mathbb{R}$)*
*Für eine kompakte Liegruppe $\mathcal{G}$ ist der reelle Hilbert–Raum $L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{G}$ der Abschluß der direkten Summe*

$$L^2_{\mathbb{R}}\mathcal{G} \;\cong\; \overline{\bigoplus_W W^* \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{G}}W} W}$$

*wobei über alle Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen in reellen Vektorräumen $W$ summiert und $W$ und $W^*$ in natürlicher Weise als $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}W$ Links– bzw. Rechtsvektorräume aufgefaßt werden. In diesem Sinne ist die Abbildung $W^* \otimes W \longrightarrow C^\infty\mathcal{G}$ die Projektion auf $W^* \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{G}}W} W$, denn $A^*\alpha \otimes w$ und $\alpha \otimes Aw$ werden beide auf $\alpha(\cdot Aw) \in C^\infty\mathcal{G}$ abgebildet.*

Die Bedeutung der Konstruktion von Mashimo liegt also darin, daß sie für irreduzible Darstellungen $W$ minimale isometrische Immersionen in Zielräume kleiner Dimension ergibt, denn die erzeugenden Immersionen zum gleichen Eigenwert gehen in Räume der Dimension mindestens $\frac{1}{d}(\dim W)^2$ mit $d = 1$, 2 oder 4, je nachdem ob $W$ reell, komplex oder quaternionisch ist. Mit Ausnahme der beiden Standardimmersionen $S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ und $S^3 \longrightarrow \mathbb{H}$ zum ersten Eigenwert sind also die Immersionen von Mashimo für keine irreduzible Darstellung $W$ einer kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ erzeugende minimale isometrische Immersionen. Es bleibt das interessante Problem, für eine gegebene, irreduzible Darstellung $W$ von $\mathcal{G}$ geeignete Vektoren $w \in W$ zu finden. Ganz allgemein kann man dieses Problem so umformulieren:

**Satz 3.8** *(Varietät der Mashimo–Vektoren [Ma])*
*Sei $W$ eine irreduzible Darstellung der kompakten Liegruppe $\mathcal{G}$ und treue Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit bis auf skalaren Faktor eindeutiger, invarianter Metrik $G$. Diese definiert eine $\mathcal{G}$–äquivariante, lineare Abbildung $Q :\; \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Sym}^2W^*$, $X^2 \longmapsto G(X\cdot, X\cdot)$, die eine $\mathcal{G}$–invariante Zerlegung*

$$\mathrm{Sym}^2W^* = \mathbb{R}G \oplus \mathrm{Im}_0Q \oplus \mathrm{Rest}$$

*induziert, wobei der eindeutig bestimmte, triviale Summand $\mathbb{R}G$ im Bild von $Q$ liegt, und $\mathrm{Im}_0Q$ der Schnitt von $\mathrm{Im}\,Q$ mit $\mathrm{Sym}^2_0W^*$ ist. Ein Vektor $w \neq 0$ induziert genau dann ein biinvariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$, wenn er im Schnitt aller Koniken aus $\mathrm{Im}_0Q$ liegt.*

**Beweis:** Für eine kompakte Liegruppe $\mathcal{G}$ sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^*$ äquivalent als Darstellungen. In diesem Sinne zerfällt $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$ in die direkte Summe $\mathbb{R}^r \oplus \mathrm{Sym}^2_0\mathfrak{g}$ des Unterraums $\mathbb{R}^r$ der biinvarianten Bilinearformen auf $\mathfrak{g}^*$ und seines eindeutig bestimmten, $\mathcal{G}$–invarianten Komplements

$\mathrm{Sym}^2_0\mathfrak{g}$. Unter der $\mathcal{G}$–äquivarianten Abbildung $Q$ werden diese beiden Summanden surjektiv auf $\mathbb{R}G$ bzw. $\mathrm{Im}_0 Q$ abgebildet. Die duale Abbildung $Q^* : \mathrm{Sym}^2 W \longrightarrow \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}^*$ bildet nun natürlich das Quadrat $w^2$ auf die von $w$ induzierte, symmetrische Bilinearform $G(\cdot w, \cdot w)$ ab. Somit ist diese genau dann biinvariant und nach Bemerkung 3.4 dann auch positiv definit, wenn $Q^*(w^2)$ im Annihilator des nicht biinvarianten Unterraums $\mathrm{Sym}^2_0\mathfrak{g}$ von $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$ liegt. Weil $Q$ und $Q^*$ adjungiert sind, besagt das nichts anderes, als daß $w^2$ im Annihilator von $\mathrm{Im}_0 Q$ liegt. $\square$

Induziert ein Vektor $w \in W$ ein biinvariantes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle := G(\cdot w, \cdot w)$ auf $\mathfrak{g}$, so induziert $rw$ offenbar $r^2\langle\ ,\ \rangle$. Ist die Gruppe $\mathcal{G}$ also einfach, so wird man das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathfrak{g}$ mit Casimiroperator $\mathrm{Cas}_{\langle,\rangle}$ und dadurch auch den Casimireigenwert $-\lambda$ auf $W$ festlegen, und ist dann nur noch an den Mashimo–Vektoren $w$ der „richtigen" Norm $G(w,w) = r^2 = \frac{\dim\mathcal{G}}{\lambda}$ interessiert. Darauf operiert immer noch die Gruppe der $\mathcal{G}$–invarianten Isometrien $I \in \mathrm{End}_{\mathcal{G}} W$ von $W$, die für eine irreduzible, reelle, komplexe oder quaternionische Darstellung isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, $S^1$ bzw. $S^3$ ist, und *per definitionem* induzieren alle Vektoren eines Orbits äquivalente Immersionen. Ist für eine Darstellung $W$ der Schnitt der Koniken aus Satz 3.8 also nicht leer, so erfaßt die Konstruktion von Mashimo bereits eine ganze Komponente des Randes des Modulraums als Bild des Quotienten des Schnitts der Koniken mit einer Sphäre unter dieser Gruppe.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch einmal kurz auf den allgemeinen Fall einer minimalen isometrischen Immersion der Gruppe $\mathcal{G}$ als Orbit in einer isotypischen Darstellung eingegangen. Jede isotypische Darstellung läßt sich auf sehr viele verschiedene Weisen als orthogonale Summe von Kopien der zugehörigen typischen irreduziblen Darstellung $W$ schreiben, und ist somit ohne Einschränkung isometrisch zur direkten Summe $W^{\oplus m}$ von $m$ Kopien von $W$. Insbesondere definiert ein Vektor $w_\oplus := w_1 \oplus \ldots \oplus w_m$ aus $W^{\oplus m}$ mit Komponenten $w_\nu \in W$ die folgende symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}$:

$$\langle X, Y\rangle \ := \ G_\oplus(Xw_\oplus, Yw_\oplus) \ = \ \sum_{\nu=1}^{m} G(Xw_\nu, Yw_\nu)$$

Also definiert $w_\oplus$ genau dann ein biinvariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$, wenn die Summe der Quadrate der Komponenten $w_1^2 + \ldots + w_m^2 \in \mathrm{Sym}^2 W$ im Annihilator von $\mathrm{Im}_0 Q \subset \mathrm{Sym}^2 W^*$ liegt. Je mehr Kopien man von der irreduziblen Darstellung $W$ nimmt, desto leichter fällt es damit, einen Vektor $w_\oplus$ zu finden, der tatsächlich eine biinvariante und damit positiv definite Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ induziert. Auf jeden Fall gibt es gemäß Beispiel 3.5 zu jeder irreduziblen Darstellung $W$, die zugleich treue Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist, eine minimale isometrische Immersion in die isotypische Darstellung $\mathrm{End}\, W$ als Orbit der Identität $\mathrm{id}_W$ von $W$. Diese Immersion ist nicht voll, wenn $W$ keine reelle Darstellung ist, ihr Bild spannt nämlich gerade den Zentralisator $W^* \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{G}} W} W$ von $\mathrm{End}_{\mathcal{G}} W$ in $\mathrm{End}\, W$ auf. Selbst im ungünstigsten Fall reichen deshalb stets $\frac{1}{d}\dim W$ Kopien von $W$ mit $d = 1$, 2 oder 4 für eine reelle, komplexe bzw. quaternionische Darstellung $W$.

# Kapitel 4

# Die Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ im Fall der Sphären

Die Sphären sind isotropie–irreduzible homogene Räume, können also mit den Standardimmersionen von Takahashi aus Satz 3.2 zu jedem Eigenwert $\lambda > 0$ minimal und isometrisch in andere Sphären eingebettet werden. Andere minimale isometrische Immersionen bekommt man dadurch, daß man die Standardimmersion entlang einer Bilinearform aus $M_0 \subset \mathrm{Sym}^2 E_\lambda$ deformiert. Der Parameterraum $M_0$ der möglichen Deformationen ist dabei durch die Geometrie der Diracschen Deltafunktionale in $E_\lambda^*$ festgelegt. In diesem Kapitel wird eine genaue Beschreibung dieser Geometrie gegeben. Im Anschluß daran werden die Parameterräume $M_{0,k}$ für alle Eigenwerte $\lambda_k > 0$ algebraisch charakterisiert.

Zunächst werden die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Laplaceoperatoren auf Sphären bestimmt. Dazu wird eine $\mathfrak{sl}_2$–Operatoralgebra auf der symmetrischen Algebra $\mathrm{Sym}\, V^*$ eines euklidischen Vektorraums $V$ eingeführt. Dadurch wird $\mathrm{Sym}\, V^*$ zu einer Niedrigstgewichtsdarstellung im Sinne von Anhang B, und die Zerlegung B.2 in isotypische Komponenten entspricht im wesentlichen der Zerlegung in Eigenfunktionen.

Im zweiten Abschnitt wird eine weitere $\mathfrak{sl}_2$–Operatoralgebra auf dem Tensorprodukt $\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ definiert, die Algebra der Plückerdifferentiale. Die Zerlegung B.2 unter dieser Algebra bestimmt im wesentlichen die Geometrie der Diracschen Deltafunktionale auf den Polynomen. Die Beschreibung der Geometrie der Deltafunktionale mit Hilfe der Plückerdifferentiale wird im letzten Abschnitt dazu benutzt, den Annihilator des Parameterraums $M_{0,k}$ des Modulraums $\mathcal{M}_{\lambda_k}$ als Bild eines iterierten Plückerdifferentials zu identifizieren.

## 4.1 Eigenwerte und Eigenräume der Sphären

Sei $V$ ein $n$–dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Metrik $\langle\ ,\ \rangle$ und $S_V \subset V$ die Einheitssphäre. Die Wahl einer Metrik definiert zwei ausgezeichnete, **SO** $V$–invariante Elemente $g \in \mathrm{Sym}^2 V^*$ und $g^{-1} \in \mathrm{Sym}^2 V$, die zwei kanonische Operatoren $M$ und $K$ auf $\mathrm{Sym}\, V^*$ definieren. Der Kern $H^k V^*$ von $K$ in $\mathrm{Sym}^k V^*$ heißt Vektorraum der harmonischen Polynome über $V$ und ist unter Einschränkung auf $S_V$ isomorph zum Eigenraum des Laplaceoperators der Sphäre zum Eigenwert $\lambda_k = k(n + k - 2)$.

**Definition 4.1** *(Metrischer und kometrischer Tensor)*
*Sei $\{e_\nu\}$ und $\{de_\nu\}$ ein duales Basenpaar für $V$ und $V^*$. Mit Hilfe der beiden inversen, musikalischen Isomorphismen $\sharp : V \longrightarrow V^*$ und $\flat : V^* \longrightarrow V$ lassen sich metrischer und kometrischer Tensor in $\mathrm{Sym}^2 V^*$ bzw. $\mathrm{Sym}^2 V$ wie folgt schreiben:*

$$g = \sum_\nu \frac{1}{2} de_\nu \cdot e_\nu^\sharp \qquad\qquad g^{-1} = \sum_\nu \frac{1}{2} de_\nu^\flat \cdot e_\nu$$

**Definition 4.2** *(Laplaceoperator und harmonische Polynome)*
*Die beiden ausgezeichneten Tensoren $g$ und $g^{-1}$ eines euklidischen Vektorraums $V$ definieren zwei kanonische Operatoren auf den Polynomen $\mathrm{Sym}^k V^*$ über $V$:*

$$\begin{array}{rlrl} M: & \mathrm{Sym}^k V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k+2} V^* & \psi \longmapsto g \cdot \psi & := \frac{1}{2}\sum_\nu de_\nu \cdot e_\nu^\sharp \cdot \psi \\ K: & \mathrm{Sym}^k V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2} V^* & \psi \longmapsto g^{-1} \lrcorner \psi & := \frac{1}{2}\sum_\nu de_\nu^\flat \lrcorner e_\nu \lrcorner \psi \end{array}$$

*Diese beiden Operatoren sind adjungiert bezüglich der natürlichen Fortsetzung von $g$ auf $\mathrm{Sym}\, V^*$. Nach Korollar A.3 in Anhang A kann man $-2K$ mit dem skalaren Laplaceoperator $\Delta_V$ identifizieren. Deshalb heißt sein Kern $H^k V^* := \mathrm{Kern}\, K \subset \mathrm{Sym}^k V^*$ der Vektorraum der harmonischen Polynome vom Grad $k$ über $V$. Diese Definition macht auch für einen komplexen Vektorraum mit einer regulären, symmetrischen Bilinearform Sinn. So läßt sich die Gleichheit $(H^k V^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H^k(V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ verstehen, die im folgenden noch benutzt wird.*

**Bemerkung 4.3**
*Die Kommutatorrelation $[v \lrcorner, \alpha \cdot] = \alpha(v)$ impliziert die beiden Kommutatorformeln:*

$$\begin{aligned} [K, \alpha\cdot] &= \frac{1}{2}\sum_\nu \left( [de_\nu^\flat \lrcorner, \alpha\cdot]\, e_\nu \lrcorner + de_\nu^\flat \lrcorner\, [e_\nu \lrcorner, \alpha\cdot] \right) &= \alpha^\flat \lrcorner \\ [M, v\lrcorner] &= \frac{1}{2}\sum_\nu \left( [de_\nu \cdot, v\lrcorner]\, e_\nu^\sharp \cdot + de_\nu \cdot\, [e_\nu^\sharp \cdot, v\lrcorner] \right) &= -v^\sharp \cdot \end{aligned}$$

*Man beachte nur, daß mit $\{e_\nu\}$ und $\{de_\nu\}$ auch $\{de_\nu^\flat\}$ und $\{e_\nu^\sharp\}$ ein duales Basenpaar ist.*

**Lemma 4.4**
*Auf $\mathrm{Sym}^k V^*$ ist der Kommutator von $M$ und $K$ im wesentlichen der Zahloperator:*

$$[M, -K] = \frac{n}{2} + \sum_\nu de_\nu \cdot e_\nu \lrcorner = \frac{n}{2} + k$$

**Beweis:** Die Summe $\sum_\nu de_\nu \cdot e_\nu \lrcorner$ ist der bosonische Zahloperator, der auf $V^*$ die Identität ist und als Derivation fortgesetzt in $\mathrm{Sym}^k V^*$ mit $k$ multipliziert. Es genügt somit zu zeigen:

$$\begin{aligned} [M, -K] &= \frac{1}{2}\sum_\nu \left( [de_\nu \cdot, -K]\, e_\nu^\sharp \cdot + de_\nu \cdot\, [e_\nu^\sharp \cdot, -K] \right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_\nu \left( de_\nu^\flat \lrcorner\, e_\nu^\sharp \cdot + de_\nu \cdot\, e_\nu \lrcorner \right) = \frac{n}{2} + \sum_\nu de_\nu \cdot e_\nu \lrcorner \qquad \square \end{aligned}$$

Definiert man also den Operator $H := [M, -K]$, so ist $H = \frac{n}{2} + k$ auf $\mathrm{Sym}^k V^*$ im wesentlichen der Zahloperator. Insofern gilt sicherlich $[H, M] = 2M$ und $[H, K] = -2K$ und somit bilden $H$, $M$ und $-K$ eine $\mathfrak{sl}_2$–Algebra. Als unmittelbare Konsequenz der Zerlegung in isotypische Komponenten unter $\mathfrak{sl}_2$ mittels der Projektionsformel B.2 in Anhang B und im Beweis völlig analog zur Clebsch–Gordon–Formel erhält man die folgende Zerlegung von $\mathrm{Sym}^k V^*$ in $\mathbf{SO}\,V$–Darstellungen:

**Satz 4.5**

$$\mathrm{Sym}^k V^* \;=\; \bigoplus_{\nu=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} H^{k-2\nu} V^*$$

**Lemma 4.6** *(Laplaceoperator auf der Sphäre)*
*Betrachte den Kegel $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ über der Sphäre $S^{n-1}$ mit der Standardmetrik $g_{\mathbb{R}^n} = dr \otimes dr + r^2 g_{S^{n-1}}$. Die Fortsetzung des Laplaceoperator $\Delta_{S^{n-1}}$ der Sphäre als Operator auf Funktionen des $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ läßt sich als*

$$\Delta_{S^{n-1}} \quad = \quad r^2 \Delta_{\mathbb{R}^n} \;+\; (n-2)(r\frac{\partial}{\partial r}) \;+\; (r\frac{\partial}{\partial r})^2$$

*schreiben. Insbesondere gilt für ein homogenes, harmonisches Polynom $\psi \in H^k\mathbb{R}^n$ nach Euler $r\frac{\partial}{\partial r}\psi = k\psi$ und somit für die Einschränkung von $\psi$ auf die Sphäre $S^{n-1}$:*

$$\Delta_{S^{n-1}}\psi \quad = \quad k(n+k-2)\psi$$

**Beweis:** Betrachte das Vektorfeld $R = \frac{\partial}{\partial r}$ und zu jedem Vektorfeld $X$ auf $S^{n-1}$ die Fortsetzung als Vektorfeld $\widetilde{X} := \frac{1}{r}X$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle R,\, R\rangle &= 1 & \qquad\qquad [R, \widetilde{X}] &= -\tfrac{1}{r}\widetilde{X} \\ \langle \widetilde{X},\, \widetilde{Y}\rangle &= \langle X,\, Y\rangle & [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] &= \tfrac{1}{r}\widetilde{[X, Y]} \end{aligned}$$

Eine Routinerechnung mit der Koszulformel ergibt neben dem Verschwinden von $\nabla_R R = 0$ auch $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X} = \frac{1}{r}\widetilde{\nabla_X X} - \frac{1}{r}\langle X,\, X\rangle R$ und daher:

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} \quad = \quad -\sum_{\mathrm{ONB}} \left(\widetilde{X}^2 \,-\, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}\right) \,-\, R^2 \quad = \quad \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}} \,-\, \frac{n-1}{r}R \,-\, R^2$$

Nun muß man nur noch mit $r^2$ multiplizieren und $(rR)^2 = r^2R^2 + rR$ einsetzen. $\square$

**Korollar 4.7** *(Eigenwerte und Eigenräume der Sphäre)*
*Die Eigenwerte des Laplaceoperators $\Delta_{S_V}$ auf der Einheitssphäre $S_V \cong S^{n-1}$ sind gerade $\lambda_k := k(n+k-2)$ für alle $k \geq 0$. Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_k$ ist kanonisch isomorph zum Raum der harmonischen Polynome $H^kV^*$ über $V$ und die Eigenfunktionen sind gerade die Einschränkungen dieser Polynome auf $S_V$.*

**Beweis:** Nach der Polarisationsformel A.4 ist die Einschränkung $\mathrm{Sym}^k V^* \longrightarrow C^\infty S_V$ injektiv. Somit gilt nach Lemma 4.6 bereits $H^kV^* \subset E_{\lambda_k}$. Nach Satz 4.5 kann deshalb die Einschränkung jedes Polynoms $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$ auf die Sphäre als Linearkombination dieser Eigenfunktionen geschrieben werden, denn $\psi_\nu \in H^{k-2\nu}V^*$ und $2^\nu M^\nu \psi_\nu \in \mathrm{Sym}^k V^*$ stimmen bei Einschränkung auf $S_V$ überein. Somit folgt die Vollständigkeit des angebenen Systems von Eigenfunktionen und Eigenwerten aus dem Satz von Stone–Weierstraß. $\square$

Neben der Zerlegung von $\mathrm{Sym}^k V^*$ in die Unterräume $H^\nu V^*$ werden auch noch feinere Zerlegungen der $H^\nu V^*$ von Interesse sein. Der skalare Laplaceoperator $\Delta_V$ auf $V$ ist bekanntlich ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung, und somit sind Lösungen der Gleichung $\Delta_V \psi = 0$ bereits durch die Werte von $\psi$ und aller seiner ersten Ableitungen auf irgendeiner Hyperebene von $V$ eindeutig bestimmt. Der folgende Satz besagt, daß sich in diesem Fall beliebige Anfangswerte stets zu einer Lösung „integrieren“ lassen:

**Satz 4.8** *(Fundamentalformen erzeugender Immersionen)*
*Sei $p \in V$ ein Einheitsvektor und $\psi_0 \in \mathrm{Sym}^k\{p\}^\perp$ und $\psi_1 \in \mathrm{Sym}^{k-1}\{p\}^\perp$ zwei beliebige Polynome auf dem orthogonalen Komplement von $p$ in $V$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes harmonisches Polynom $\psi \in H^kV^*$, für das $\psi$ und die partielle Ableitung $p\lrcorner\psi$ auf dem orthogonalen Komplement von $p$ mit $\psi_0$ bzw. $\psi_1$ übereinstimmt. Insbesondere gibt es eine* **SO** *$\{p\}^\perp$–invariante Zerlegung von $H^kV^*$ in:*

$$H^kV^* \;=\; \mathrm{Sym}^k\{p\}^\perp \oplus \mathrm{Sym}^{k-1}\{p\}^\perp \;=\; \bigoplus_{\nu=0}^{k} H^\nu\{p\}^\perp$$

**Beweis:** Die orthogonale Zerlegung $V^* = \mathbb{R}p^\sharp \oplus \{p\}^\perp$ induziert eine **SO** $\{p\}^\perp$–invariante Zerlegung des Vektorraums der homogenen Polynome vom Grad $k$:

$$\mathrm{Sym}^k V^* \;=\; \bigoplus_{\nu=0}^{k} \mathbb{R}(p^\sharp)^\nu \otimes \mathrm{Sym}^{k-\nu}\{p\}^\perp \qquad \psi \;=\; \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(p^\sharp)^\nu}{\nu!}\cdot\psi_\nu \quad \text{mit } \psi_\nu \in \mathrm{Sym}^{k-\nu}\{p\}^\perp$$

Wendet man auf diesen Ansatz den Laplaceoperator $K$ an, so zeigt sich, daß ein harmonisches Polynom $\psi$ allein schon durch die ersten zwei Komponenten $\psi_0$ und $p^\sharp\cdot\psi_1$ bestimmt ist, wobei $\psi_0$ und $\psi_1$ gerade die Einschränkungen von $\psi$ bzw. der partiellen Ableitung $p\lrcorner\psi$ auf das orthogonale Komplement $\{p\}^\perp \subset V$ sind. Das eindeutig bestimmte harmonische Polynom $\psi$ zu diesen zwei Anfangswerten berechnet sich nach der expliziten Formel:

$$\psi \;=\; \sum_{\nu=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} \frac{(p^\sharp)^{2\nu}}{(2\nu)!}(-2K)^\nu\psi_0 \;+\; \sum_{\nu=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor} \frac{(p^\sharp)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}(-2K)^\nu\psi_1 \quad \square$$

Betrachtet man die Form der Lösung $\psi$ zu vorgegebenen Anfangswerten genauer, so erkennt man, daß diese Lösung linear in $\psi_0$ und $\psi_1$ ist, und man erhält aus der Polarisationsformel A.4 für allgemeine Polynome das Korollar:

**Korollar 4.9** *(Polarisationsformel für harmonische Polynome)*
*Ist $V$ ein Vektorraum der Dimension $\dim V \geq 2$, dann wird der Raum $H^kV^*$ für alle $k \geq 0$ von den Bildern $H^k\mathbb{R}^2 \subset H^kV^*$ isometrischer Einbettungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow V^*$ erzeugt. Dabei reicht es sogar, wenn man nur diejenigen isometrischen Einbettungen betrachtet, deren Bild ein beliebig vorgegebenes $\alpha = p^\sharp \in V^*$ enthält.*

## 4.2 Die Plückergraduierung von $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$

Gemäß Definition ist der Vektorraum aller Polynome über einem Vektorraum $V$ die direkte Summe $\mathrm{Sym}\, V^* = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Sym}^k V^*$. Deswegen ist sein Dualraum in natürlicher Weise das direkte Produkt $\mathrm{Sym}\, V = \coprod_{k \geq 0} \mathrm{Sym}^k V$ unter der Identifizierung $\mathrm{Sym}^k V = (\mathrm{Sym}^k V^*)^*$. Nach den Konventionen aus Anhang A entsprechen dabei den Diracschen Deltafunktionalen die formalen Expotentialsummen $\delta_p = e^p := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} p^k$. In diesem Abschnitt wird die Geometrie dieser Deltafunktionale genauer untersucht. Philosophisch ist es dazu erforderlich, vom Vektorraum $V^*$ zu $V$ überzugehen.

**Definition 4.10** *(Plückerdifferentiale)*
*Die beiden Plückerdifferentiale $P\ell$ und $P\ell^*$ sind graduierte Operatoren auf dem Tensorprodukt $\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$, die nur von der Algebrastruktur der beiden Faktoren abhängen. Auf zerlegbaren Elementen $v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \otimes w_1 \cdot \ldots \cdot w_l$ sind sie definiert durch:*

$$
\begin{aligned}
P\ell(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \otimes w_1 \cdot \ldots \cdot w_l) &:= \sum_{\nu=1}^{k} v_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{v}_\nu \cdot \ldots \cdot v_k \otimes v_\nu \cdot w_1 \cdot \ldots \cdot w_l \\
P\ell^*(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \otimes w_1 \cdot \ldots \cdot w_l) &:= \sum_{\nu=1}^{l} w_\nu \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \otimes w_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{w}_\nu \cdot \ldots \cdot w_l
\end{aligned}
$$

*Alternativ kann man sie nach Wahl eines dualen Basenpaars $\{e_\nu\}$ und $\{de_\nu\}$ von $V$ und $V^*$ schreiben als:*

$$
P\ell = \sum_{\nu=1}^{n} de_\nu \lrcorner \otimes e_\nu \cdot \qquad\qquad P\ell^* = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu \cdot \otimes de_\nu \lrcorner
$$

*In dieser speziellen Darstellung sieht man sofort, daß $P\ell$ und $P\ell^*$ adjungiert unter der kanonischen Paarung $(\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V) \times (\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind, wenn man sie für $V$ und $V^*$ gleichzeitig betrachtet.*

**Bemerkung 4.11** *(Plückerrelationen)*
*Völlig analog kann man die Plückerdifferentiale auch für die Tensorprodukte $\Lambda^k V \otimes \Lambda^l V$ definieren. In diesem Fall gilt der Satz von Plücker, daß eine $k$–Form $\omega$ genau dann zerlegbar ist, wenn $P\ell(\omega \otimes \omega) = 0$.*

**Satz 4.12** *Auf $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^l V$ ist der Kommutator von $P\ell$ und $P\ell^*$ im wesentlichen die Differenz der Zahloperatoren:*

$$
\begin{aligned}
[P\ell, P\ell^*] &= \sum_{\nu,\mu} \left( [de_\nu \lrcorner, e_\mu \cdot] \otimes e_\nu \cdot de_\mu \lrcorner \;+\; e_\mu \cdot de_\nu \lrcorner \otimes [e_\nu \cdot, de_\mu \lrcorner] \right) \\
&= \sum_{\nu} \left( 1 \otimes e_\nu \cdot de_\nu \lrcorner \;-\; e_\nu \cdot de_\nu \lrcorner \otimes 1 \right) \quad = \quad l - k
\end{aligned}
$$

Definiert man also den Operator $\tilde{H} := [P\ell, P\ell^*] = l - k$ auf $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^l V$, so gilt offensichtlich $[\tilde{H}, P\ell] = 2P\ell$ und $[\tilde{H}, P\ell^*] = -2P\ell^*$. Damit erzeugen $\tilde{H}$, $P\ell$ und $P\ell^*$ eine

$\mathfrak{sl}_2$–Algebra. Als unmittelbare Konsequenz der Zerlegung in isotypische Komponenten mittels der Projektionsformel B.2 und der folgenden Bemerkung B.3 erhält man mit den dort eingeführten faktoriellen Polynomen $[x]_\nu = x(x-1)\cdots(x-\nu+1)$:

**Satz 4.13** *(Injektivität und Surjektivität der Plückerdifferentiale)*
*Das iterierte Plückerdifferential $P\ell^r : \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^l V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{l+r}V$ ist injektiv für $k \geq l$ und surjektiv für $k \leq l$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für das iterierte Plückerdifferential $P\ell^{*r}$.*

**Beweis:** Es genügt, die Aussage für $k = l$ zu beweisen und zu zeigen, daß das iterierte Plückerdifferential $P\ell^r : \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^k V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V$ für alle $k$, $r$ ein Isomorphismus ist. Der allgemeine Fall folgt dann durch Faktorisieren dieser Isomorphismen:

$$\begin{array}{llllll} k \geq l: & \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^l V & \xrightarrow{P\ell^r} & \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{l+r}V & \xrightarrow{P\ell^{k-l}} & \mathrm{Sym}^l V \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V \\ k \leq l: & \mathrm{Sym}^{l+r}V \otimes \mathrm{Sym}^k V & \xrightarrow{P\ell^{l-k}} & \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^l V & \xrightarrow{P\ell^r} & \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{l+r}V \end{array}$$

Sei also $k = l$ und $\psi \in \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^k V$, das heißt $\tilde{H}\psi = -r\psi$ und $P\ell^{*k+1}\psi = 0$. Nach Satz B.2 besitzt $\psi$ eine Darstellung

$$\psi \;=\; \psi_0 \;+\; P\ell\psi_1 \;+\; P\ell^2\psi_2 \;+\; \cdots \;+\; P\ell^k\psi_k$$

mit $P\ell^*\psi_\nu = 0$. Wie im Beweis von Satz B.4 zeigt nun die Bemerkung B.3, daß die Komponenten $P\ell^\nu\psi_\nu$ Eigenvektoren der Operatoren $P\ell^{*\mu}P\ell^\mu$ sind:

$$(P\ell^{*\mu}P\ell^\mu)P\ell^\nu\psi_\nu \;=\; [\mu+\nu]_\mu[\nu+r]_\mu P\ell^\nu\psi_\nu$$

Somit ist $P\ell^{*r}P\ell^r$ diagonalisierbar auf $\mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ mit Eigenwerten $[r+\nu]_r^2 > 0$ für $\nu = 0, \ldots, k$, also invertierbar. Dann ist $P\ell^r : \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^r V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V$ injektiv und entsprechend $P\ell^{*r} : \mathrm{Sym}^k \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ surjektiv. Weil die Dimensionen der beiden Räume gleich sind, sind beides folglich Isomorphismen. □

Der Eigenraum $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ des Zahloperators $\tilde{H}$ spielt nun insofern eine Sonderrolle, als die Projektionsformel B.2 nicht nur auf das Tripel $\tilde{H}$, $P\ell$, $P\ell^*$ sondern auch auf das $\mathfrak{sl}_2$–Tripel $-\tilde{H}$, $P\ell^*$, $P\ell$ anwendbar ist. Die isotypische Zerlegung eines $\psi \in \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ wird davon aber nicht berührt, denn die Zerlegung B.2 bezüglich des Tripels $\tilde{H}$, $P\ell$, $P\ell^*$ etwa ist nach Bemerkung B.3 auch die eindeutige Eigenraumzerlegung von $\psi$ zum diagonalisierbaren Operator $P\ell^*P\ell$. Aber auf dem Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 0$ von $\tilde{H}$ gilt nach Definition schon $\tilde{H} = 0 = P\ell^*P\ell - P\ell P\ell^*$.

Nach Satz 4.13 ist $P\ell^{2r} : \mathrm{Sym}^{k+r}V \otimes \mathrm{Sym}^{k-r}V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-r}V \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V$ für $0 \leq r \leq k$ ein Isomorphismus, so daß $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ in die direkte Summe $\mathrm{Im}\, P\ell^r \oplus \mathrm{Kern}\, P\ell^r$ zerfällt. Außerdem ist $P\ell^r : \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-r}V \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V$ surjektiv und entsprechend $P\ell^{*r} : \mathrm{Sym}^{k-r}V \otimes \mathrm{Sym}^{k+r}V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ injektiv, so daß $\mathrm{Im}\, P\ell^{*r}$ und $\mathrm{Kern}\, P\ell^r$ genausogut auch als Bild und Kern des diagonalisierbaren Operators $P\ell^{*r}P\ell^r$ charakterisiert werden können. Weil dessen Eigenräume ebenfalls durch die isotypische Zerlegung B.2 bestimmt sind, impliziert die Ambivalenz der isotypischen Zerlegung auf dem Unterraum $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ von $\mathrm{Kern}\, \tilde{H}$ folglich $\mathrm{Im}\, P\ell^r = \mathrm{Im}\, P\ell^{*r}$ und $\mathrm{Kern}\, P\ell^r = \mathrm{Kern}\, P\ell^{*r}$:

**Korollar 4.14** *(Symmetrie der $\mathfrak{sl}_2$–Zerlegung)*
*Der Eigenraum* $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ *von* $\tilde{H}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 0$ *zerfällt in die direkte Summe:*

$$\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V \;\cong\; \mathrm{Im}\, P\ell^r \oplus \mathrm{Kern}\, P\ell^r \qquad \mathrm{Im}\, P\ell^r \;=\; \mathrm{Im}\, P\ell^{*r} \qquad \mathrm{Kern}\, P\ell^r \;=\; \mathrm{Kern}\, P\ell^{*r}$$

*für alle* $r \leq k$*. Das sind natürlich die bekannten Relationen aus der Darstellungstheorie der Liealgebra* $\mathfrak{sl}_2$*, die hier als Algebra der Plückerdifferentiale in einer im wesentlichen endlich–dimensionalen Darstellung auftritt.*

**Definition 4.15** *(Plückerfiltrierung und –graduierung)*
*Die Plückerfiltrierung* $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_k = \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ *ist die aufsteigende Folge der Bilder* $\mathcal{F}_r = \mathrm{Im}\, P\ell^{k-r}$ *von* $\mathrm{Sym}^{2k-r} V \otimes \mathrm{Sym}^r V$ *in* $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$*. Diese Filtrierung stammt von der Graduierung her*

$$\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V \;=\; \bigoplus_{r=0}^{k} \mathrm{PL}_r \;:=\; \bigoplus_{r=0}^{k} \left(\mathrm{Im}\, P\ell^{k-r} \cap \mathrm{Kern}\, P\ell^{k-r+1}\right)$$

*die im wesentlichen der Schnitt der* $\mathfrak{sl}_2$*–isotypischen Zerlegung von* $\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ *mit dem Eigenraum von* $\tilde{H}$ *zum Eigenwert* $0$ *ist.*

Nun trägt $\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ eine kanonische Involution $\sigma : \psi_1 \otimes \psi_2 \longmapsto \psi_2 \otimes \psi_1$, unter der der Unteraum $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ stabil ist und in die Eigenräume $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{Sym}^k V$ und $\Lambda^2 \mathrm{Sym}^k V$ zerfällt. Wie ein Blick auf die Definition 4.10 zeigt, verschränkt $\sigma$ wegen $\sigma \circ P\ell = P\ell^* \circ \sigma$ außerdem $P\ell$ mit $P\ell^*$. Aufgrund des vorangegangenen Korollars 4.14 sind deshalb auch die Unterräume $\mathrm{PL}_r \subset \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ der Plückergraduierung stabil unter $\sigma$. Es zeigt sich, daß $\mathrm{PL}_r$ sogar im Eigenraum $\sigma$ zum Eigenwert $(-1)^r$ liegt:

**Lemma 4.16** *(Symmetrie der Plückergraduierung)*
*Die kanonische Involution* $\sigma : \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ *definiert durch* $\sigma(\psi_1 \otimes \psi_2) = \psi_2 \otimes \psi_1$ *läßt die Plückerfiltrierung* $\mathcal{F}_\bullet$ *invariant und es gilt bereits* $\sigma = (-1)^r$ *auf dem Filtrierungsquotienten* $\mathcal{F}_r / \mathcal{F}_{r-1}$*. Folglich gilt schon* $\sigma = (-1)^r$ *auf dem unter* $\sigma$ *stabilen Komplement* $\mathrm{PL}_r$ *von* $\mathcal{F}_r$ *in* $\mathcal{F}_{r-1}$*.*

**Beweis:** Nach der Polarisationsformel A.4 wird der Filtrierungsraum $\mathcal{F}_r = \mathrm{Im}\, P\ell^{k-r}$ aufgespannt von Elementen der Form $v^k \otimes v^{k-r} w^r$ mit $v,\, w \in V$. Es genügt deshalb, das Lemma nur auf solchen Elementen zu beweisen. Dazu betrachte man im Tensorquadrat $\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ des direkten Produkts $\mathrm{Sym}\, V$ die formale Gleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \frac{d^\nu}{dt^\nu}\Big|_0 e^{v+tw} \otimes e^{v+tw} w^{r-\nu} \;&=\; \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu}\, w^\mu e^v \otimes w^{r-\mu} e^v \\
&=\; \sum_{\mu=0}^{r} \binom{r}{\mu} \left( \sum_{\nu=\mu}^{r} (-1)^\nu \binom{r-\mu}{\nu-\mu} \right) w^\mu e^v \otimes w^{r-\mu} e^v \\
&=\; (-1)^r w^r e^v \otimes e^v
\end{aligned}$$

Der homogene Teil dieser Gleichung in $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V \subset \mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ liest sich dann:

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^r}{k!(k-r)!} w^r v^{k-r} \otimes v^k \\
&= \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \frac{d^\nu}{dt^\nu}\Big|_0 \frac{1}{k!(k-r+\nu)!} (v+tw)^k \otimes (v+tw)^{k-r+\nu} w^{r-\nu} \\
&\equiv \frac{1}{k!(k-r)!} v^k \otimes v^{k-r} w^r \qquad \mathrm{mod}\quad \mathcal{F}_{r-1} \quad \Box
\end{aligned}$$

Zusammenfassend impliziert die Zerlegung von $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ in die direkte Summe der $\mathrm{PL}_r$ den folgenden Satz:

**Satz 4.17** *(Formel von Pieri [F&H])*
*Als Unterräume von $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ zerfallen $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{Sym}^k V$ und $\Lambda^2 \mathrm{Sym}^k V$ in:*

$$\mathrm{Sym}^2 \mathrm{Sym}^k V \;\cong\; \bigoplus_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{PL}_{2r} \qquad\qquad \Lambda^2 \mathrm{Sym}^k V \;\cong\; \bigoplus_{r=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \mathrm{PL}_{2r+1}$$

*Dies entspricht der Zerlegung dieser Räume in irreduzible $\mathbf{GL}\, V$–Darstellungen.*

**Bemerkung 4.18** *(Erste Bianchi–Identität)*
*In genau der gleichen Weise kann man die Plückerfiltrierung auch auf dem Tensorprodukt $\Lambda^k V \otimes \Lambda^k V$ der äußeren Potenzen definieren. Völlig analog zu Lemma 4.16 gilt $\sigma = (-1)^{k-r}$ auf dem Graduierungsraum $\mathrm{PL}_r$. Der Kern von $\mathcal{P}\!\ell$ bzw. $\mathcal{P}\!\ell^*$ in $\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V$ ist nahezu nach Definition der Raum der Lösungen der ersten Bianchi–Identität. In diesem Sinne verallgemeinert die Formel von Pieri die Tatsache, daß die erste Bianchi–Identität die Symmetrie des Krümmungstensors impliziert.*

## 4.3 Geometrie der Diracschen Deltafunktionale

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die $\mathfrak{sl}_2$–Algebra der Plückerdifferentiale untersucht, und die Räume $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ entsprechend in $\mathbf{GL}\, V$–invariante Unterräume zerlegt. Im folgenden Abschnitt wird eine Interpretation dieser Zerlegung als Geometrie der Diracschen Deltafunktionale $\delta_p$ gegeben. Insbesondere erhält man eine algebraische Charakterisierung der Menge aller Lösungen der Gleichungen aus Satz 2.6, die den Parameterraum $M_{0,k}$ der Deformationen der minimalen isometrischen Immersionen zum $k$–ten Eigenwert beschreiben. Es stellt sich heraus, daß $M_{0,k}$ der Kern des iterierten Plückerdifferentials $\mathcal{P}\!\ell^{*k-2}$ in $\mathrm{Sym}^2 H^k V^* \subset \mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^k V^*$ ist. Umgekehrt kann man sich dann fragen, ob nicht auch die anderen Schritte der Plückerfiltrierung eine geometrische Interpretation zulassen. Eine solche Interpretation wurde von Toth [To2] angegeben und motiviert das Studium eines ganzen Turms $\mathcal{M}_k^{(0)} \supset \mathcal{M}_k^{(1)} \supset \ldots \supset \mathcal{M}_k^{(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1)}$ von Modulräumen, in dem die Modulräume $\mathcal{M}_{\lambda_k} = \mathcal{M}_k^{(1)}$ von do Carmo–Wallach enthalten sind.

Ein wesentliches Ergebnis des Kapitels 2 war die Charakterisierung des Parameterraums $M_0$ der minimalen isometrischen Immersionen einer Mannigfaltigkeit zum Eigenwert $\lambda$ in

Satz 2.6. Für die Sphäre $S_V$ und den $k$–ten Eigenwert $\lambda_k = k(n-k+2)$ ist $M_{0,k}$ der Raum der Lösungen $G_0 \in \mathrm{Sym}^2 H^k V^*$ der Gleichungen:

$$\begin{array}{llcll} \mathit{1.} & G_0(\ \delta_p\ ,\ \delta_p\ ) & = & 0 & \text{für alle } p \in S_V \\ \mathit{2.} & G_0(X\delta_p, Y\delta_p) & = & 0 & \text{für alle } p \in S_V \text{ und } X,\, Y \in T_pS_V \end{array}$$

Wenn man den Raum $E_\lambda \cong H^kV^*$ als Unterraum des Raums $\mathrm{Sym}^kV^*$ der homogenen Polynome auf $V$ vom Grad $k$ auffaßt, dann entspricht dem Diracschen Deltafunktional $\delta_p$ gemäß den Konventionen aus Anhang A der Summand $\frac{1}{k!}p^k$ der formalen Expotentialsumme $\delta_p = e^p = \sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{\nu!}p^\nu$ unter der kanonischen Paarung von $\mathrm{Sym}^kV^*$ mit $\mathrm{Sym}^kV$. Deshalb steht im folgenden nur $\delta_p$ für jeden Ausdruck der Form $\frac{1}{\nu!}p^\nu$, wobei $\nu$ gerade so gewählt sei, daß das Endergebnis homogen vom richtigen Grad ist.

Im Kapitel 2 wurde ganz allgemein für Riemannsche Mannigfaltigkeiten $N$ ein Repräsentant für die zu einem Modul $\tilde{G} \in \mathcal{M}_\lambda$ gehörende Äquivalenzklasse minimaler isometrischer Immersionen konstruiert. Auf den Sphären kann man diese Konstruktion geringfügig variieren, und faßt dabei $\tilde{G} \in \mathrm{Sym}^2H^kV^*$ bereits als symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Sym}^kV$ auf. Statt im unhandlichen Faktorraum $(H^kV^*)^* \cong \mathrm{Sym}^kV/(H^kV^*)^\perp$ kann man dann nämlich im Raum $\mathrm{Sym}^kV$ arbeiten. In diesem Sinne ist

$$\phi_{\tilde{G}}:\ S_V \longrightarrow \mathrm{Sym}^kV/_{\mathrm{Kern}\,\tilde{G}},\quad p \longmapsto \delta_p + \mathrm{Kern}\,\tilde{G}$$

wegen $\mathrm{Sym}^kV = H^kV \oplus (H^kV^*)^\perp$ und $(H^kV^*)^\perp \subset \mathrm{Kern}\,\tilde{G}$ ebenfalls ein Repräsentant der zu $\tilde{G}$ gehörenden Äquivalenzklasse minimaler isometrischer Immersionen. Für einen Tangentialvektor $X \in T_pS_V = \{p\}^\perp$ gilt dann insbesondere $(X\phi_{\tilde{G}})(p) = X \cdot \delta_p + \mathrm{Kern}\,\tilde{G}$.

Nach dieser einleitenden Vorbemerkung betrachte man nun die Bedingungen erster Art $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$, $p \in S_V$, für allgemeine $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$. Der Lösungsraum ist offensichtlich der Schnitt des Unterraums $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^* \subset \mathrm{Sym}^kV^* \otimes \mathrm{Sym}^kV^*$ mit dem Annihilator von:

$$\mathrm{Spann}\{\delta_p \otimes \delta_p \text{ für } p \in V\} \ \subset\ \mathrm{Sym}^kV \otimes \mathrm{Sym}^kV$$

Für die Komultipikation $\Delta:\ \mathrm{Sym}^{2k}V \longrightarrow \mathrm{Sym}^kV \otimes \mathrm{Sym}^kV$ gilt nun $\delta_p \longmapsto \delta_p \otimes \delta_p$ nach Definition, so daß das Erzeugnis der $\delta_p \otimes \delta_p$ in $\mathrm{Sym}^kV \otimes \mathrm{Sym}^kV$ gerade das Bild von $\Delta$ ist. Andererseits gilt in diesem speziellen Fall $\Delta = \frac{1}{k!}P\ell^k$ unter $\mathrm{Sym}^{2k}V \cong \mathrm{Sym}^{2k}V \otimes \mathbb{R}$. Der Bemerkung in der Definition 4.10 nach sind $P\ell$ und $P\ell^*$ aber adjungiert unter der kanonischen Paarung von $\mathrm{Sym}\,V \otimes \mathrm{Sym}\,V$ mit $\mathrm{Sym}\,V^* \otimes \mathrm{Sym}\,V^*$, so daß der Annihilator des Bildes von $\Delta = \frac{1}{k!}P\ell^k$ gerade der Kern von $P\ell^{*k}$ ist:

**Satz 4.19**
*Der Vektorraum der Lösungen $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$ der Gleichungen $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ für alle $p \in S_V$ ist gerade der Kern des iterierten Plückerdifferentials $P\ell^{*k}$ in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$.*

Das entscheidende Argument zum Beweis dieses Satzes ist somit der Verweis auf die Adjungiertheit der Plückerdifferentiale $P\ell$ und $P\ell^*$, die auch der springende Punkt bei der Bestimmung des Raums der Lösungen $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$ der Gleichungen erster und zweiter Art $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ und $G_0(X\delta_p, Y\delta_p) = 0$ für alle $p \in S_V$ und $X, Y \in V$ mit $\langle p, X\rangle = 0 = \langle p, Y\rangle$ ist. Für diesen wegen Satz 2.6 besonders interessierenden Fall sei dem allgemeinen Satz 4.22 noch ein einfacheres *ad hoc* Argument vorangestellt. Zunächst darf man bei symmetrischem $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$ den Ausdruck $G_0(X\delta_p, Y\delta_p)$ in $X$ und $Y$ polarisieren und erhält den Raum aller Lösungen deshalb als Annihilator des Unterraums:

$$\mathrm{Spann}\{\delta_p \otimes \delta_p,\ X\delta_p \otimes X\delta_p \text{ für alle } p,\ X \in V \text{ mit } \langle p,\ X\rangle = 0\} \ \subset\ \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$$

Eine symmetrische Bilinearform $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$, die bereits die Gleichungen erster Art $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ für alle $p \in V$ erfüllt, liegt nach dem soeben bewiesen Satz 4.19 im Kern von $P\ell^{*k}$. Nach Pieris Formel 4.17 gilt $\mathrm{Kern}\, P\ell^{*k} = \mathrm{Kern}\, P\ell^{*k-1}$ auf dem Unterraum $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$ von $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^k V^*$, so daß ein solches $G_0$ auch bereits $G_0(\delta_p, X\delta_p) = 0$ für alle $p,\ X \in V$ erfüllt. Naiv würde man das ganz einfach durch Differenzieren beweisen, und diese Analogie zwischen der algebraisch definierten Plückerfiltrierung und der Analysis durchzieht auch alle folgenden Rechnungen wie ein roter Faden.

An dieser Stelle ist jedoch erst einmal die Folgerung wichtig, daß man in der Definition des Raums $\mathrm{Spann}\{\delta_p \otimes \delta_p,\ X\delta_p \otimes X\delta_p\}$ nicht auf der Orthogonalität von $X$ und $p$ bestehen muß, denn wenn $G_0$ bereits $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ für alle $p \in S_V$ erfüllt, dann gilt jedenfalls auch $G_0(X\delta_p, X\delta_p) = G_0(X_0\delta_p, X_0\delta_p)$ für die orthogonale Projektion $X_0$ eines $X \in V$ auf $\{p\}^\perp$. Nun liegt

$$\frac{1}{k!} P\ell^k(X^2\delta_p \otimes 1) \ =\ X^2\delta_p \otimes \delta_p \ +\ 2X\delta_p \otimes X\delta_p \ +\ \delta_p \otimes X^2\delta_p$$

im Bild von $P\ell^k$, so daß für eine Lösung $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$ der Gleichungen erster Art $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ für alle $p \in V$ bereits $G_0(X\delta_p, X\delta_p) = -G_0(\delta_p, X^2\delta_p)$ für alle $p,\ X \in V$ gilt. Infolgedessen sind

$$\mathrm{Spann}\{\delta_p \otimes \delta_p,\ X\delta_p \otimes X\delta_p\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Spann}\{\delta_p \otimes X^2\delta_p\}$$

als Unterräume von $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^k V$ zwar verschieden, bestimmen aber den gleichen Annihilator im Raum $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$. Dieser ist damit einerseits der Raum der Lösungen der Gleichungen $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ und $G_0(X\delta_p, X\delta_p) = 0$ für alle $p,\ X \in V$ mit oder ohne die zusätzliche Bedingung $\langle p,\ X\rangle = 0$, andererseits aber auch der Annihilator des Bildes von $P\ell^{k-2}$. Nutzt man nun wieder die Adjungiertheit der Plückerdifferentiale, so hat man damit den zentralen Satz bewiesen:

**Satz 4.20** *(Charakterisierung des Parameterraums $M_{0,k}$)*
*Der Parameterraum $M_{0,k}$ des Modulraums $\mathcal{M}_{\lambda_k}$ der minimalen isometrischen Immersionen der Sphäre $S_V$ zum $k$–ten Eigenwert ist der Kern des iterierten Plückerdifferentials $P\ell^{*k-2}$ auf $\mathrm{Sym}^2 H^k V^*$ aufgefaßt als Unterraum von $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^k V^*$.*

**Korollar 4.21** *(Starrheit minimaler isometrischer Immersion für $k < 4$)*
*Die Elemente $\delta_p \otimes \delta_p$ und $X\delta_p \otimes X\delta_p$ von $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V$ mit $p \in S_V$ und $X \in T_pS_V = \{p\}^\perp$ spannen den Raum $\mathrm{PL}_0 \oplus \mathrm{PL}_2 \subset \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V$ auf. Nach Pieris Formel 4.17 ist dieser Raum für $k < 4$ bereits der gesamte Raum $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V$, es gibt also keine nichttriviale Lösung $G_0$ der Gleichungen $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ und $G_0(X\delta_p, Y\delta_p) = 0$ erster und zweiter Art aus Satz 2.6. Alle minimalen isometrischen Immersionen der Sphäre $S_V$ zu Eigenwerten $\lambda_k$ mit $k < 4$ sind deshalb äquivalent zur jeweiligen Standardimmersion.*

Für jeden Schritt der vollen Plückerfiltrierung gibt es nun Verallgemeinerungen der beiden Sätze 4.19 und 4.20, bei denen verschiedene Erzeugersysteme für den Raum $\operatorname{Im} P\ell^{k-r}$ angegeben werden. Speziell benötigt werden für die weiteren Rechnungen die zwei unterschiedlich großen Erzeugersysteme des folgenden Satzes:

**Satz 4.22** *(Kleines und großes Erzeugersystem für* $\operatorname{Im} P\ell^{k-r}$*)*
*Für alle* $0 \leq r \leq k$ *wird das Bild des iterierten Plückerdifferentials* $P\ell^{k-r}$ *aufgespannt durch:*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im} P\ell^{k-r} \\
&\quad = \operatorname{Spann}\{X^\nu \delta_p \otimes X^\mu \delta_p : \nu + \mu \leq r,\ \nu,\ \mu \leq \tfrac{r+1}{2} \text{ und } p,\ X \in V\} \\
&\quad = \operatorname{Spann}\{X^\nu \delta_p \otimes X^\mu \delta_p : \nu + \mu \leq r,\ \nu,\ \mu \leq \tfrac{r+1}{2} \text{ und } p,\ X \in V \text{ mit } \langle p,\ X\rangle = 0\} \\
&\quad = \operatorname{Spann}\{X^\nu \delta_p \otimes Y^\mu \delta_p : \nu + \mu \leq r \text{ und } p,\ X,\ Y \in V\} \\
&\quad = \operatorname{Spann}\{X^\nu \delta_p \otimes Y^\mu \delta_p : \nu + \mu \leq r \text{ und } p,\ X,\ Y \in V \text{ mit } \langle p,\ X\rangle = 0 = \langle p,\ Y\rangle\}
\end{aligned}$$

**Beweis:** Die zusätzliche Orthogonalitätsforderung in den zwei Varianten des kleinen und großen Erzeugersystems wurde nur der Übersichtlichkeit halber mit aufgenommen. Die Art und Weise der Definition der beiden Erzeugersysteme selbst stellt sicher, daß diese zusätzliche Forderung keinerlei Auswirkung hat. Betrachtet man zunächst das große Erzeugersystem, dann wird das Bild des iterierten Plückerdifferentials $P\ell^{k-r}$ nach der Polarisationsformel schon von den $\frac{1}{(k-r)!} P\ell^{k-r}(\delta_p \otimes Y^r) = \delta_p \otimes Y^r \delta_p$ mit $p,\ Y \in V$ aufgespannt, das heißt:

$$\operatorname{Im} P\ell^{k-r} \;=\; \operatorname{Spann}\{\delta_p \otimes Y^r \delta_p\} \;\subset\; \operatorname{Spann}\{X^\nu \delta_p \otimes Y^\mu \delta_p : \nu + \mu \leq r\}$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachtet man für $\nu + \mu \leq r$ und $\rho \leq \nu$ die folgenden polynominalen Kurven in $\operatorname{Im} P\ell^{k-\rho-\mu} \subset \operatorname{Im} P\ell^{k-r}$:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Im} P\ell^{k-\rho-\mu}, \quad t \longmapsto \frac{1}{(k-\rho-\mu)!} P\ell^{k-\rho-\mu}(\delta_{p+tX} \otimes X^\rho Y^\mu) \;=\; \delta_{p+tX} \otimes X^\rho Y^\mu \delta_{p+tX}$$

Alle Koeffizienten dieser Polynome liegen bereits in $\operatorname{Im} P\ell^{k-r}$ und damit auch:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\rho=0}^{\nu} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} \frac{d^{\nu-\rho}}{dt^{\nu-\rho}}\bigg|_0 (\delta_{p+tX} \otimes X^\rho Y^\mu \delta_{p+tX}) \\
&\quad = \sum_{\iota=0}^{\nu} \left( \sum_{\rho=0}^{\nu-\iota} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} \binom{\nu-\rho}{\iota} \right) X^\iota \delta_p \otimes X^{\nu-\iota} Y^\mu \delta_p \quad = \quad X^\nu \delta_p \otimes Y^\mu \delta_p
\end{aligned}$$

Somit spannt das große Erzeugersystem tatsächlich nur das Bild von $P\ell^{k-r}$ auf. Der Beweis für das kleine Erzeugersystem verläuft über Induktion nach $r$, wobei die Menge $\{\delta_p \otimes \delta_p\}$ für $r = 0$ jedenfalls $\operatorname{Im} P\ell^k$ aufspannt. Im Induktionsschritt von $r$ nach $r+1$ benutzt man die Induktionsvoraussetzung in Form der schon bewiesenen Aussage für das große Erzeugersystem und betrachtet für $\nu + \mu = r$ polynominale Kurven der Form:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Im} P\ell^{k-r}, \quad t \longmapsto X^\nu \delta_{p+tX} \otimes X^\mu \delta_{p+tX}$$

Durch Ableiten in $t = 0$ findet man $X^{\nu+1}\delta_p \otimes X^\mu \delta_p + X^\nu \delta_p \otimes X^{\mu+1} \delta_p \in \operatorname{Im} P\ell^{k-r}$ und folgert:

$$X^{\nu+1}\delta_p \otimes X^\mu \delta_p \;\equiv\; -X^\nu \delta_p \otimes X^{\mu+1}\delta_p \;\equiv\; \ldots \;\equiv\; (-1)^{\nu+1} \delta_p \otimes X^{r+1} \delta_p \quad \operatorname{mod} \operatorname{Im} P\ell^{k-r} \qquad \square$$

**Korollar 4.23** *(Überhangrelationen)*
*Eine symmetrische Bilinearform* $G_0 \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$ *mit* $G_0(X^\nu\delta_p, X^\mu\delta_p) = 0$ *für alle* $p, X \in V$ *und alle* $\nu, \mu \leq d$ *und liegt somit in* $\mathrm{Kern}\, P\ell^{*k-2d}$. *Pieris Formel 4.17 zufolge gilt dann schon* $P\ell^{*k-2d-1}G_0 = 0$. *Deswegen erfüllt* $G_0$ *zusätzlich die Überhangrelationen* $G_0(X^{d+1}\delta_p, Y^d\delta_p) = 0$ *für alle* $p$, $X$ *und* $Y$ *aus* $V$.

**Definition 4.24** *(Der Turm der Modulräume)*
*Der Modulraum* $\mathcal{M}_{\lambda_k}$ *der minimalen isometrischen Immersionen der Sphären zum* $k$*–ten Eigenwert* $\lambda_k$ *ist der Schnitt des Kegels* $P^+H^kV^*$ *der positiv semidefiniten Bilinearformen auf* $H^kV$ *mit dem affinen Unterraum* $M$ *der Lösungen der Gleichungen aus Satz 2.6 modelliert nach* $M_{0,k} = \mathrm{Kern}\, P\ell^{*k-2} \cap \mathrm{Sym}^2 H^kV^*$. *Dieser Modulraum enthält stets den Modul* $G$ *der Standardimmersion von Takahashi nach Satz 3.2. Hält man diesen Aufpunkt fest und ersetzt lediglich den Raum* $M_{0,k}$ *durch die* $M_{0,k}^{(d)} := \mathrm{Kern}\, P\ell^{*k-2d} \cap \mathrm{Sym}^2 H^kV^*$, *so erhält man den Turm*

$$\mathcal{M}_k^{(0)} \supset \mathcal{M}_k^{(1)} = \mathcal{M}_{\lambda_k} \supset \ldots \supset \mathcal{M}_k^{(\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1)} \supset \mathcal{M}_k^{(\lfloor\frac{k}{2}\rfloor)} = \{G\}$$

*der Modulräume* $\mathcal{M}_k^{(d)} = P^+H^kV^* \cap (G + M_{0,k}^{(d)})$. *Alternativ kann man* $\mathcal{M}_k^{(d)} \subset \mathrm{Sym}^2 H^kV^*$ *auch direkt als Menge aller positiv semidefiniten Urbilder des speziellen Elements* $P\ell^{*k-2d}G$ *aus* $\mathrm{Sym}^{2d}V^* \otimes \mathrm{Sym}^{2k-2d}V^*$ *unter dem iterierten Plückerdifferential* $P\ell^{*k-2d}$ *definieren.*

Der Modulraum $\mathcal{M}_k^{(0)}$ etwa ist der Modulraum der „Eigenabbildungen“ $\phi : S_V \longrightarrow S_W \subset W$ unter der zu Definition 2.2 analogen Äquivalenzrelation, deren Koeffizienten $\alpha \circ \phi$ für $\alpha \in W^*$ nicht nur glatte Funktionen, sondern bereits Eigenfunktionen des skalaren Laplaceoperators auf $S_V$ zum selben Eigenwert $\lambda_k$ sind. Nach Satz 4.19 ist $\mathcal{M}_k^{(0)}$ modelliert nach dem Unterraum $M_{0,k}^{(0)}$ der Lösungen der Gleichungen $G_0(\delta_p, \delta_p) = 0$ in $\mathrm{Sym}^2 H^kV^*$, so daß das Argument aus dem Beweis von Satz 2.7 zeigt, daß auch schon $\mathcal{M}_k^{(0)}$ kompakt ist. Für die geometrische Interpretation dieses Turms von Modulräumen benötigt man den Begriff der höheren Fundamentalform:

**Definition 4.25** *(Höhere Fundamentalformen)*
*Zu einer Immersion* $\phi : N \longrightarrow S_W \subset W$ *einer Mannigfaltigkeit* $N$ *in die Sphäre* $S_W$ *vom Radius* $r$ *eines euklidischen Vektorraums* $W$ *und einem Punkt* $p$ *auf* $N$ *gehört die möglicherweise unvollständige Filtrierung* $\mathbb{R}\phi = \mathcal{F}_p^{(0)} \subset \mathcal{F}_p^{(1)} \subset \ldots \subset W$ *mit:*

$$\mathcal{F}_p^{(d)} := \mathbb{R}\phi(p) + \mathrm{Spann}\{(X_1 \ldots X_d\phi)(p) : X_\nu \textit{ Vektorfeld auf } N\}$$

*Die* $d$*–te höhere Fundamentalform im Punkte* $p$ *ist die Abbildung:*

$$I\!I_p^{(d)} : \mathrm{Sym}^d T_pN \longrightarrow \mathcal{F}_p^{(d)} / \mathcal{F}_p^{(d-1)}, \quad X_1 \cdot \ldots \cdot X_d \longmapsto (X_1 \ldots X_d\phi)(p) \textit{ mod } \mathcal{F}_p^{(d-1)}$$

*Dabei kann man* $\mathcal{F}_p^{(d)}/\mathcal{F}_p^{(d-1)}$ *vermöge der orthogonalen Projektion auch als Unterraum von* $W$ *auffassen. Cum grano salis ist die nullte Fundamentalform* $I\!I_p^{(0)}$ *die ursprüngliche Abbildung* $\phi(p) =: I\!I_p^{(0)}(\mathbf{1})$. *Solange die Dimensionen aller Filtrierungsräume* $\mathcal{F}_p^{(\bullet)}$ *bis zum Grad* $d$ *auf einer offenen Teilmenge von* $N$ *konstant sind, gibt es dort lokal glatte, an die Filtrierung angepaßte Orthonormalbasen von* $W$, *so daß auf dieser offenen Menge auch alle höheren Fundamentalformen* $I\!I^{(\nu)}$, $\nu \leq d$, *glatt sind.*

In dieser Allgemeinheit wird man nicht erwarten, daß $W$ die Vereinigung aller $\mathcal{F}_p^{(\bullet)}$ und die Filtrierung somit vollständig ist, obwohl dies für analytische Abbildungen gilt, deren Bild den Zielraum $W$ aufspannt. Faßt man nun die höheren Fundamentalformen lediglich als lineare Abbildungen $\phi : \mathrm{Sym}^d T_pN \longrightarrow W$ auf, dann kann man sie durch etwas einfachere Objekte ersetzen:

**Definition 4.26** *(Moduli höherer Fundamentalformen)*
*Zwei lineare Abbildungen $\phi : \mathrm{Sym}^d T_pN \longrightarrow W$ und $\tilde{\phi} : \mathrm{Sym}^d T_pN \longrightarrow \tilde{W}$ in euklidische Vektorräume $W$ und $\tilde{W}$ heißen äquivalent, geschrieben $\phi \sim \tilde{\phi}$, wenn es eine Isometrie $F : \mathrm{Spann}\{\phi\} \longrightarrow \mathrm{Spann}\{\tilde{\phi}\}$ gibt mit $\tilde{\phi} = F \circ \phi$. Das Argument aus Kapitel 2 zeigt, daß die Menge der Äquivalenzklassen kanonisch isomorph zum Kegel $P^+\mathrm{Sym}^d T_p^*N$ der positiv semidefiniten Bilinearformen auf $\mathrm{Sym}^d T_pN$ ist. Der Modul der Abbildung $\phi$ ist dabei die symmetrische Bilinearform $\langle \phi(\cdot),\, \phi(\cdot)\rangle_W$.*

In diesem Sinne bestimmen die Moduli $\langle \mathrm{II}^{(d)}(\cdot, \ldots, \cdot), \mathrm{II}^{(d)}(\cdot, \ldots, \cdot)\rangle_W$ der höheren Fundamentalformen die $\mathrm{II}^{(d)}$ bis auf Äquivalenz. Allerdings verliert man dabei die Information, wie die Fundamentalformen analytisch zusammenhängen. Sofern die Filtrierung im Punkt $p \in N$ vollständig ist, reichen die Moduli dennoch aus, um noch die Dimension von $W$ zu bestimmen:

$$\dim W \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{Rang}\,\langle \mathrm{II}_p^{(\nu)},\, \mathrm{II}_p^{(\nu)}\rangle$$

Bei einer isometrischen Immersion $\phi : N \longrightarrow S_W \subset W$ in eine Sphäre $S_W$ eines euklidischen Vektorraums $W$ kann man die zweite Fundamentalform $\mathrm{II}_W$ als Immersion von $N$ in den Vektorraum $W$ durch die zweite Fundamentalform $\mathrm{II}^{(2)}$ ausdrücken und so die Gaußgleichungen für die Krümmung in einem Punkt $p \in N$

$$g(R_{X,Y}Z, U) \;=\; \langle \mathrm{II}_W(X,\, U), \mathrm{II}_W(Y, Z)\rangle \;-\; \langle \mathrm{II}_W(X,\, Z), \mathrm{II}_W(Y, U)\rangle$$

als lineare Zwangsbedingung an den Modul $\langle \mathrm{II}^{(2)},\, \mathrm{II}^{(2)}\rangle$ der zweiten Fundamentalform auffassen. Eine genauere Untersuchung dieser Zwangsbedingung für Sphären wird im Kapitel 8 unternommen und ergibt im Endergebnis den Satz 8.7 von Moore.

Neben der analytisch definierten Filtrierung $\mathcal{F}_p^{(d)}$ kann man im Fall der Sphären auch eine algebraische Filtrierung $\mathcal{F}_{p,\mathrm{alg}}^{(d)} := \mathrm{Spann}\{X^d\delta_p \,:\, X \in V\} + \mathrm{Kern}\,\tilde{G}$ für den Zielraum $\mathrm{Sym}^k V/\mathrm{Kern}\,\tilde{G}$ der minimalen isometrischen Immersion $\phi_{\tilde{G}}$ einführen. Allerdings stimmen diese beide Filtrierungen überein, denn alle Vektoren $X_1, \ldots, X_d \in T_pS_V = \{p\}^\perp$ lassen sich zu Vektorfeldern $\tilde{X}_\nu := X \,-\, \langle q,\, X\rangle q \in T_qS_V$ auf der Sphäre fortsetzen. Für diese gilt etwa

$$\begin{aligned}
(\tilde{X}\phi_{\tilde{G}})(q) \quad &= \quad \tilde{X}\delta_q \,+\, \mathrm{Kern}\,\tilde{G} \\
(\tilde{X}_1\tilde{X}_2\phi_{\tilde{G}})(q) \quad &= \quad \tilde{X}_1\tilde{X}_2\delta_q - k\langle \tilde{X}_1,\, X_2\rangle\delta_q \,+\, \mathrm{Kern}\,\tilde{G}
\end{aligned}$$

und weiter durch Induktion:

$$\begin{aligned}
(\tilde{X}_1 \ldots \tilde{X}_d\phi_{\tilde{G}})(p) \;&=\; \tilde{X}_1\Big(\tilde{X}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{X}_d\delta_q \,+\, O(q^{k-d+2})\Big) \,+\, \mathrm{Kern}\,\tilde{G} \\
&=\; X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_d\delta_p \,+\, O(p^{k-d+1}) \,+\, \mathrm{Kern}\,\tilde{G}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist die analytische Filtrierung $\mathcal{F}_p^{(d)} = \mathcal{F}_{p,\mathrm{alg}}^{(d)}$ wegen $\mathcal{F}_p^{(k)} = \mathrm{Sym}^k V/\mathrm{Kern}\,\tilde{G}$ vollständig und die höheren Fundamentalformen lassen sich mit Hilfe der algebraischen Filtrierung berechnen. Zunächst ist das Bild der Multiplikation $g^{-1}\cdot : \mathrm{Sym}^{k-2}V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V$ mit dem kometrischen Tensor gerade der Annihilator $(H^kV^*)^\perp$ von $H^kV^*$ in $\mathrm{Sym}^k V$. Die orthogonale Zerlegung $V = \mathbb{R}p \oplus \{p\}^\perp$ bewirkt für jeden Punkt $p \in S_V$ eine Aufspaltung $g^{-1} = \frac{1}{2}p^2 + g^{-1}_{\{p\}^\perp}$, so daß $p^2\mathfrak{V}$ und $(-2g^{-1}_{\{p\}^\perp})\mathfrak{V}$ für alle $\mathfrak{V} \in \mathrm{Sym}^{k-2}V$ äquivalent modulo $(H^kV^*)^\perp$ sind. Infolgedessen faktorisiert die surjektive Abbildung

$$\mathrm{Sym}^d\{p\}^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_p^{(d)}/\mathcal{F}_p^{(d-1)} \subset \mathrm{Sym}^k V/\mathrm{Kern}\,\tilde{G}, \qquad \mathfrak{V} \longmapsto \mathfrak{V}\delta_p + \mathrm{Kern}\,\tilde{G}$$

für alle $\tilde{G} \in \mathrm{Sym}^2 H^kV^*$ über die orthogonale Projektion $\mathrm{Sym}^d\{p\}^\perp \longrightarrow H^d\{p\}^\perp$. Ein ähnliches Argument kann man dazu benutzen, die Filtrierung $\mathcal{F}_p^{(\bullet)}$ im Falle $\mathrm{Kern}\,\tilde{G} = (H^kV^*)^\perp$ mittels des Isomorphismus von $\mathrm{Sym}^k V/(H^kV^*)^\perp$ mit $H^kV$ mit der in Satz 4.8 aufscheinenden Filtrierung

$$\mathcal{F}_p^{(d)} = \bigoplus_{\nu=0}^{d} H^\nu\{p\}^\perp \subset H^kV$$

zu identifizieren. Für den Modul $G$ der Standardimmersion ist diese Zerlegung von $\mathcal{F}_p^{(d)}$ orthogonal und die $d$–te Fundamentalform $\mathrm{I\!I}_p^{(d)}$ ist demnach die Projektion auf $H^d\{p\}^\perp$. Für allgemeinere $\tilde{G}$ stimmt dies natürlich nicht mehr, aber solange $\tilde{G}$ positiv definit auf $H^kV$ ist, bleiben die Dimensionen der Filtrierungsräume unverändert und alle höheren Fundamentalformen sind glatt.

**Satz 4.27** *(Interpretation der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$)*
*Für $0 \leq d \leq \frac{k}{2} - 1$ ist der Modulraum $\mathcal{M}_k^{(d)}$ die Menge aller Äquivalenzklassen der Eigenabbildungen der Sphäre $S_V$ in Sphären, deren höhere Fundamentalformen $\mathrm{I\!I}^{(\bullet)}$ bis zum Grad $d$ in jedem Punkt äquivalent zu den Fundamentalformen der Standardimmersion $G$ sind.*

**Beweis:** Nach Satz 4.22 ist klar, daß alle $\tilde{G} \in \mathcal{M}_k^{(d)}$ in jedem Punkt $p \in S_V$ das gleiche Skalarprodukt auf dem Filtrierungsraum $\mathcal{F}_p^{(d)}$ induzieren. Folglich sind auch alle ihre Fundamentalformen bis zum Grad $d$ äquivalent. Die Umkehrung beweist man durch Induktion nach $d$, wobei der Induktionsanfang einfach der Satz 4.19 ist. Sei also $\tilde{G} \in \mathcal{M}_k^{(d)}$ der Modul einer Eigenabbildung der Sphäre $S_V$ zum $k$–ten Eigenwert mit Standardfundamentalformen bis zum Grad $d$, deren $d+1$–te Fundamentalform $\mathrm{I\!I}_p^{(d+1)}$ in jedem Punkt $p \in S_V$ äquivalent zur $d+1$–ten Fundamentalform der Standardimmersion $G$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung induziert $\tilde{G} \in \mathcal{M}_k^{(d)}$ in allen Punkten $p \in S_V$ dasselbe Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_p^{(d)} \subset \mathrm{Sym}^k V/\mathrm{Kern}\,G$ wie $G$. Zusätzlich legen die Überhangrelationen 4.23 bereits alle Skalarprodukte $\tilde{G}(\mathcal{F}_p^{(d+1)}, \mathcal{F}_p^{(d)}) = G(\mathcal{F}_p^{(d+1)}, \mathcal{F}_p^{(d)})$ eindeutig fest. Somit ist das $G$–orthogonale Komplement von $\mathcal{F}_p^{(d)}$ in $\mathcal{F}_p^{(d+1)}$ auch orthogonal bezüglich $\tilde{G}$. Wenn nun auch schon die Einschränkungen von $\tilde{G}$ und $G$ auf dieses orthogonale Komplement in jedem Punkt übereinstimmen, dann induzieren $\tilde{G}$ und $G$ auf allen $\mathcal{F}_p^{(d+1)}$, $p \in S_V$, dasselbe Skalarprodukt und $\tilde{G}$ liegt in $\mathcal{M}_k^{(d+1)}$ nach Satz 4.22. Aber diese Forderung ist genau dann erfüllt, wenn $\tilde{G}$ und $G$ überall äquivalente Fundamentalformen vom Grad $d+1$ haben. $\square$

Zum Schluß dieses Kapitels wird die algebraische Charakterisierung der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ und ihrer Parameterräume dazu benutzt, für alle $0 \leq d \leq \frac{k}{2} - 1$ eine „Multiplikation“ auf der Vereinigung der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^n$ der $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ über $n \geq 4$ zu definieren, die es ermöglicht, Beispiele für Randpunkte der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^n$ aus Randpunkten der Modulräume kleinerer Dimension zu konstruieren:

**Satz 4.28** *(Multiplikation minimaler isometrischer Immersionen)*
*Zu jeder isometrischen Einbettung $V_1^* \oplus \ldots \oplus V_r^* \longrightarrow \tilde{V}^*$ der Summe euklidischer Vektorräume $V_\nu^*$ der Dimension $n_\nu$ in einen euklidischen Vektorraum $\tilde{V}^*$ der Dimension $\tilde{n}$ und alle $k$, $d$ mit $d \leq \frac{k}{2} - 1$ induzieren die entsprechenden Einbettungen der $\mathrm{Sym}^k V_\nu^* \otimes \mathrm{Sym}^k V_\nu^*$ in den Raum $\mathrm{Sym}^k \tilde{V}^* \otimes \mathrm{Sym}^k \tilde{V}^*$ eine affin multilineare Multiplikation*

$$\Psi : \ \mathcal{M}_k^{(d)} V_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_k^{(d)} V_r \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}_k^{(d)} \tilde{V}$$

*der zugehörigen Modulräume mit:*

$$\begin{aligned} \Psi(G_1, \ldots, G_r) \ &:= \ G_{\tilde{V}} + C_{n_1,\tilde{n}}(G_1 - G_{V_1}) + \ldots + C_{n_r,\tilde{n}}(G_r - G_{V_r}) \\ &= \ G_{\mathrm{Rest}} + C_{n_1,\tilde{n}} G_1 + \ldots + C_{n_r,\tilde{n}} G_r \end{aligned}$$

*Dabei bezeichnet etwa $G_{\tilde{V}}$ den Modul der Standardimmersion der Sphäre $S_{\tilde{V}}$, $G_{\mathrm{Rest}}$ die Projektion dieser Metrik auf das orthogonale Komplement von $H^k V_1^* \oplus \ldots \oplus H^k V_r^*$ in $H^k \tilde{V}^*$ und $C_{n,\tilde{n}}$ die positiven Konstanten:*

$$C_{n,\tilde{n}} \ := \ \frac{[\frac{\tilde{n}-4}{2} + k]_{\tilde{\kappa}} \, [\frac{n-1}{2} + \tilde{\kappa}]_{\tilde{\kappa}}}{[\frac{n-4}{2} + k]_{\tilde{\kappa}} \, [\frac{\tilde{n}-1}{2} + \tilde{\kappa}]_{\tilde{\kappa}}} \qquad\qquad \tilde{\kappa} \ := \ \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$$

*Die Multiplikation $\Psi$ bildet den Rand des Produkts $\mathcal{M}_k^{(d)} V_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_k^{(d)} V_r$ in den Rand von $\mathcal{M}_k^{(d)} \tilde{V}$ ab und ist additiv für den Korang, das heißt die Dimension des Kerns symmetrischer Bilinearformen.*

**Beweis:** Die isometrische Einbettung von $V_1^*$ in den Raum $\tilde{V}^*$ kann wie die entsprechenden Einbettungen der anderen $V_\nu^*$ auf die $k$–te symmetrische Potenz fortgesetzt werden. Nach Konstruktion kommutiert diese Einbettung mit den Operatoren $K$, $K^*$, $P\ell$ und $P\ell^*$, und bildet deshalb den Parameterraum

$$M_{0,k}^{(d)} V_1 \ := \ \mathrm{Kern}\, P\ell^{*k-2d} \cap \mathrm{Kern}\, K \cap \mathrm{Kern}\, K^* \ \subset \ \mathrm{Sym}^2 \mathrm{Sym}^k V_1^*$$

in den Parameterraum $M_{0,k}^{(d)} \tilde{V}$ ab. Die erste angegebene Formel für $\Psi(G_1, \ldots, G_r)$ garantiert damit, daß das Bild jedenfalls in dem affinen Raum $M_k^{(d)} \tilde{V}$ liegt. Die zweite hingegen zeigt sofort, daß $\Psi(G_1, \ldots, G_r)$ positiv semidefinit und sein Kern die direkte Summe der Kerne der $G_\nu$ in $H^k V_1 \oplus \ldots H^k V_r \subset H^k \tilde{V}$ ist. Offensichtlich stimmen beide Formeln überein, wenn man gemäß Satz C.2 die Moduli der Standardimmersionen durch die Standardskalarpodukte ausdrückt und dann die Konstanten wie angegeben wählt. $\square$

**Bemerkung 4.29** *(Geometrische Interpretation der Multiplikation)*
*Bei dieser rein algebraischen Konstruktion der Multiplikation bleibt naturgemäß völlig im Dunkeln, was dieser Operation geometrisch zugrunde liegt. Aber diese Konstruktion ist eng verwandt, wenn auch nicht identisch, zu einer sehr viel geometrischeren Konstruktion von Toth [To3]. Interessanterweise werden die dort angegebenen Beispiele durch beide Konstruktionen abgedeckt. Insofern sollte ein genauer Vergleich beider Konstruktionen auch eine geometrische Anschauung der Multiplikation* $\Psi$ *ergeben.*

# Kapitel 5

# Die Dimension des Modulraums $\mathcal{M}_k^{(d)}$

In diesem Kapitel wird das Hauptthema des vorangegangenen Kapitels wieder aufgenommen, und die beiden zuvor eingeführten $\mathfrak{sl}_2$–Operatorenalgebren zu einer abgeschlossenen Liealgebra von Operatoren auf dem Tensorprodukt $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*$ vervollständigt, die ein einfaches Beispiel der Operatorenalgebren ist, die implizit der Weylschen Konstruktion der Darstellungen der klassischen Liealgebren zugrundeliegen [F&H].

In diesem Fall erweist sich diese Weylalgebra als isomorph zu $\mathfrak{sp}_4 \cong \mathfrak{so}_5$. Sie dient im wesentlichen dazu, die im vorigen Kapitel gegebene Charakterisierung der Parameterräume $M_{0,k}^{(d)}$ der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(1)}$ von do Carmo–Wallach und der höheren Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ leichter handzuhaben. Das Tensorprodukt $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*$ wird dabei zu einer Niedrigstgewichtsdarstellung der Weylalgebra im Sinne des Anhangs B, aber zur Bestimmung des Raums der Niedrigstgewichtsvektoren benötigt man noch ein entscheidendes Lemma von do Carmo–Wallach [dC&W]. Als Konsequenz der Lösung dieses rein darstellungstheoretischen Problems erhält man eine Dimensionsformel für die Parameterräume $M_{0,k}^{(d)}$ der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(1)}$ der minimalen isometrischen Immersionen und der höheren Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$.

## 5.1 Das Lemma von do Carmo–Wallach

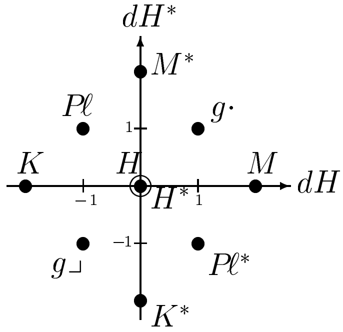
Im vorangegangenen Kapitel wurde die $\mathfrak{sl}_2$–Algebra der Plückerdifferentiale $P\ell$ und $P\ell^*$ auf dem Tensorprodukt $\mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ und letztendlich auch auf dem zugehörigen Dualraum $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*$ betrachtet. Auf den beiden Faktoren des letzteren operieren zwei Kopien der „harmonischen" $\mathfrak{sl}_2$–Liealgebra, $H$, $M$ und $-K$ auf dem linken sowie $H^*$, $M^*$ und $-K^*$ auf dem rechten Faktor, die zusammen den Unterraum $HV^* \otimes HV^*$ charakterisieren. Es stellt sich heraus, daß nur noch zwei weitere Operatoren fehlen, um die von allen diesen drei $\mathfrak{sl}_2$–Algebren gemeinsam erzeugte Algebra von Operatoren auf $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*$ abzuschließen:

**Definition 5.1** *(Diagonale Multiplikation und Kontraktion)*
*Die beiden diagonalen Multiplikations– und Kontraktionsoperatoren $g\cdot$ und $g\lrcorner$ werden mittels der metrischen und kometrischen Tensoren $g$ und $g^{-1}$ definiert durch:*

$$\begin{array}{rlll} g\cdot: & \mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^l V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k+1} V^* \otimes \mathrm{Sym}^{l+1} V^* & & \psi_1 \otimes \psi_2 \longmapsto \sum_\nu de_\nu \cdot \psi_1 \otimes e_\nu^\sharp \cdot \psi_2 \\ g\lrcorner: & \mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^l V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-1} V^* \otimes \mathrm{Sym}^{l-1} V^* & & \psi_1 \otimes \psi_2 \longmapsto \sum_\nu de_\nu^\flat \lrcorner \psi_1 \otimes e_\nu \lrcorner \psi_2 \end{array}$$

**Satz 5.2** *(Die Weylalgebra)*
*Die zehn Operatoren* $H$, $M$, $K$, $H^*$, $M^*$, $K^*$, $P\ell$, $P\ell^*$, $g\cdot$ *und* $g\lrcorner$ *spannen eine abgeschlossene Liealgebra über* $\mathbb{Z}$ *auf, die isomorph zu* $\mathfrak{sp}_4 \cong \mathfrak{so}_5$ *ist. Diese Weylalgebra hat einen kanonischen, involutiven Automorphismus* $\sigma$*, der durch die Transposition der beiden Tensorfaktoren* $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*$, $\psi_1 \otimes \psi_2 \longmapsto \psi_2 \otimes \psi_1$ *der definierenden Darstellung induziert wird und* $H \leftrightarrow H^*$, $M \leftrightarrow M^*$, $K \leftrightarrow K^*$ *und* $P\ell \leftrightarrow P\ell^*$ *vertauscht.*

**Beweis:** Die beiden Operatoren $H = \frac{n}{2} + k$ und $H^* = \frac{n}{2} + l$ sind im wesentlichen die Zahloperatoren der beiden $\mathrm{Sym}\, V^*$–Faktoren in $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^l V^*$. Weil alle anderen Operatoren graduiert bezüglich dieser natürlichen Graduierung sind, erhält man das nebenstehende Wurzeldiagramm bezüglich $H$, $H^*$. Deshalb reicht es, die folgenden Kommutatorregeln zu verifizieren:




$$\begin{array}{rclrclrcl}
[K, P\ell^*] &=& g\lrcorner & [M, P\ell] &=& -g\cdot & [P\ell, g\lrcorner] &=& -2K \\
[K, g\cdot] &=& P\ell & [M, g\lrcorner] &=& -P\ell^* & [P\ell, g\cdot] &=& 2M^* \\
[K, M] &=& H & [g\lrcorner, g\cdot] &=& H^* + H & [P\ell, P\ell^*] &=& H^* - H
\end{array}$$

Dazu kommen die Relationen, die sich aus den angegebenen mittels des Automorphismus $\sigma$ ergeben. Die restlichen Kommutatoren verschwinden mehr oder weniger offensichtlich. Zunächst gelten nach Bemerkung 4.3 die zwei grundlegenden Relationen $[K, \alpha\cdot] = \alpha^\flat\lrcorner$ und $[M, v\lrcorner] = -v^\sharp\cdot$ für alle $\alpha \in V^*$ und $v \in V$. Das ergibt alle Kommutatoren $[K, \cdot]$ und $[M, \cdot]$ außer $[K, M] = H$ aus Lemma 4.4. Außerdem gilt $[P\ell, P\ell^*] = \tilde{H} = H^* - H$ nach Lemma 4.12. Auch bei den restlichen Relationen werden keine neuen Argumente benötigt, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
[g\lrcorner, g\cdot] &= \sum_{\nu,\mu} \big( [e_\nu\lrcorner, de_\mu\cdot] \otimes de^\flat_\nu\lrcorner\, e^\sharp_\mu \cdot + de_\mu \cdot e_\nu\lrcorner \otimes [de^\flat_\nu\lrcorner, e^\sharp_\mu\cdot] \big) \\
&= \sum_\nu \big( 1 \otimes de^\flat_\nu\lrcorner\, e^\sharp_\nu \cdot + de_\nu \cdot e_\nu\lrcorner \otimes 1 \big) \quad = \quad H^* + H
\end{aligned}$$

Somit sind die zehn Operatoren die Basis einer abgeschlossenen Liealgebra von Operatoren auf dem Tensorprodukt $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^*$, die nach dem Wurzeldiagramm isomorph zu $\mathfrak{sp}_4 \cong \mathfrak{so}_5$ ist. Es sei darauf verzichtet, einen expliziten Isomorphismus anzugeben. □

**Korollar 5.3** *(Funktoreigenschaft der eingeschränkten Weylalgebra)*
*Für jede isometrische Einbettung* $V^* \longrightarrow \tilde{V}^*$ *euklidischer Vektorräume induziert die kanonische Fortsetzung* $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\, \tilde{V}^* \otimes \mathrm{Sym}\, \tilde{V}^*$ *einen Homomorphismus von Darstellungen der eingeschränkten Weylalgebra, das heißt der Unteralgebra der Weylalgebra, die von den sechs Operatoren* $\tilde{H} = H^* - H$, $K$, $K^*$, $P\ell$, $P\ell^*$ *und* $g\lrcorner$ *aufgespannt wird.*

Weylalgebren wie diese spielen eine implizite Rolle in der Weylschen Konstruktion der irreduziblen Darstellungen der klassischen Liealgebren nach dem Vorbild der $\mathfrak{sl}_n$, deren irreduzible Darstellungen sich stets als Bilder gewisser Schurprojektoren auf einer Tensorpotenz der Standarddarstellung $V$ realisieren lassen. In der Weylschen Konstruktion sind die irreduziblen Darstellungen der klassischen Liealgebren die Schnitte dieser Bilder mit den Kernen aller Kontraktionen zweier $V$–Faktoren mit der invarianten Bilinearform [F&H].

**Lemma 5.4** *(Lemma von do Carmo–Wallach [dC&W])*
*Der Unterraum* $H^kV^* \otimes H^lV^*$ *von* $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^l V^*$ *ist gerade der gemeinsame Kern der Operatoren* $K$ *und* $K^*$ *in* $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^l V^*$*. Weil der Operator* $g\lrcorner$ *mit* $K$ *und* $K^*$ *kommutiert, induziert er eine lineare Abbildung*

$$g\lrcorner : \; H^kV^* \otimes H^lV^* \longrightarrow H^{k-1}V^* \otimes H^{l-1}V^*$$

*die für alle euklidische Vektorräume* $V$ *mit* $\dim V \geq 3$ *und alle* $k,\, l \geq 1$ *surjektiv ist.*

**Beweis:** Nach Korollar 4.9 wird $H^kV^*$ von den Bildern der Inklusionen $H^k\mathbb{R}^2 \subset H^kV^*$ aufgespannt, die zu isometrischen Einbettungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow V^*$ gehören. Dabei reicht es sogar, nur Einbettungen zu betrachten, deren Bild ein beliebig gewähltes $\alpha \in V^*$ enthält. Somit wird das Tensorprodukt $H^kV^* \otimes H^lV^*$ für $\dim V \geq 3$ von den Unterräumen $H^k\mathbb{R}^3 \otimes H^l\mathbb{R}^3$ von $H^kV^* \otimes H^lV^*$ erzeugt, die zu isometrischen Einbettungen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow V^*$ gehören. Deshalb genügt es, dieses Lemma für $\dim V = 3$ zu beweisen.

Der Fall $\dim V = 3$ zeichnet sich durch eine besonders einfache Darstellungstheorie aus, denn die Gruppe $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$ wird bekanntlich von der Gruppe $\mathbf{SU}_2 = \mathbf{SL}_2\mathbb{C} \cap \mathbf{GL}_1\mathbb{H}$ zweifach überlagert. Die definierende Darstellung $S$ der Gruppe $\mathbf{SU}_2 S$ ist dabei ein zweidimensionaler, komplexer bzw. eindimensionaler, quaternionischer Vektorraum $S = \mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$, auf dem die $\mathbf{SU}_2 S$ als Untergruppe der $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ die symplektische Form $\omega = \det$ und als Untergruppe der $\mathbf{GL}_1\mathbb{H}$ die konjugiert–lineare, quaternionische Struktur $J$ der Multiplikation mit $j$ erhält.

Infolgedessen trägt die Darstellung $\mathrm{Sym}^2 S$ eine invariante, reelle Struktur und eine invariante, symmetrische Bilinearform, die auf dem reellen Unterraum positiv definit ist. Deshalb läßt sich $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ isometrisch mit $\mathrm{Sym}^2 S$ identifizieren. Benutzt man die Hermite–Reziprozität A.6 und die Clebsch–Gordon–Formel B.4, so folgt:

$$\mathrm{Sym}^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \mathrm{Sym}^k(\mathrm{Sym}^2 S) \;\cong\; \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k S) \;\cong\; \bigoplus_{\nu=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Sym}^{2k-4\nu} S$$

Diese Zerlegung kann man mit der Zerlegung in Satz 4.5 vergleichen. Beide sind $\mathbf{SO}\,V$–invariant, und ein Vergleich der Dimensionen impliziert $H^kV^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Sym}^{2k} S$. Wendet man nochmals die Clebsch–Gordon–Formel an, so erhält man die folgende Zerlegung:

$$(H^kV^* \otimes_{\mathbb{R}} H^lV^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \mathrm{Sym}^{2k} S \otimes \mathrm{Sym}^{2l} S \;\cong\; \bigoplus_{\nu=0}^{2k \wedge 2l} \mathrm{Sym}^{2k+2l-2\nu} S$$

Das deutet zumindest die Möglichkeit an, daß $g\lrcorner : \; H^kV^* \otimes H^lV^* \longrightarrow H^{k-1}V^* \otimes H^{l-1}V^*$ surjektiv sein könnte. Jedenfalls ist $g\lrcorner$ genau dann surjektiv, wenn auch seine Komplexifizierung $g\lrcorner : \; H^k\mathrm{Sym}^2 S \otimes H^l\mathrm{Sym}^2 S \longrightarrow H^{k-1}\mathrm{Sym}^2 S \otimes H^{l-1}\mathrm{Sym}^2 S$ surjektiv ist. Um diese Frage genauer zu untersuchen, muß man sich durch die ganzen obigen Isomorphismen hangeln. Zunächst bildet die Komultiplikation das Element $\frac{1}{(2k)!}s^{2k}$ mit $s \in S$ auf $\frac{1}{k!}s^k \otimes \frac{1}{k!}s^k$ in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k S$ ab, und die Hermite–Reziprozität macht daraus $(s^2)^k \in \mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^2 S$. Insbesondere kann man den entscheidenden Isomorphismus $\mathrm{Sym}^{2k} S \cong H^k\mathrm{Sym}^2 S$ so wählen, daß er $\frac{1}{(2k)!}s^{2k}$ nach $\frac{1}{k!}(\frac{1}{2}s^2)^k$ schickt.

Die Quadrate $\frac{1}{2}s^2$ in $\mathrm{Sym}^2 S$ entsprechen nun genau den isotropen Elementen bezüglich der invarianten, symmetrischen Bilinearform auf $\mathrm{Sym}^2 S$. Somit wird $H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und nach Korollar 4.9 auch schon $H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ für jeden euklidischen Vektorraum $V$ mit $\dim V \geq 3$ durch die komplexen, harmonischen Polynome $\frac{1}{k!}\alpha^k$ zu isotropen $\alpha \in V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ aufgespannt. Für das Tensorprodukt zweier solcher Elemente gilt offenbar:

$$g\lrcorner\Big(\,\frac{1}{k!}\alpha^k \otimes \frac{1}{l!}\beta^l\,\Big) \;=\; \langle \alpha,\, \beta\rangle \Big(\frac{1}{(k-1)!}\alpha^{k-1} \otimes \frac{1}{(l-1)!}\beta^{l-1}\Big)$$

Insbesondere liegen alle Elemente der Form $\frac{1}{(k-1)!}\alpha^{k-1} \otimes \frac{1}{(l-1)!}\beta^{l-1}$ zu isotropen $\alpha,\,\beta \in V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit $\langle \alpha,\, \beta\rangle \neq 0$ im Bild der Komplexifizierung von $g\lrcorner$. Somit kann man den Beweis des Lemmas beenden, indem man argumentiert, daß diese Elemente für $\dim V \geq 3$ bereits das ganze Tensorprodukt $(H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} H^l V^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ aufspannen. Diese Argumentation zeigt ganz deutlich das Problem, dem man bei $\dim V = 2$ begegnet. In $\mathbb{C}^2$ gibt es im wesentlichen nur zwei linear unabhängige, isotrope Vektoren und folglich auch nur ein Paar $\alpha,\,\beta \in \mathbb{C}^2$ isotroper Vektoren mit $\langle \alpha,\, \beta\rangle \neq 0$.

Einfacher ist an dieser Stelle aber, sich davon zu überzeugen, daß das folgende Diagramm kommutiert, indem man dies auf den erzeugenden Elementen $\frac{1}{(2k)!}s_1^{2k} \otimes \frac{1}{(2l)!}s_2^{2l}$, $s_1,\, s_2 \in S$ von $\mathrm{Sym}^{2k} S \otimes \mathrm{Sym}^{2l} S$ überprüft:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^{2k} S \otimes \mathrm{Sym}^{2l} S \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\omega\lrcorner)^2"] & H^k \mathrm{Sym}^2 S \otimes H^l \mathrm{Sym}^2 S \arrow[d, "2g\lrcorner"] \\
\mathrm{Sym}^{2k-2} S \otimes \mathrm{Sym}^{2l-2} S \arrow[r, "\cong"] & H^{k-1} \mathrm{Sym}^2 S \otimes H^{l-1} \mathrm{Sym}^2 S
\end{tikzcd}$$

Im Beweis der Clebsch–Gordon–Formel B.4 spielt die Surjektivität von $(\omega\lrcorner)^2$ eine entscheidende Rolle, hier ermöglicht sie die Folgerung, daß auch $g\lrcorner$ surjektiv ist. □

**Bemerkung 5.5**
*Die einfache Darstellungstheorie der Gruppe* $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$*, die den Beweis dieses Satzes für alle* $n \geq 3$ *ermöglicht, ist letztendlich der Grund für den eingangs des Kapitels 2 angesprochenen Satz von Calabi. Das Tensorprodukt* $\mathrm{Sym}\,\mathbb{R}^3 \otimes \mathrm{Sym}\,\mathbb{R}^3$ *enthält einfach keine genügend komplizierten Darstellungen. Diese Aussage findet sich in Beispiel 5.7 genauer formuliert.*

## 5.2 Die allgemeine Dimensionsformel

In den vorangegangenen Abschnitten wurde schrittweise offenbar, daß die definierende Darstellung $\mathrm{Sym}\,V^* \otimes \mathrm{Sym}\,V^*$ der Weylalgebra die Modulräume der minimalen isometrischen Immersionen der Sphären beschreibt. Allerdings ist diese Darstellung unendlich–dimensional und deswegen ist die Darstellungstheorie der Liealgebra $\mathfrak{sp}_4$ nicht so ohne weiteres anwendbar. Tatsächlich ist diese Darstellung aber eine Niedrigstgewichtsdarstellung im Sinne der Definition B.1 aus Anhang B:

**Definition 5.6** *(Niedrigstgewichtssequenzen)*
*Der Raum $L^{k,l}V^*$ der Niedrigstgewichtsvektoren vom Gewicht $(k,l)$, $k \geq l$, ist der gemeinsame Kern der Operatoren $K$, $K^*$, $g\lrcorner$ und $P\ell^*$ in $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes \mathrm{Sym}^l V^*$. Äquivalent dazu ist $L^{k,l}V^*$ der gemeinsame Kern der Operatoren $g\lrcorner$ und $P\ell^*$ in $H^kV^* \otimes H^lV^*$. Entsprechend sei $H^{k,l}V^*$ der Kern des Operators $g\lrcorner$ in $H^kV^* \otimes H^lV^*$ mit $H^{k,l}V^* \supset L^{k,l}V^*$ für $k \geq l$ nach Definition. Dann induzieren die Plückerdifferentiale $P\ell$ und $P\ell^*$ die Niedrigstgewichtssequenz*

$$0 \leftrightharpoons H^{k,0}V^* \underset{P\ell}{\overset{P\ell^*}{\leftrightharpoons}} H^{k-1,1}V^* \underset{P\ell}{\overset{P\ell^*}{\leftrightharpoons}} H^{k-2,2}V^* \leftrightharpoons \cdots \leftrightharpoons H^{2,k-2}V^* \underset{P\ell}{\overset{P\ell^*}{\leftrightharpoons}} H^{1,k-1}V^* \underset{P\ell}{\overset{P\ell^*}{\leftrightharpoons}} H^{0,k}V^* \leftrightharpoons 0$$

*denn wegen $[P\ell, g\lrcorner] = -2K$ und $[P\ell, K^*] = -g\lrcorner$ bildet etwa $P\ell$ den Raum $H^{k,l}V^*$ nach $H^{k-1,l+1}V^*$ ab. Diese Niedrigstgewichtssequenz ist eine Unterdarstellung der $\mathfrak{sl}_2$–Algebra der Plückerdifferentiale, so daß die isotypischen Komponenten $\psi_\nu \in H^{k+\nu,l-\nu}V^*$ eines jeden $\psi \in H^{k,l}V^*$ Niedrigstgewichtsvektoren sind. Insbesondere sind die Plückerdifferentiale wie in Satz 4.13 immer noch injektiv bzw. surjektiv.*

Diese Definition erlaubt es, für Vektorräume $V$ mit $\dim V \geq 3$ die Dimension des Raums $L^{k,l}V^*$ der Niedrigstgewichtsvektoren zu bestimmen. Man benutzt zunächst das Lemma 5.4 von do Carmo–Wallach, um die Dimensionen der Räume $H^{k,l}V^*$ anzugeben, und bestimmt danach die Dimension der Kerne $L^{k,l}V^* \subset H^{k,l}V^*$ des surjektiven Plückerdifferentials $P\ell^*$:

$$\begin{aligned}
\dim H^kV^* &= \dim \mathrm{Sym}^k V^* - \dim \mathrm{Sym}^{k-2} V^* \\
\dim H^{k,l}V^* &= \dim H^kV^* \otimes H^lV^* - \dim H^{k-1}V^* \otimes H^{l-1}V^* \\
\dim L^{k,l}V^* &= \dim H^{k,l}V^* - \dim H^{k+1,l-1}V^*
\end{aligned}$$

**Beispiel 5.7** *(Niedrigstgewichtsvektoren für $\mathbb{R}^3$)*
*Im Beweis des Lemmas 5.4 von do Carmo–Wallach wurde im wesentlichen bereits der Raum $L^{k,l}\mathbb{R}^3$ der Niedrigstgewichtsvektoren bestimmt. Diesem Beweis zufolge zerfällt nämlich das Tensorprodukt des Raums der harmonischen Polynome mit sich selbst in:*

$$(H^k\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} H^l\mathbb{R}^3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \mathrm{Sym}^{2k}S \otimes \mathrm{Sym}^{2l}S \;\cong\; \bigoplus_{\nu=0}^{2k\wedge 2l} \mathrm{Sym}^{2k+2l-2\nu}S$$

*Somit ist $H^{k,0}\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Sym}^{2k}S$ und $H^{k,l}\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Sym}^{2k+2l}S \oplus \mathrm{Sym}^{2k+2l-2}S$ für $k \geq l > 0$. Nach Komplexifizierung gilt also für die Räume $L^{k,l}\mathbb{R}^3$ der Niedrigstgewichtsvektoren*

$$L^{k,0}\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; L^{k,1}\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \mathrm{Sym}^{2k}S$$

*und $L^{k,l}\mathbb{R}^3 = \{0\}$ für alle $k \geq l > 1$. Für $V^* = \mathbb{R}^3$ hat die $\mathfrak{sp}_4$–Darstellung $\mathrm{Sym}\,V^* \otimes \mathrm{Sym}\,V^*$ also nur sehr spezielle Niedrigstgewichtsvektoren. Dies führt zur Starrheitsaussage des Satzes 5.10 von Calabi für die minimalen isometrischen Immersionen der $S^2$. Schon für $V^* = \mathbb{R}^4$ existieren nichttriviale Niedrigstgewichtsvektoren für alle möglichen Gewichte $(k,l)$ mit $k \geq l$.*

Man kann nun versuchen, die Dimensionen der $L^{k,l}V^*$ in Abhängigkeit von $\dim V$ zu bestimmen, um die Darstellung der Weylalgebra zu verstehen. Ist man allerdings nur an den

Dimensionen der Parameterräume $M_{0,k}^{(d)}$ der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ interessiert, so kommt man auf einem direkteren Weg zum Ziel. Nach der Charakterisierung der $M_{0,k} = M_{0,k}^{(1)}$ in Satz 4.20 und allgemeiner nach Definition 4.24 sind die $M_{0,k}^{(d)}$ nämlich die Kerne der iterierten Plückerdifferentiale $P\ell^{*k-2d}$ in $\mathrm{Sym}^2 H^k V^*$. Nun betrachte man die kurze exakte Sequenz:

**Satz 5.8** *(Rekursive Berechnung der Dimension)*
*Für $\dim V \geq 3$ und alle $r \geq 1$, $k \geq l$ induziert der Operator $g\lrcorner$ eine kurze exakte Sequenz:*

$$0 \to \mathrm{Kern}\, P\ell^{*r} \cap H^{k,l}V^* \xrightarrow{\subset} \mathrm{Kern}\, P\ell^{*r} \cap H^kV^* \otimes H^lV^* \xrightarrow{g\lrcorner} \mathrm{Kern}\, P\ell^{*r-1} \cap H^{k-1}V^* \otimes H^{l-1}V^* \to 0$$

**Beweis:** Weil $g\lrcorner$ mit $K$ und $K^*$ kommutiert, bildet es $H^kV^* \otimes H^lV^*$ sicherlich nach $H^{k-1}V^* \otimes H^{l-1}V^*$ ab. Die Kommutatorrelation $[K, P\ell^{*r}] = rP\ell^{*r-1}g\lrcorner + r(r-1)P\ell^{*r-2}K^*$ zeigt weiter, daß $g\lrcorner$ den Raum $\mathrm{Kern}\, P\ell^{*r} \cap H^kV^* \otimes H^lV^*$ bereits in den Kern von $P\ell^{*r-1}$ abbildet. Somit ist die obige Sequenz wohldefiniert und es bleibt nur die Surjektivität von $g\lrcorner$ zu zeigen.

Sei also $\psi \in H^{k-1}V^* \otimes H^{l-1}V^*$ mit $P\ell^{*r-1}\psi = 0$. Nach dem Lemma 5.4 von do Carmo–Wallach gibt es wegen $\dim V \geq 3$ ein $\tilde{\psi} \in H^kV^* \otimes H^lV^*$ mit $g\lrcorner\tilde{\psi} = \psi$, aber im allgemeinen gilt nicht $P\ell^{*r}\tilde{\psi} = 0$. Allerdings genügt für den weiteren Beweis die Feststellung, daß $P\ell^{*r}\tilde{\psi}$ in $H^{k+r,l-r}V^*$ liegt. Tatsächlich folgt $K^*P\ell^{*r}\tilde{\psi} = 0$ einfach aus $[K^*, P\ell^*] = 0$ und die Kommutatorrelation $[g\lrcorner, P\ell^{*r}] = 2rP\ell^{*r-1}K^*$ impliziert mit Hilfe der Voraussetzung zusätzlich $g\lrcorner P\ell^{*r}\tilde{\psi} = P\ell^{*r}g\lrcorner\tilde{\psi} = 0$. Schließlich impliziert die bereits erwähnte Kommutatorrelation

$$[K, P\ell^{*r}] \;=\; rP\ell^{*r-1}g\lrcorner + r(r-1)P\ell^{*r-2}K^*$$

auch $KP\ell^{*r}\tilde{\psi} = 0$ wegen $P\ell^{*r-1}g\lrcorner\tilde{\psi} = P\ell^{*r-1}\psi = 0$. In der Niedrigstgewichtssequenz ist nun das Plückerdifferential $P\ell^{*r}$ surjektiv für $k \geq l$, folglich gibt es ein $\tilde{\psi}_0 \in H^{k,l}V^*$ mit $P\ell^{*r}\tilde{\psi} = P\ell^{*r}\tilde{\psi}_0$. Dann ist $\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_0$ das gesuchte Urbild von $\psi$ im Schnitt von $\mathrm{Kern}\, P\ell^{*r}$ mit $H^kV^* \otimes H^lV^*$. □

Definiert man nun $n := \dim V$ sowie $m_k := \dim \mathrm{Sym}^k V^* = \binom{n-1+k}{k}$ und schließlich noch $h_k := \dim H^kV^* = m_k - m_{k-2}$, dann folgt aus diesem Satz und der Surjektivität der iterierten Plückerdifferentiale $P\ell^{*r}$ für $k \geq l$ in der Niedrigstgewichtssequenz durch Induktion:

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{Kern}\, P\ell^{*r} \cap H^kV^* \otimes H^lV^*) \\
&\quad= \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\dim H^{k-\nu,l-\nu}V^* - \dim H^{k+r-2\nu,l-r}V^*\right) \\
&\quad= \sum_{\nu=0}^{r-1} \Big(h_{k-\nu}\,h_{l-\nu} - h_{k-\nu-1}\,h_{l-\nu-1}\Big) - \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} h_{k+r-2\nu}\right) h_{l-r} + \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} h_{k+r-2\nu-1}\right) h_{l-r-1}
\end{aligned}$$

Löst man die Teleskopsummen auf und faßt etwas zusammen, so erhält man letztendlich:

**Korollar 5.9**

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Kern}\, P\ell^{*r} \cap H^kV^* \otimes H^lV^*) \;=\; & (m_k - m_{k-2})\,(m_l - m_{l-2}) \\
& - (m_{k+r} - m_{k-r-2})\,(m_{l-r} - m_{l-r-2}) \\
& + (m_{k+r-1} - m_{k-r-1})\,(m_{l-r-1} - m_{l-r-3})
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel steht man kurz vor dem Ziel, die Dimensionen der Parameterräume $M_{0,k}^{(d)}$ zu bestimmen, man muß nur noch die Beiträge von $\mathrm{Sym}^2(H^kV^*)$ und $\Lambda^2(H^kV^*)$ zur Dimension von $\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap H^kV^*\otimes H^kV^*$ auseinanderdividieren. Die entscheidende Eigenschaft dabei ist, daß $\mathrm{Sym}^2H^kV^*$, $\Lambda^2H^kV^*$ und $\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}$ als Unterräume von $\mathrm{Sym}^kV^*\otimes\mathrm{Sym}^kV^*$ invariant unter der kanonischen Involution $\sigma(\psi_1\otimes\psi_2):=\psi_2\otimes\psi_1$ sind. Insbesondere ist auch $\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap H^kV^*\otimes H^kV^*$ die direkte Summe seines Schnitts mit $\mathrm{Sym}^2H^kV^*$ und $\Lambda^2H^kV^*$:

$$\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap H^kV^*\otimes H^kV^* \;=\; \mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap\mathrm{Sym}^2H^kV^* \;\oplus\; \mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap\Lambda^2H^kV^*$$

Nach Pieris Formel 4.17 zerfallen nun $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$ und $\Lambda^2\mathrm{Sym}^kV^*$ noch weiter in die Unterräume $\mathrm{PL}_\bullet$, aber es ist nicht klar, wie sich diese Zerlegung mit der Inklusion von $H^kV^*\otimes H^kV^*$ in $\mathrm{Sym}^kV^*\otimes\mathrm{Sym}^kV^*$ verhält. Allerdings kann man daraus wenigstens folgern, daß die isotypische Zerlegung B.2 eines $\psi\in\mathrm{Sym}^2H^kV^*$ von der Form ist:

$$\psi \;=\; \mathit{P\ell}^k\psi_k \;+\; \mathit{P\ell}^{k-2}\psi_{k-2} \;+\; \mathit{P\ell}^{k-4}\psi_{k-4} \;+\;\ldots\;+\;\psi_0 \text{ bzw. } \mathit{P\ell}\,\psi_1$$

Ein solches $\psi$ liegt nach Satz 4.13 in $\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}$ genau dann, wenn $\psi_{k-2\nu}=0$ für alle $k-2\nu\geq r$. Folglich gilt

$$\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap\mathrm{Sym}^2H^kV^* \;=\; \mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r-1}\cap\mathrm{Sym}^2H^kV^*$$

für gerades $k-r$. Ein analoges Argument zeigt $\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap\Lambda^2H^kV^*=\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r-1}\cap\Lambda^2H^kV^*$, wenn $k-r$ hingegen ungerade ist. Schreibt man der Einfachheit halber $(\bigotimes^2H^kV^*)_r$ für $\mathrm{Kern}\,\mathit{P\ell}^{*r}\cap H^kV^*\otimes H^kV^*$ und entsprechend für $\mathrm{Sym}^2H^kV^*$ und $\Lambda^2H^kV^*$, so wird die Situation durch das folgende Schema beschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bigotimes^2H^kV^* & \supset & (\bigotimes^2H^kV^*)_k & \supset & (\bigotimes^2H^kV^*)_{k-1} & \supset & (\bigotimes^2H^kV^*)_{k-2} & \supset & \ldots\\
\mathrm{Sym}^2H^kV^* & \supset & (\mathrm{Sym}^2H^kV^*)_k & = & (\mathrm{Sym}^2H^kV^*)_{k-1} & \supset & (\mathrm{Sym}^2H^kV^*)_{k-2} & = & \ldots\\
\Lambda^2H^kV^* & = & (\Lambda^2H^kV^*)_k & \supset & (\Lambda^2H^kV^*)_{k-1} & = & (\Lambda^2H^kV^*)_{k-2} & \supset & \ldots
\end{array}$$

Diesem Schema entnimmt man die beiden Formeln:

$$\begin{aligned}
&\dim\,(\mathrm{Sym}^2H^kV^*)_{k-2d}\\
&\quad=\;\dim\,\mathrm{Sym}^2H^kV^* \;-\; \sum_{\nu=0}^{d}\Big(\dim\,(\bigotimes^2H^kV^*)_{k-2\nu+1} \;-\; \dim\,(\bigotimes^2H^kV^*)_{k-2\nu}\Big)\\
&\quad=\;\sum_{\nu=d+1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\Big(\dim\,(\bigotimes^2H^kV^*)_{k-2\nu+1} \;-\; \dim\,(\bigotimes^2H^kV^*)_{k-2\nu}\Big)
\end{aligned}$$

Die erste ist letztendlich einfacher und führt zur Dimensionsformel 5.11. Allerdings kann man die zweite Formel dazu benutzen, die Dimensionen der Parameterräume $M_{0,k}^{(d)}$ der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ mit den Dimensionen der Räume $L^{k,l}V^*$ von Niedrigstgewichtsvektoren in Beziehung zu bringen. Zunächst folgert man mittels der exakten Sequenz aus Satz 5.8

$$\dim\,(\bigotimes^2H^kV^*)_{k-r} \;=\; \sum_{\rho=r+1}^{k}\sum_{\mu=0}^{k-\rho}\dim\,L^{\rho+2\mu,\rho}V^*$$

benutzt die zweite angegebene Formel für die Dimensionen der $(\mathrm{Sym}^2H^kV^*)_{k-2d}$ und erhält:

**Satz 5.10** *(Satz von Calabi [Cal])*
*Die Dimensionen der Parameterräume* $M_{0,k}^{(d)}$ *der Modulräume* $\mathcal{M}_k^{(d)}$ *lassen sich vermöge*

$$\dim\,(\mathrm{Sym}^2 H^k V^*)_{k-2d} \;=\; \sum_{\nu=d+1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\sum_{\mu=0}^{k-2\nu}\dim\,L^{2\nu+2\mu,2\nu}V^*$$

*aus den Dimensionen der Räume* $L^{k,l}V^*$ *von Niedrigstgewichtsvektoren berechnen. Ohne Niedrigstgewichtsvektoren* $L^{k,l}V^*$ *mit* $k \geq l \geq 2d+2$ *kann also die Standardimmersion im Modulraum* $\mathcal{M}_k^{(d)}$ *nicht deformiert werden. Nach Beispiel 5.7 betrifft dies ausschließlich die minimalen isometrischen Immersionen der* $S^2$.

**Satz 5.11** *(Die Dimensionsformel)*
*Für alle euklidischen Vektorräume* $V$ *der Dimension* $n := \dim V \geq 3$ *sind die Dimensionen der Parameterräume* $M_{0,k}^{(d)} = \mathrm{Kern}\,P\ell^{*r-2d} \cap \mathrm{Sym}^2 H^k V^*$ *der Modulräume* $\mathcal{M}_k^{(d)}$ *der Eigenabbildungen der Sphäre* $S_V$ *zum* $k$*–ten Eigenwert mit Standardfundamentalformen bis zum Grad* $d \leq \frac{k}{2} - 1$ *gegeben durch:*

$$\begin{aligned}\dim M_{0,k}^{(d)} \;&=\; \dim \mathrm{Sym}^2 H^k V^* \;-\; \sum_{\nu=0}^{d}\Big((m_{2\nu}-m_{2\nu-4})(m_{2k-2\nu}-m_{2\nu-2})\\ &\qquad -(m_{2\nu-1}-m_{2\nu-3})(m_{2k-2\nu+1}+m_{2k-2\nu-1}-m_{2\nu-1}-m_{2\nu-3})\Big)\end{aligned}$$

*Insbesondere gilt für den Parameterraum des Modulraums* $\mathcal{M}_k^{(0)}$ *der Eigenabbildungen*

$$\dim M_{0,k}^{(0)} \;=\; \dim \mathrm{Sym}^2 H^k V^* \;-\; m_{2k}$$

*und für den Parameterraum des Modulraums* $\mathcal{M}_{\lambda_k} = \mathcal{M}_k^{(1)}$ *der minimalen isometrischen Immersionen:*

$$\dim M_{0,k}^{(1)} \;=\; \dim \mathrm{Sym}^2 H^k V^* \;-\; m_{2k} \;-\; n(\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} m_{2k-2} - m_{2k-1} - m_{2k-3})$$

*In allen Formeln ist* $m_r := \binom{n-1+r}{r}$ *die Dimension von* $\mathrm{Sym}^r V^*$ *für* $r \geq 0$ *und* $m_r := 0$ *sonst.*

Die Formel fordert zu einem Vergleich mit der von do Carmo–Wallach angegebenen, unteren Abschätzung für die Dimensionen der $M_{0,k}^{(1)}$ heraus. Ein rechenaufwendiger, ansonsten aber einfacher Induktionsbeweis zeigt, daß beide Formeln äquivalent sind, das heißt die Abschätzung von do Carmo–Wallach ist scharf. In dieser Formulierung wurde Satz 5.11 zuvor von Muto [Mu] im Fall der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert bewiesen, man vergleiche etwa [O]. Der erste Beweis der Dimensionsformel für die Modulräume $\mathcal{M}_{\lambda_k} = \mathcal{M}_k^{(1)}$ in voller Allgemeinheit stammt von Toth [To4], die Verallgemeinerung für alle Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$, $d > 1$, findet sich in Gauchman–Toth [G&T], wobei der Beweis aufgrund der abweichenden Darstellungstheorie der Ausnahmegruppe $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$ im Fall $\dim V = 4$ unvollständig bleibt. In diesem Fall zerfallen die Räume $L^{k,l}\mathbb{R}^4$ als $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$–Darstellungen noch weiter in zwei irreduzible Darstellungen, und das Analogon des Satzes 4.27 im darstellungstheoretischen Zugang ist schwieriger zu beweisen.

# Kapitel 6

# Geometrie der Kegelschnitte

In diesem Kapitel wird die allgemeine Geometrie der Kegelschnitte, das heißt der Schnitte des Kegels $P^+E := \{G \in \operatorname{Sym}^2 E : \ G \geq 0\}$ der positiv semidefiniten Bilinearformen auf einem Vektorraum $E^*$ mit affinen Unterräumen $M \subset \operatorname{Sym}^2 E$ untersucht. Einige Beispiele für diese geometrischen Objekte finden sich bereits in früheren Kapiteln, so zum Beispiel die Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ minimaler isometrischer Immersionen von do Carmo–Wallach. Weitere Beispielklassen sind die Modulräume der Punktkonfigurationen und die der orthogonalen Multiplikationen, die in diesem Kapitel beschrieben werden.

Das wichtigste Ziel dieses Kapitels besteht eigentlich darin, die Kegelschnitte als neue geometrische Studienobjekte zu propagieren. Dabei wird zum Beispiel deutlich, daß der schon lange bekannte Zusammenhang zwischen den Modulräumen $\mathcal{M}_2^{(0)}$ der Eigenabbildungen der Sphären zum zweiten Eigenwert und den Modulräumen der orthogonalen Multiplikationen, die Hopf–Whitehead–Konstruktion, nur eine affin lineare Abbildung zwischen diesen Kegelschnitten ist. In diesem Sinne stellt diese Konstruktion das erste Beispiel eines vergleichenden Studiums zweier Kegelschnitte dar.

Das interessanteste Ergebnis dieses Kapitels ist eine Beschreibung der lokalen Randstruktur eines Kegelschnitts in einem Randpunkt. Unter günstigen Umständen kann man von der lokalen Randstruktur in einem Punkt bereits auf interessante Aspekte der globalen Randstruktur schliessen. Allerdings scheinen die dazu nötigen Rechnungen für die Modulräume der minimalen isometrischen Immersionen derzeit noch nicht durchführbar. Es bleibt abzuwarten, ob es in Zukunft eine Idee gibt, die diese Argumentation vereinfacht.

## 6.1 Positiv semidefinite Bilinearformen

Vor der allgemeinen Definition der Kegelschnitte seien noch einige Eigenschaften symmetrischer Bilinearformen zusammengestellt. Jede symmetrische Bilinearform $A \in \operatorname{Sym}^2 E$ auf $E^*$ kann man auch als lineare Abbildung $A : \ E^* \longrightarrow (E^*)^* \cong E, \ \eta \longmapsto A(\eta, \cdot)$ auffassen. Demgemäß hat $A$ ein Bild und einen Kern

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A \quad &= \quad \{A(\eta, \cdot\,) \in E : \eta \in E^*\} \\ \operatorname{Kern} A \quad &= \quad \{\eta \in E^* : \ A(\eta, \cdot\,) = 0\} \end{aligned}$$

deren Dimensionen als Rang bzw. Korang von $A$ bezeichnet werden. Als Folge der Symmetrie ist der Annihilator $(\operatorname{Im} A)^\perp := \{\eta \in E^* : \langle \eta, e\rangle = 0 \text{ für alle } e \in \operatorname{Im} A\}$ von $\operatorname{Im} A$ gerade Kern $A$. Insbesondere summieren sich Rang $A$ und Korang $A$ zu $\dim E$. Ein wichtiges Prinzip ist nun, daß $\operatorname{Im} A$ der kleinste Unterraum von $E$ ist, für den $A$ im Bild der Inklusion $\operatorname{Sym}^2 \operatorname{Im} A \hookrightarrow \operatorname{Sym}^2 E$ liegt. Dies folgt sofort aus dem Trägheitssatz von Sylvester:

**Satz 6.1** *(Trägheitssatz von Sylvester)*
*Jede symmetrische Bilinearform $A$ hat eine Darstellung $A = \sum_\nu \pm\frac{1}{2}e_\nu^2$ für eine Basis $\{e_\nu\}$ von* $\operatorname{Im} A$. *Die Anzahl der Plus– bzw. Minuszeichen in dieser Darstellung heißt Signatur $(+,-)$ von $A$. Insbesondere ist der positive Kegel $P^+E$ die von den Quadraten erzeugte Halbgruppe. Die Fortsetzung* $\operatorname{Sym}^2 F$ *einer linearen Abbildung $F : E \longrightarrow \tilde{E}$ erhält deshalb die Positivität.*

**Satz 6.2** *(Hurwitz–Kriterium)*
*Sei $A$ eine symmetrische $r \times r$–Matrix über $\mathbb{R}$. Die Hauptminoren von $A$ sind die Determinanten der $\nu \times \nu$–Untermatrizen von $A$, die nur aus den ersten $\nu \leq r$ Zeilen und Spalten von $A$ bestehen. Verschwindet kein Hauptminor von $A$, dann ist die Signatur $(r-\theta, \theta)$ von $A$ allein durch die Anzahl $\theta$ der Vorzeichenwechsel in der Folge der Hauptminoren bestimmt. Insbesondere ist $A$ genau dann positiv definit, wenn alle seine Hauptminoren positiv sind. Vorsichtiger muß man die analoge Aussage für positiv semidefinite Matrizen formulieren: Eine symmetrische $r \times r$–Matrix $A$ über $\mathbb{R}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn keiner ihrer diagonalen Minoren negativ ist, das heißt wenn keine Untermatrix von $A$, die durch Streichen derselben Zeilen und Spalten aus $A$ entsteht, eine negative Determinante besitzt.*

Spezielle Eigenschaften positiv semidefiniter symmetrischer Bilinearformen sind zumeist Folgerungen aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Diese ist wiederum eine direkte Konsequenz einer kategorischen Ungleichung, die keinerlei Beweises bedarf:

**Lemma 6.3** *(Kategorische Ungleichung)*
*Sei $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt entweder $a = b = 0$ und $c \geq 0$ oder $a > 0$ und $b^2 \leq ac$.*

**Korollar 6.4** *(Kerne positiv semidefiniter Formen)*
*Wenn $A \in \operatorname{Sym}^2 E$ positiv semidefinit ist, dann gilt* $\operatorname{Kern} A = \{\alpha \in E^* : A(\alpha,\alpha) = 0\}$.

**Beweis:** Nach Definition des Kerns gilt jedenfalls $\operatorname{Kern} A \subset \{\alpha \in E^* : A(\alpha,\alpha) = 0\}$. Sei nun $\alpha \in E^*$ mit $A(\alpha,\alpha) = 0$, dann gilt $A(\alpha+\beta,\alpha+\beta) = 2\,A(\alpha,\beta) + A(\beta,\beta) \geq 0$ für alle $\beta \in E^*$. Ersetzt man hierin $\beta$ durch $x\beta$ mit der Unbekannten $x \in \mathbb{R}$, dann impliziert die kategorische Ungleichung $A(\alpha,\beta) = 0$. $\square$

**Korollar 6.5** *(Existenz des orthogonalen Komplements)*
*Sei $A$ positiv semidefinit und $I \subset$* $\operatorname{Im} A$ *ein beliebiger Unterraum. Dann gibt es genau ein Komplement $K$ von $I$ in* $\operatorname{Im} A = I \oplus K$, *so daß $A \in \operatorname{Sym}^2 I \oplus \operatorname{Sym}^2 K$ keine „gemischten Terme“ in $I \otimes K$ besitzt.*

**Beweis:** Für ein Komplement $K$ von $I$ mit $A \in \operatorname{Sym}^2 I \oplus \operatorname{Sym}^2 K$ bildet der von $A$ induzierte Isomorphismus $A : (\operatorname{Im} A)^* \longrightarrow \operatorname{Im} A$ die Zerlegung $(\operatorname{Im} A)^* = K^\perp \oplus I^\perp$ offenbar auf die Zerlegung $\operatorname{Im} A = I \oplus K$ ab. Somit ist $K$ eindeutig als Bild von $I^\perp$ unter $A$ charakterisiert. Wenn $A$ positiv semidefinit ist, dann ist dieses Bild bereits ein Komplement von $I$ in $\operatorname{Im} A$, denn für ein $\alpha$ aus $I^\perp$ mit $A(\alpha, \cdot) \in A(I^\perp, \cdot) \cap I$ impliziert $A(\alpha, \alpha) = 0$ bereits $\alpha \in \operatorname{Kern} A$, also $A(\alpha, \cdot) = 0$. □

Ist $A$ eine positiv definite Bilinearform auf $E^*$, so gibt es für jedes $B \in \operatorname{Sym}^2 E$ auf jeden Fall ein $t > 0$, so daß $A + tB$ immer noch positiv definit ist. Offensichtlich gilt diese Feststellung für allgemeine positiv semidefinite $A$ nicht mehr. Um dieses Problem genauer zu formulieren, betrachte man die Projektion $E \longrightarrow E/\operatorname{Im} A$ mit Fortsetzung $\pi : \operatorname{Sym}^2 E \longrightarrow \operatorname{Sym}^2(E/\operatorname{Im} A)$. Diese Fortsetzung erhält die Positivität, bildet also $P^+E$ auf $P^+(E/\operatorname{Im} A)$ ab, und ist für ein $B \in \operatorname{Sym}^2 E$ das Bild $\pi B > 0$, so gibt es ein $t > 0$ für das auch $A + tB \geq 0$. Auch das gilt nicht mehr, wenn $\pi B$ nur noch positiv semidefinit auf $(E/\operatorname{Im} A)^* \cong (\operatorname{Im} A)^\perp$ ist:

**Beispiel 6.6**
*Auf dem Vektorraum $E = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasis $e_1$, $e_2$ und $e_3$ betrachte man die positiv semidefinite Bilinearform $A := \frac{1}{2}e_1^2$ und dazu $B := \frac{1}{2}e_2^2 + e_1 e_3$. Dann ist $\pi B = \frac{1}{2}(e_2 + \mathbb{R}e_1)^2$ positiv semidefinit, aber es gibt kein $t \neq 0$, für das auch $A + tB$ positiv semidefinit wäre, denn die Hauptminoren der Matrixdarstellung*

$$A + tB \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*sind in dieser Reihenfolge $1$, $t$ und $-t^3$, so daß $A + tB$ nach dem Hurwitz–Kriterium 6.2 Signatur $(2,1)$ für $t > 0$ und $(1,2)$ für $t < 0$ hat.*

Den Kern von $\pi B$ kann man unter dem Isomorphismus $(E/\operatorname{Im} A)^* \cong (\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Kern} A$ mit einem Unterraum von $\operatorname{Kern} A$ identifizieren. Sein Annihilator in ganz $E$ ist dann das volle Urbild $\pi^{-1}(\operatorname{Im} \pi B)$ des Bildes von $\pi B$. Jedenfalls gilt stets $\operatorname{Kern} \pi B \supset \operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} B$ oder äquivalent $\pi^{-1}(\operatorname{Im} \pi B) \subset \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$, und diejenigen $B \in \operatorname{Sym}^2 E$, für die es ein $t > 0$ mit $A + tB \geq 0$ gibt, werden gerade durch Gleichheit charakterisiert:

**Lemma 6.7** *(Integrabele Deformationen)*
*Sei $A \geq 0$ und $B \in \operatorname{Sym}^2 E$ mit $\pi B \geq 0$ in $\operatorname{Sym}^2(E/\operatorname{Im} A)$. Genau dann existiert ein $t > 0$ mit $A + tB \geq 0$, wenn $\operatorname{Im} B \subset \pi^{-1}(\operatorname{Im} \pi B)$ oder äquivalent $\operatorname{Kern} \pi B = \operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} B$ gilt.*

**Beweis:** Jedenfalls gilt $B(\alpha, \alpha) = (\pi B)(\alpha, \alpha) = 0$ für jedes $\alpha \in \operatorname{Kern} \pi B \subset \operatorname{Kern} A$ und wenn man zusätzlich voraussetzt, daß $A + tB$ für ein $t > 0$ positiv semidefinit ist, gilt außerdem $0 \leq (A + tB)(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 2tB(\alpha, \beta) + (A + tB)(\beta, \beta)$ für alle $\beta \in E^*$. Die kategorische Ungleichung impliziert dann $B(\alpha, \beta) = 0$, das heißt $\alpha \in \operatorname{Kern} B$.

Sei nun umgekehrt $\pi B > 0$ in $\operatorname{Sym}^2(E/\operatorname{Im} A)$ vorausgesetzt, dann ist das volle Urbild $\pi^{-1}(\operatorname{Im} \pi B)$ gerade $E$ und die obige Voraussetzung trivialerweise erfüllt. Wählt man ein

Komplement $K$ von $\operatorname{Im} A$ in $E$, so erhält man auch eine Zerlegung von $E^* = K^\perp \oplus \operatorname{Kern} A$. Für die eindeutige Darstellung jedes $\alpha \oplus \beta \in E^*$ im Sinne dieser Zerlegung gilt dann:

$$(A+tB)(\alpha \oplus \beta, \alpha \oplus \beta) \;=\; (A+tB)(\alpha,\alpha) \;+\; 2tB(\alpha,\beta) \;+\; tB(\beta,\beta)$$

Damit $A+tB$ nun positiv semidefinit sein kann, muß nach der kategorischen Ungleichung

$$tB(\alpha,\beta)^2 \;\leq\; (A+tB)(\alpha,\alpha)B(\beta,\beta)$$

für alle $\alpha \in K^\perp$ und $\beta \in \operatorname{Kern} A$ gelten. Umgekehrt sieht man sofort, daß dies auch schon hinreichend ist. Weil $A + tB \geq \frac{1}{2}A > 0$ auf $K^\perp \cong E^*/\operatorname{Kern} A$ für genügend kleines $t$ und $B > 0$ auf $\operatorname{Kern} A$ nach Voraussetzung, kann man $t$ also so klein wählen, daß $A + tB$ sogar positiv definit wird. Wenn nun $\pi B \geq 0$ nicht mehr regulär in $\operatorname{Sym}^2(E/\operatorname{Im} A)$ ist, aber wenigstens noch $\operatorname{Im} B \subset \pi^{-1}(\operatorname{Im} \pi B)$ erfüllt, dann liegen sowohl $A$ als auch $B$ im Unterraum $\operatorname{Sym}^2\pi^{-1}(\operatorname{Im}\pi B) \subset \operatorname{Sym}^2 E$, und das obige Argument geht nach Einschränkung auf $\tilde{E} := \pi^{-1}(\operatorname{Im}\pi B)$ durch. $\square$

**Definition 6.8** *(Kegelschnitte)*
*Ein Kegelschnitt $M^+$ ist der nichtleere Schnitt des positiven Kegels $P^+E$ mit einem affinen Unterraum $M \subset \operatorname{Sym}^2 E$ modelliert nach einem Vektorunterraum $M_0 \subset \operatorname{Sym}^2 E$. Aus dem Hurwitz–Kriterium 6.2 folgt, daß alle Kegelschnitte semialgebraische Mengen sind. Ein Kegelschnitt heißt reduziert, wenn er ein positiv definites Element $G$ enthält. Die Notation $M^+$ bezeichne auch für allgemeinere Teilmengen $M \subset \operatorname{Sym}^2 E$ den Schnitt mit $P^+E$.*

Das folgende Lemma zeigt, daß man einen Kegelschnitt stets ohne Einschränkung als reduziert ansetzen kann, was im folgenden auch stillschweigend so gehandhabt werden wird:

**Lemma 6.9** *(Reduzierbarkeit von Kegelschnitten)*
*Sei $G \in M^+$ von maximalem Rang unter allen Elementen eines Kegelschnitts $M^+$ modelliert nach $M_0$, und $\tilde{G}$ ein beliebiges Element von $M^+$, dann gilt $\operatorname{Im} G \supset \operatorname{Im} \tilde{G}$ und dual dazu $\operatorname{Kern} G \subset \operatorname{Kern} \tilde{G}$. Insbesondere liegt der Kegelschnitt $M^+$ für jedes Element $G$ von maximalem Rang in $\operatorname{Sym}^2 \operatorname{Im} G$, ist also im wesentlichen ein Kegelschnitt in $\operatorname{Sym}^2 \operatorname{Im} G$ modelliert nach dem Vektorraum $M_0 \cap \operatorname{Sym}^2 \operatorname{Im} G$. Als solcher enthält er per Definition das positiv definite Element $G$.*

**Beweis:** Sind $G$ und $\tilde{G}$ Elemente des Kegelschnitts $M^+$, so auch $\frac{1}{2}(G+\tilde{G})$. Die Charakterisierung von Kern und Bild in Korollar 6.4 zeigt, daß $\operatorname{Kern} \frac{1}{2}(G+\tilde{G}) = \operatorname{Kern} G \cap \operatorname{Kern} \tilde{G}$ und somit $\operatorname{Im} \frac{1}{2}(G+\tilde{G}) = \operatorname{Im} G + \operatorname{Im} \tilde{G}$. Weil $G$ aber maximalen Rang unter allen Elementen in $M^+$ hat, kann dies nur gelten, falls $\operatorname{Im} G = \operatorname{Im} G + \operatorname{Im} \tilde{G} \supset \operatorname{Im} \tilde{G}$ oder dual dazu $\operatorname{Kern} G = \operatorname{Kern} G \cap \operatorname{Kern} \tilde{G} \subset \operatorname{Kern} \tilde{G}$ gilt. $\square$

**Bemerkung 6.10** *(Rand eines Kegelschnitts)*
*Der geometrische Rand eines Kegelschnitts ist die Menge aller $\tilde{G} \in M^+$, die nicht maximalen Rang haben. Für einen reduzierten Kegelschnitt stimmt dieser geometrische Rand mit dem topologischen Rand in $M$ überein, denn ist $G$ ein Element von maximalem Rang in einem reduzierten Kegelschnitt, so ist $G$ zwangsläufig positiv definit. Dann enthält $M^+$ aber bereits eine kleine Umgebung von $G$ in $M$.*

**Lemma 6.11** *(Kompakte Kegelschnitte)*
*Ein Kegelschnitt $M^+$ ist genau dann kompakt, wenn $M_0^+ = \{0\}$.*

**Beweis:** Nach Definition ist ein Kegelschnitt nicht leer, enthält also ein $G \in M^+$. Gibt es dann ein nichttriviales $G_0 \in M_0^+$, so liegt die ganze Halbgerade $G + \mathbb{R}_+ G_0$ in $M^+$, und $M^+$ ist nicht kompakt. Somit ist $M_0^+ = \{0\}$ sicherlich notwendig, damit $M^+$ kompakt ist. Die Voraussetzung $M_0^+ = \{0\}$ gilt nun nicht nur für den Kegelschnitt $M^+$, sondern auch für alle Unterkegelschnitte $\tilde{M}^+$, gegeben durch affine Unterräume $\tilde{M} \subset M$ und modelliert nach $\tilde{M}_0 \subset M_0$, sowie für deren Reduktionen. Ist etwa $\tilde{M} \subset M$ ein eindimensionaler affiner Unterraum und $\tilde{M}^+$ nicht leer, so ist seine Reduktion entweder ein Punkt $\tilde{M}^+ = \{G\}$ oder der Schnitt eines eindimensionalen affinen Unterraums $G + \mathbb{R}G_0$, $G_0 \neq 0$ mit dem positiven Kegel $P^+ \mathrm{Im}\, G$, wobei dann $G_0 \in \mathrm{Sym}^2 \mathrm{Im}\, G \cap M_0$ diagonalisierbar bezüglich $G$ ist. Dieser Schnitt ist aber kompakt, denn wegen $\pm G_0 \notin M_0^+ = \{0\}$ besitzt $G_0$ mindestens je einen positiven und negativen Eigenwert.

Das ist nun der Induktionsanfang für eine Induktion nach der Dimension, die beweist, daß für alle affinen Unterräume $\tilde{M} \subset M$ und somit auch für $M$ selber der Schnitt $\tilde{M}^+$ kompakt ist. Dazu reicht es nach dem Satz von Heine–Borel zu zeigen, daß jede Linearform $\psi \in \mathrm{Sym}^2 E^*$ auf $\tilde{M}^+$ nach oben beschränkt ist. Ohne Einschränkung ist $\psi \notin \tilde{M}_0^\perp$ nicht konstant auf $\tilde{M}$ und $\tilde{M}^+$ reduziert, enthält also ein positiv definites Element $G$. Dann kann man im echten Unterkegelschnitt $\{\tilde{G} \in \tilde{M}^+ : \psi(\tilde{G} - G) = 1\}$ von $\tilde{M}^+$ die absteigende Folge

$$A_n := \{\tilde{G} \in \tilde{M}^+ : \psi(\tilde{G} - G) = 1 \text{ und } G + n(\tilde{G} - G) \in \tilde{M}^+\} \qquad n \in \mathbb{N}$$

abgeschlossener Mengen betrachten, die als Teilmengen eines nach Induktionsvoraussetzung kompakten, echten Unterkegelschnitts ebenfalls kompakt sind. Aufgrund der Voraussetzung $M_0^+ = \{0\}$ ist der Schnitt aller $A_n$ offenbar leer, somit gilt für die absteigende Folge kompakter Mengen $A_n$ mit leerem Schnitt nach dem Satz von Cantor bereits $A_n = \emptyset$ für $n \gg 0$. Infolgedessen ist auch das lineare Funktional $\psi$ auf $\tilde{M}^+$ nach oben beschränkt, denn wenn es überhaupt ein Element $\tilde{G} \in \tilde{M}^+$ mit $\psi(\tilde{G} - G) \geq n$ gibt, dann ist wegen der Konvexität von $\tilde{M}^+$ auch $A_n$ nicht leer. □

Der Induktionsschritt dieses Beweises hängt von der speziellen Struktur des positiven Kegels $P^+ E$ gar nicht ab. Tatsächlich gilt der Satz allgemeiner für jede abgeschlossene Halbgruppe eines Vektorraums, die auch unter Multiplikation mit $\mathbb{R}^+$ abgeschlossen ist. Allerdings wird der Induktionsanfang dann komplizierter.

Nachdem die elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte behandelt worden sind, ist es vielleicht an der Zeit, sich über den Sinn ihres Studiums Gedanken zu machen. Natürlich sind die Kegelschnitte geometrisch interessante Objekte, aber die möglichen Anwendungen auf die minimalen isometrischen Immersionen Riemannscher Mannigfaltigkeiten und ähnliche Probleme lassen die folgenden Fragen an einen vorgegebenen Kegelschnitt als vordringlich erscheinen:

1. *Was ist der minimale Rang eines Randpunkts $G$ dieses Kegelschnitts?*

2. *Welche Zahlen treten ferner als Rang eines Randpunkts $G$ dieses Kegelschnitts auf?*

Zumindest die erste Frage hat interessante Verbindungen mit der Topologie. Zum Beispiel hängt die Frage nach dem minimal möglichen Rang eines Randpunkts der weiter unten eingeführten Kegelschnitte der orthogonalen Multiplikationen mit der Zahl linear unabhängiger Vektorfelder auf Sphären zusammen. Dadurch kann man topologische Methoden benutzen, weitreichende Zwangsbedingungen an die auftretenden Ränge anzugeben. Es ist verwunderlich, daß im Vergleich dazu die affine Struktur keine Rolle zu spielen scheint. Die Konvexität zum Beispiel läßt sich nämlich als Existenz von „Tunneln" zwischen verschiedenen topologischen Objekten interpretieren.

Die Frage nach dem Rang von Randpunkten eines Kegelschnitts kann man auf verschiedene Weisen umformulieren, die je nach Situation günstiger sind. Es ist jedenfalls klar, daß sich in einem reduzierten Kegelschnitt mit positiv definitem Element $G$ jede Richtung $G_0$ in der Sphäre $S_{M_0}$ der Richtungen in $M_0$ bezüglich $G$ diagonalisieren läßt. Zur Richtung $G_0$ gehört genau dann ein Randpunkt von $M^+$, wenn $G_0$ nicht positiv semidefinit ist, das heißt mindestens einen negativen Eigenwert besitzt. In diesem Fall ist der Korang des zugehörigen Randpunkts die Dimension des Eigenraums zum kleinsten Eigenwert.

Andererseits kann man einen reduzierten Kegelschnitt $M$ vermöge eines positiv definiten Elements $G$ auch als affinen Unterraum der Endomorphismen auf $E^*$ auffassen, der die Identität enthält. Dadurch wird die Determinante $\det_E$ zu einem wohldefinierten, inhomogenen Polynom auf $M$, mt dessen Hilfe man $M^+$ als Abschluß der Zusammenhangskomponente der Identität in der Menge $\{\det_E \neq 0\}$ charakterisieren kann. In diesem Bild ist der Korang eines Randpunkts die Ordnung, mit der $\det_E$ entlang der Geraden durch die Identität in diesem Punkt verschwindet.

**Bemerkung 6.12** *(Direkte Summen von Kegelschnitten)*
*Wenn es zu einem Kegelschnitt $M^+$ eine Zerlegung von $E = E_1 \oplus E_2$ gibt, die orthogonal bezüglich allen Elementen $G \in M$ ist, dann ist ein $G \in M$ genau dann positiv, wenn seine Einschränkungen auf $E_1$ und $E_2$ jeweils positiv ist. In diesem Fall ist die Menge $M^+$ der Durchschnitt des Urbilds zweier Kegelschnitte $M_1^+$ und $M_2^+$ in $M$, die durch die Projektion von $M$ auf* $\mathrm{Sym}^2 E_1$ *bzw.* $\mathrm{Sym}^2 E_2$ *definiert werden.*

Im günstigsten Fall zerfällt $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_{\dim E}$ sogar ganz in eindimensionale Unteräume, die orthogonal bezüglich aller $G \in M$ sind, das heißt es gibt eine gemeinsame Orthogonalbasis $\{e_\nu\}$ aller $G$. In diesem Fall ist der Kegelschnitt $M^+$ Schnitt affiner Halbräume, also ein konvexer Polyeder, und die Frage nach dem Rang von Randpunkten ist zwar einfach zu lösen, wenn man alle affinen Halbräume kennt, doch das Problem besteht eigentlich darin, einen Randpunkt minimalen Rangs zu finden, ohne alle affinen Halbräume bestimmt zu haben. Die einfachste Teilantwort auf die Frage nach dem minimal möglichen Rang eines Randpunktes ist jedenfalls eine *a priori* Abschätzung:

**Bemerkung 6.13** *(A priori Abschätzung)*
*Sei $M^+$ ein reduzierter Kegelschnitt in* $\mathrm{Sym}^2 E$ *und $U \subset E^*$ ein Unterraum, auf dem alle symmetrischen Bilinearformen $\tilde{G} \in M$ unter Einschränkung dieselbe symmetrische, notwendigerweise positiv definite Bilinearform $G \in$* $\mathrm{Sym}^2(E/U^\perp)$ *definieren. Dann gilt für alle positiv semidefiniten Bilinearformen $\tilde{G} \in M^+$ die a priori Abschätzung* $\mathrm{Rang}\, \tilde{G} \geq \dim U$.

Es gibt Kegelschnitte, die von selbst die Wahl eines geeigneten Unterraums $U \subset E$ nahelegen, um zu einer *a priori* Abschätzung zu kommen. Ist nämlich der Kegelschnitt $M^+$ definiert als Menge aller positiv semidefiniten Bilinearformen auf $E$, deren zugeordnete quadratische Form auf einer bestimmten Teilmenge von $E^*$ festgelegte Werte annimmt, dann induzieren alle $\tilde{G} \in M$ dieselbe positiv definite Bilinearform auf jedem linearen Unterraum $U \subset E^*$, der ganz in dieser Teilmenge enthalten ist.

Im allgemeinen sind diese Abschätzungen nicht scharf. Ihre Bedeutung liegt denn auch darin, daß jede *a priori* Abschätzung eine Dimensionsreduktion des Problems nach sich zieht, allerdings um den Preis der affin linearen Struktur. Dazu wählt man ein Komplement $K$ von $U$ in $E^*$, etwa als orthogonales Komplement bezüglich eines geeigneten, positiv definiten Elements aus $M^+$. Dann definiert jedes $\tilde{G} \in M$ einen Homomorphismus $f_{\tilde{G}} : K \longrightarrow U$ durch:

$$\tilde{G}(f_{\tilde{G}}k, u) \;=\; G(f_{\tilde{G}}k, u) \;:=\; \tilde{G}(k, u)$$

Das ist wohldefiniert, da jedes $\tilde{G} \in M$ nach Voraussetzung bei Einschränkung auf $U$ die positiv definite Bilinearform $G \in \mathrm{Sym}^2(E/U^\perp)$ induziert. Insbesondere hängt $f_{\tilde{G}}$ nur affin linear von $\tilde{G}$ ab. Nach Definition zerfällt $E^*$ dann für jedes $\tilde{G}$ in die $\tilde{G}$–orthogonale Summe $E^* = U \oplus (\mathrm{id} - f_{\tilde{G}})K$. Infolgedessen ist $\tilde{G} \in M$ genau dann positiv semidefinit, wenn $\tilde{G}$ nur schon auf dem Unterraum $(\mathrm{id} - f_{\tilde{G}})K \cong K$ oder äquivalent

$$Q\tilde{G}(k_1, k_2) \;:=\; \tilde{G}((\mathrm{id} - f_{\tilde{G}})k_1, (\mathrm{id} - f_{\tilde{G}})k_2) \;=\; \tilde{G}(k_1, k_2) \;-\; G(f_{\tilde{G}}k_1, f_{\tilde{G}}k_2)$$

nur schon positiv semidefinit auf $K$ ist. Offensichtlich hängt $Q\tilde{G}$ dabei inhomogen quadratisch von $\tilde{G}$ ab, so daß die affine Struktur verloren geht. Diese Reduktionsmethode eignet sich besonders für explizite Rechnungen, wie zum Beispiel die Rechnungen zu Kapitel 8 zeigen.

## 6.2 Lokale Randstruktur von Kegelschnitten

Ein Kegelschnitt $M \subset \mathrm{Sym}^2E$ trägt einerseits nach dem Hurwitz–Kriterium die Struktur einer semialgebraischen Menge, andererseits natürlich die affine Struktur von $M$. Wenn die Dimension des zugrundeliegenden Raums $E$ sehr groß im Vergleich zur Dimension von $M$ ist, dann scheint es kaum noch zweckmäßig, die Randstruktur von $M$ durch Betrachten der polynominalen Ungleichungen zu beschreiben. Ein besseres Verständnis der lokalen Randstruktur eines Kegelschnitts ist aber Voraussetzung dafür, die Menge der Randpunkte von minimalem Rang durch Eigenschaften zu charakterisieren, die leichter nachzuweisen sind.

**Definition 6.14** *(Abgeleitete Kegelschnitte)*
*Sei $G \in \partial M^+$ ein Randpunkt eines Kegelschnitts $M$. Dann ist $G$ ein positiv definites Element des abgeleiteten Kegelschnitts $M_G^+ := M^+ \cap \mathrm{Sym}^2\mathrm{Im}\,G$ in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Im}\,G$ modelliert nach $(M_G)_0 := M_0 \cap \mathrm{Sym}^2\mathrm{Im}\,G$, der alle Randpunkte $\tilde{G}$ von $M^+$ mit $\mathrm{Im}\,\tilde{G} \subset \mathrm{Im}\,G$ oder äquivalent $\mathrm{Kern}\,\tilde{G} \supset \mathrm{Kern}\,G$ enthält. Die Punkte von $M_G^+$ heißen flache Deformationen von $G$. Ist der Schnitt $(M_G)_0 = M_0 \cap \mathrm{Sym}^2\mathrm{Im}\,G$ leer, dann hat $G$ keine flachen Deformationen und $M_G^+$ enthält nur den Punkt $G$. Andernfalls besitzt der abgeleitete Kegelschnitt selbst wieder einen nichtleeren Rand in $M_G$, der aus den flachen Deformationen $\tilde{G} \in M_G^+ \subset M^+$ von $G$ besteht, für die $\mathrm{Im}\,\tilde{G}$ ein echter Unterraum von $\mathrm{Im}\,G$ ist.*

Natürlich folgt aus dieser Definition sofort, daß Randpunkte von minimalem Rang keine flachen Deformationen besitzen können. Diese Eigenschaft charakterisiert aber die Randpunkte minimalen Rangs keineswegs. Um eine bessere Vorstellung für die Form des Randes in einer Umgebung eines Randpunkts $G$ zu bekommen, betrachte man zuerst die kanonische Projektion $E \longrightarrow E/\operatorname{Im} G$ mit Fortsetzung

$$\pi : \operatorname{Sym}^2 E \longrightarrow \operatorname{Sym}^2(E/_{\operatorname{Im} G})$$

die im wesentlichen die Einschränkung auf den Unterraum $\operatorname{Kern} G \subset E^*$ ist. Weil $G$ *per definitionem* im Kern von $\pi$ liegt, bildet $\pi$ den affinen Raum $M$ auf den echten Unterraum $\pi M = \pi M_0$ und den Kegelschnitt $M^+$ auf den Kegelschnitt $(\pi M)^+$ ab. Dieser projezierte Kegelschnitt enthält mindestens ein positiv definites Element, nämlich das Bild $\pi\tilde{G}$ eines positiv definiten Elements $\tilde{G}$ in $M^+$, und ist im einfachsten Fall einfach eine Halbgerade:

**Satz 6.15** *(Glatte Randpunkte)*
*Ein Randpunkt $G \in \partial M^+$ heißt glatt im Sinne der konvexen Geometrie [Ber, Seite 360ff], wenn es einen eindeutigen affinen Halbraum $H = \{\alpha \geq 0\}$ in $M$ mit $\alpha(G) = 0$ gibt, der $M^+$ ganz enthält. Genau dann ist ein Randpunkt $G \in \partial M^+$ glatt in diesem Sinne, wenn $\pi M = \pi M_0$ eindimensional ist.*

**Beweis:** Jedes $\eta \in E^*$ definiert einen affinen Halbraum $\{\tilde{G} \in M : \tilde{G}(\eta, \eta) \geq 0\}$, der $M^+$ enthält. Nach Definition liegt $G$ genau dann auf dem Rand dieses Halbraums, wenn $\eta$ aus dem $\operatorname{Kern} G$ kommt. Nun bestimmt ein affiner Halbraum $\{\alpha \geq 0\}$ die affine Linearform $\alpha$ bis auf Multiplikation mit $\mathbb{R}^+$. Wenn es also nur einen affinen Halbraum von $M$ gibt, der $M^+$ enthält und für den $G$ auf dem Rand liegt, dann gilt für zwei $\eta_1$, $\eta_2 \in \operatorname{Kern} G$ und alle $\tilde{G}$, $\tilde{G}^+ \in M$, für die etwa $\tilde{G}^+$ positiv definit auf $\operatorname{Kern} G$ ist:

$$\frac{\tilde{G}(\eta_1, \eta_1)}{\tilde{G}^+(\eta_1, \eta_1)} = \frac{\tilde{G}(\eta_2, \eta_2)}{\tilde{G}^+(\eta_2, \eta_2)}$$

Alle symmetrischen Bilinearformen $\tilde{G} \in M$ induzieren somit bei Einschränkung auf $\operatorname{Kern} G$ ein Vielfaches der Einschränkung von $\tilde{G}^+$ auf $\operatorname{Kern} G$ und $\pi M$ ist eindimensional. Ist umgekehrt der Raum $\pi M$ eindimensional, dann ist das Urbild des positiven Kegels $P^+(E/\operatorname{Im} G)$ in $M$ ein affiner Halbraum, der $M^+$ enthält, und $G$ liegt auf dessen Rand. Nach Definition projeziert jedes $\tilde{G} \in M$ im Inneren dieses Halbraums bei Einschränkung auf $\operatorname{Kern} G$ auf eine positiv definite Bilinearform. Aufgrund von Lemma 6.7 gibt es dann ein $t > 0$, für das $(1-t)G + t\tilde{G}$ positiv definit ist. Deshalb ist der zuvor konstruierte Halbraum der einzige, der $M^+$ und somit auch $(1-t)G + t\tilde{G}$ enthält und für den $G$ auf dem Rand liegt. $\square$

**Bemerkung 6.16** *(Differenzierbare Ränder)*
*Nach Definition ist klar, daß alle Randpunkte $G \in \partial M^+$ vom Korang 1 glatte Randpunkte von $M^+$ sind, denn für sie ist schon $\operatorname{Sym}^2(E/\operatorname{Im} G)$ eindimensional. Diese Punkte sind auch genau die Randpunkte von $M^+$, in denen der Gradient der Determinante nicht verschwindet. Also ist der Rand von $M^+$ dort im üblichen Sinne glatt. Im allgemeinen kann es aber auch Randpunkte auf $\partial M^+$ vom höheren Korang geben, die im üblichen Sinne und somit im Sinne*

*der konvexen Geometrie glatt sind. Die Umkehrung dazu gilt im allgemeinen nicht, es sei denn, der Randpunkt hat Rang oder Korang 1. Als Beispiel dafür betrachte man den folgenden Randpunkt eines Kegelschnitts:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M = \{ \begin{pmatrix} 1 & A^T \\ A & a \end{pmatrix} : A \in \mathrm{M}_{r,s}\mathbb{R} \textit{ und } a \in \mathbb{R} \} \subset \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{r+s}$$

In Verallgemeinerung der *a priori* Abschätzung kann man mit Hilfe eines glatten Randpunkts $G$ eine bessere Abschätzung für den minimalen Rang eines beliebigen Randpunkts angeben, die hier ohne den trivialen Beweis nur deswegen angeführt wird, weil sie die Idee nahelegt, daß es möglich ist von der lokalen auf die globale Randstruktur zu schließen:

**Bemerkung 6.17** *(Randpunktabschätzung)*
*Sei $G$ ein glatter Randpunkt eines Kegelschnitts $M$, dann ist ein Randpunkt $\tilde{G}$ eine flache Deformation von $G$ oder erfüllt die Abschätzung* $\mathrm{Rang}\,\tilde{G} \geq \mathrm{Korang}\,G$.

Ganz allgemein kann man indes Lemma 6.7 für alle Randpunkte $G$ wie folgt umformulieren:

**Satz 6.18** *(Lokale Randstruktur von Kegelschnitten)*
*Für einen beliebigen Randpunkt $G$ eines Kegelschnitts $M^+$ induziert die kanonische Projektion $\pi : \mathrm{Sym}^2 E \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(E/\mathrm{Im}\,G)$ eine Parametrisierung von $M^+$ als Familie von Kegelschnitten über einer konvexen Teilmenge $\pi_G M$ von $(\pi M)^+$ mit der Eigenschaft, daß für jede positiv definite Bilinearform $\tilde{G} \in \pi M$, $\tilde{G} > 0$, ein $t > 0$ existiert mit $t\tilde{G} \in \pi_G M$. Die Kegelschnitte in dieser Familie über Punkten $\tilde{G} \in \pi_G M$ sind Kegelschnitte $M_{\tilde{G}}$ in $\mathrm{Sym}^2(\pi^{-1}\mathrm{Im}\,\tilde{G})$ modelliert nach $M_0 \cap (\pi^{-1}\mathrm{Im}\,\tilde{G}) \cdot \mathrm{Im}\,G$. Insbesondere ist der Kegelschnitt über dem ausgezeichneten Punkt $0 \in (\pi M)^+$ der abgeleitete Kegelschnitt $M_G$ von $G$.*

Die Leitidee dieses Studiums der lokalen Randstruktur ist nun die Tatsache, daß man von der lokalen auf einen gewissen „sichtbaren Teil" der globalen Randstruktur schließen kann. Dieser sichtbare Teil umfaßt für einen Randpunkt $G \in M^+$ gerade die Menge aller Randpunkte $\tilde{G} \in M^+$, für die $G + \tilde{G}$ nicht positiv definit ist, so daß die Verbindungsstrecke von $G$ zu $\tilde{G}$ ganz im Rand von $M^+$ verläuft. Über die Randstruktur außerhalb dieses Bereichs läßt die lokale Randstruktur in $G$ außer einer Rangabschätzung keine weiteren Schlüsse zu:

$$G + \tilde{G} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Rang}\,\tilde{G} \geq \mathrm{Korang}\,G$$

Ist der Kegelschnitt $M^+$ zum Beispiel ein konvexer Polyeder, so ist der in $G$ sichtbare Bereich gerade die Vereinigung aller Seitenpolyeder, die den Randpunkt $G$ enthalten. Allgemeiner ist der sichtbare Bereich die Vereinigung aller Kegelschnitte der zu $G$ gehörenden Familie über der Parametermenge $\pi_G M \subset (\pi M)^+$ mit nicht positiv definiten Basispunkten, ist also das Urbild des Randes des Kegelschnitts $(\pi M)^+$ in $M^+$.

Besonders interessant sind nun Kegelschnitte, bei denen man von geeigneten Randpunkten $G$ alle Randpunkte mit gleichem oder noch kleinerem Rang sehen kann, denn bei ihnen entscheidet sich die Antwort auf die Frage nach den Randpunkten minimalen Rangs in der lokalen Randstruktur von $G$. Diese Kegelschnitte werden dadurch charakterisiert, daß sie zumindest einen Randpunkt $G$ besitzen, dessen Rang kleiner als sein Korang ist, das heißt

$\operatorname{Rang} G < \frac{1}{2}\dim E$. Beispiele für solche Kegelschnitte sind die Modulräume der minimalen isometrischen Immersionen der dreidimensionalen Sphäre $S^3$, die im nächsten Kapitel beschrieben werden, und die weiter unten eingeführten Modulräume der orthogonalen Multiplikationen. Allerdings ist selbst die lokale Randstruktur in diesen Beispielen so kompliziert, daß eine Beschreibung zur Zeit unmöglich erscheint.

## 6.3 Andere Beispiele für Kegelschnitte

Neben den minimalen isometrischen Immersionen gibt es auch andere, geometrische Äquivalenzprobleme, bei denen sich die Modulräume als Kegelschnitte darstellen lassen. Tatsächlich ist dies ein völlig allgemeines Prinzip, sobald eine Äquivalenzrelation von Abbildungen durch Isometrien euklidischer Vektorräume definiert wird, kann man versuchen, den Modulraum als Kegelschnitt zu konstruieren. Die einfachsten Beispiele für diese Vorgehensweise sind die Modulräume der Punktkonfigurationen:

**Definition 6.19** *(Konfigurationen von k Punkten)*
*Eine Konfiguration von $k$ numerierten Punkten auf der Einheitssphäre $S_W$ eines euklidischen Vektorraums $W$ ist eine Abbildung $\phi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow S_W$. Zwei Konfigurationen $\phi$ und $\tilde{\phi}$ heißen äquivalent, geschrieben $\phi \sim \tilde{\phi}$, wenn es eine Isometrie $F : \mathrm{Spann}\{\phi\} \longrightarrow \mathrm{Spann}\{\tilde{\phi}\}$ gibt mit $\tilde{\phi} = F \circ \phi$. Die symmetrische Gruppe operiert in natürlicher Weise auf den Konfigurationen bzw. deren Äquivalenzklassen, ihre Orbiten sind die Konfigurationen von $k$ unnumerierten Punkten.*

Nun definiert jede Konfiguration $\phi$ von $k$ numerierten Punkten durch lineare Fortsetzung eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow W$ bei der $\phi(\nu)$ das Bild des $\nu$–ten Standardbasisvektors $e_\nu$ des $\mathbb{R}^k$ ist. Damit kann man das Argument aus Kapitel 2 wörtlich übertragen, um den Modulraum aller Konfigurationen von $k$ numerierten Punkten zu konstruieren. Die zu einer Konfiguration $\phi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow S_W \subset W$ duale Abbildung $\phi^*$ bildet dabei die Metrik von $W$ auf die Gramsche Matrix $G = (\langle \phi(\nu), \phi(\mu) \rangle_W) \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{*k}$ der Konfiguration ab, die der Modul der Konfiguration wird:

**Satz 6.20** *(Modulraum der Punktkonfigurationen)*
*Der Modulraum aller Konfigurationen von $k$ numerierten Punkten ist der Kegelschnitt der symmetrischen, positiv semidefiniten $k \times k$–Matrizen $G \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{*k}$ über $\mathbb{R}$, die nur Einsen auf der Diagonalen stehen haben. Er ist modelliert nach dem Unterraum $M_0 \subset \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{*k}$ aller symmetrischen Matrizen mit verschwindender Diagonale, also insbesondere kompakt nach Lemma 6.11. Die zu einer positiv semidefiniten Matrix $G \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{*k}$ gehörende Konfiguration $\phi$ wird dabei durch die Abbildung $\phi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \mathbb{R}^k/\mathrm{Kern}\, G$ repräsentiert, die $\nu$ auf die Klasse $e_\nu + \mathrm{Kern}\, G$ des $\nu$–ten Standardbasisvektors $e_\nu$ in $\mathbb{R}^k/\mathrm{Kern}\, G$ schickt.*

Man beachte, daß alle Kegelschnitte zu Punktkonfigurationen reduziert sind und genau $2^{k-1}$ Randpunkte vom Rang 1 besitzen, die zu den Äquivalenzklassen von Konfigurationen gehören, bei denen alle Bildpunkte nur auf einer Geraden bzw. auf zwei gegenüberliegenden Punkten der Einheitssphäre liegen. Daneben treten alle Zahlen $1, \ldots, k-1$ als Rang von Randpunkten dieser Kegelschnitte auf. Sie gehören zu Äquivalenzklassen von Konfigurationen $\phi$ von $k$ numerierten Punkten, bei denen das Bild $\{\phi(1), \ldots, \phi(k)\} \subset W$ nur einen Unterraum der entsprechenden Dimension aufspannt.

Eine weitere geometrisch interessante Klasse von Kegelschnitten sind die Modulräume der orthogonalen Multiplikationen. Der Parameterraum $M_0$ der Deformationen ist dabei sehr viel einfacher als die Parameterräume $M^{(1)}_{0,k}$ im Falle der minimale isometrischen Immersionen, und trotzdem kann die Frage nach dem minimal möglichen Rang eines Randpunkts bis auf Fälle kleiner Dimensionen bis heute nicht beantwortet werden. Allerdings zeigt dieses Beispiel einige Verbindungen dieser Fragen mit der Topologie auf, man vergleiche [W] und besonders [La], wo eine Tabelle der bekannten minimalen Ränge für Randpunkte aufgeführt ist:

**Definition 6.21** *(Orthogonale Multiplikationen [E&R])*
*Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume. Eine orthogonale Multiplikation von $V$ mit $W$ ist eine bilineare Abbildung $\phi : V \times W \longrightarrow Z$ in einen euklidischen Vektorraum $Z$ mit der Eigenschaft $|\phi(v, w)| = |v| \cdot |w|$ für alle $v \in V$ und $w \in W$. Zwei orthogonale Multiplikationen $\phi : V \times W \longrightarrow Z$ und $\tilde{\phi} : V \times W \longrightarrow \tilde{Z}$ heißen äquivalent, geschrieben $\phi \sim \tilde{\phi}$, wenn es eine Isometrie $F : \mathrm{Spann}\{\phi\} \longrightarrow \mathrm{Spann}\{\tilde{\phi}\}$ gibt mit $\tilde{\phi} = F \circ \phi$.*

Genau wie die Modulräume der Punktkonfigurationen kann auch der Modulraum $\mathcal{M}$ der orthogonalen Multiplikationen von $V$ mit $W$ nach dem Vorbild der Modulräume $\mathcal{M}_\lambda$ von do Carmo–Wallach als Kegelschnitt konstruiert werden. Dazu muß man lediglich das Lemma 2.1 von Takahashi durch die Tatsache ersetzen, daß jede bilineare Abbildung eine lineare Abbildung $V \otimes W \longrightarrow Z$ des Tensorprodukts und somit eine kanonische Abbildung $\phi^* : Z^* \longrightarrow V^* \otimes W^*$ induziert. Danach kann man den Modulraum $\mathcal{M}$ sofort als Schnitt des positiven Kegels $P^+(V^* \otimes W^*)$ mit einem affinen Unterraum konstruieren, der mindestens den Modul $\langle\ ,\ \rangle_V \otimes \langle\ ,\ \rangle_W$ der orthogonalen Multiplikation $V \times W \longrightarrow V \otimes W$, $(v, w) \longmapsto v \otimes w$ enthält. Folglich ist $\mathcal{M}$ nicht leer und ein reduzierter Kegelschnitt.

Nun überzeugt man sich leicht davon, daß der Parameterraum $M_0$ der Deformationen gerade der Annihilator des Unterraums von $\mathrm{Sym}^2(V \otimes W)$ ist, der von den zerlegbaren Quadraten $(v \otimes w)^2$ mit $v \in V$ und $w \in W$ aufgespannt wird. Unter der bekannten Zerlegung $\mathrm{Sym}^2(V \otimes W) \cong \mathrm{Sym}^2 V \otimes \mathrm{Sym}^2 W \oplus \Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 W$ entsprechen diese den Elementen $v^2 \otimes w^2$, spannen also genau den Unterraum $\mathrm{Sym}^2 V \otimes \mathrm{Sym}^2 W$ auf. In der dualen Zerlegung

$$\mathrm{Sym}^2(V^* \otimes W^*) \;\cong\; \mathrm{Sym}^2 V^* \otimes \mathrm{Sym}^2 W^* \;\oplus\; \Lambda^2 V^* \otimes \Lambda^2 W^*$$

von $\mathrm{Sym}^2(V^* \otimes W^*)$ ist $M_0$ deshalb der Raum $\Lambda^2 V^* \otimes \Lambda^2 W^*$. Man beachte, daß nur die Elemente des Unterraums $\mathrm{Sym}^2 V^* \otimes \mathrm{Sym}^2 W^*$ eine Spur bezüglich der Metrik $\langle\ ,\ \rangle_V \otimes \langle\ ,\ \rangle_W$ haben können, alle $G_0 \in M_0$ sind somit spurfrei und der Modulraum $\mathcal{M}$ kompakt nach Lemma 6.11.

Die gewählte Äquivalenzrelation auf den orthogonalen Multiplikationen erlaubt also die Konstruktion eines einfachen, geometrischen Modulraums $\mathcal{M}$. Dieser ist aber nur ein grober Modulraum für den im allgemeinen betrachteten, stärkeren Äquivalenzbegriff, der neben den Isometrien in $Z$ auch Isometrien in $V$ und $W$ zuläßt. Der feine Modulraum für diesen stärkeren Äquivalenzbegriff ist einfach der Quotient des groben Modulraums $\mathcal{M}$ unter der natürlichen Operation von $\mathbf{O}\,V \times \mathbf{O}\,W$.

Offensichtlich gilt nach Definition 6.21 für jede orthogonale Multiplikation $V \times W \longrightarrow Z$ die Abschätzung $\dim Z \geq \max\{\dim V, \dim W\}$. Dies äußert sich als *a priori* Abschätzung $\operatorname{Rang} G \geq \max\{\dim V, \dim W\}$ für $G \in \mathcal{M}$ im Sinne der Bemerkung 6.13, denn jedes $v \in V$ definiert einen linearen Unterraum $U = \mathbb{R}v \otimes W$ zerlegbarer Elemente in $V \otimes W$, auf dem alle $G \in \mathcal{M}$ dieselbe Metrik induzieren. Wenn es tatsächlich einen Randpunkt $G \in \mathcal{M}$ gibt, der diese Abschätzung $\operatorname{Rang} G = \dim W \geq \dim V$ scharf erfüllt, dann ist $W \oplus (V \otimes W / \operatorname{Kern} G)$ in kanonischer Weise ein $\mathbb{Z}_2$–graduierter Cliffordmodul der Cliffordalgebra von $V$.

Auf den ersten Blick scheinen die Beispielklassen der Modulräume minimaler isometrischer Immersionen und der orthogonalen Multiplikationen nicht sehr viel miteinander zu tun zu haben, aber es stellt sich heraus, daß der Modulraum der orthogonalen Multiplikationen $U \times U \longrightarrow Z$ ein Unterkegelschnitt des Modulraums $M_2^{(0)}$ für den Vektorraum $V = U \oplus U$ ist. Das ist ein Beispiel dafür, daß sich gewisse Koinzidenzen zwischen Kegelschnitten finden lassen, die zu unterschiedlichen Problemen gehören. Zunächst wird dabei das Tensorprodukt $U^* \otimes U^*$ von $U^*$ mit sich selbst in den Raum $H^2(U^* \oplus U^*)$ eingebettet, indem man $\alpha \otimes \beta$ auf $\alpha^L \cdot \beta^R$ schickt, wobei $\alpha^L$ und $\beta^R$ für die Linearformen $\alpha \oplus 0$ bzw. $0 \oplus \beta$ aus $U^* \oplus U^*$ geschrieben sei. Unter kanonischer Fortsetzung ermöglicht dies die Konstruktion einer Einbettung

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^2 U^* \otimes \Lambda^2 U^* & \longrightarrow & \operatorname{Sym}^2(U^* \otimes U^*) & \longrightarrow & \operatorname{Sym}^2 H^2(U^* \oplus U^*) \\ \alpha_1 \wedge \alpha_2 \otimes \beta_1 \wedge \beta_2 & & \longmapsto & & (\alpha_1^L \cdot \beta_1^R)(\alpha_2^L \cdot \beta_2^R) - (\alpha_2^L \cdot \beta_1^R)(\alpha_1^L \cdot \beta_2^R) \end{array}$$

deren Bild offensichtlich im Kern der Multiplikation nach $\operatorname{Sym}^4(U^* \oplus U^*)$ liegt. Eben diese Multiplikation schickt die von der Metrik $g$ auf $U$ induzierte Standardmetrik auf $U \otimes U$ auf das Produkt

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{ONB}} \sum_{\text{ONB}} (\alpha_\nu \otimes \alpha_\mu)^2 \stackrel{m}{\longmapsto} \Big( \sum_{\text{ONB}} \alpha_\nu^{L^2} \Big) \cdot \Big( \sum_{\text{ONB}} \alpha_\mu^{R^2} \Big) \;=\; 4\, g^L \cdot g^R$$

der beiden Kopien $g^L$ und $g^R$ von $g$ als Metriken der beiden Unterräume $U \oplus 0$ und $0 \oplus U$. In dieser Rechnung faßt man $\operatorname{Sym}^2 H^2(U^* \oplus U^*)$ als Unterraum von $H^2(U^* \oplus U^*) \otimes H^2(U^* \oplus U^*)$ auf, was für das Verschwinden des Faktors $\frac{1}{2}$ verantwortlich ist. Bemerkenswerterweise stimmt nun das iterierte Plückerdifferential $\frac{1}{2} P\ell^{*2}$ in diesem speziellen Fall mit der Multiplikation $m : \operatorname{Sym}^2(U^* \oplus U^*) \otimes \operatorname{Sym}^2(U^* \oplus U^*) \longrightarrow \operatorname{Sym}^4(U^* \oplus U^*)$ überein, und man erhält:

**Bemerkung 6.22** *(Die Hopf–Whitehead–Konstruktion [W], [E&R])*
*Der Modulraum $\mathcal{M}_2^{(0)}$ für den euklidischen Vektorraum $V := U \oplus U$ ist nach Definition die Menge aller positiv semidefiniten Urbilder von $\frac{n-1}{\lambda_2}(2g^L + 2g^R)^2$ unter der Multiplikation nach $\operatorname{Sym}^4(U^* \oplus U^*)$. Der Vorfaktor $\frac{n-1}{\lambda_2} = \frac{n-1}{2n}$ ist dabei gerade das Quadrat des Radius der Zielsphäre der zum zweiten Eigenwert assoziierten minimalen isometrischen Immersionen. Insbesondere definiert*

$$\operatorname{Sym}^2(U^* \otimes U^*) \;\longrightarrow\; \operatorname{Sym}^2 H^2(U^* \oplus U^*), \quad G \;\longmapsto\; 2\frac{n-1}{n}\Big( G + (g^L - g^R) \otimes (g^L - g^R) \Big)$$

*eine affin lineare Einbettung des Modulraums $\mathcal{M}$ der orthogonalen Multiplikationen der Form $U \times U \longrightarrow Z$ in den Modulraum $\mathcal{M}_2^{(0)}$ der Eigenabbildung der Einheitssphäre $S_{U \oplus U}$ zum zweiten Eigenwert, die den Rang jedes Punktes gerade um 1 erhöht.*

Diesen Gedanken fortführend kann man $\mathrm{Sym}^2 H^2 V^*$ ganz in $\mathbf{SO}\,V$–Darstellungen zerlegen

$$\mathrm{Sym}^2 H^2 V^* \;\cong\; \mathbb{R} \oplus H^2 V^* \oplus H^4 V^* \oplus \mathrm{Weyl}\, V^*$$

und dann die Kegelschnitte durch die Standardmetrik von $H^2 V$ betrachten, die nach den verschiedenen Summanden modelliert sind. Der Modulraum $\mathcal{M}_2^{(0)}$ gehört in diesem Sinne zum Summanden $\mathrm{Weyl}\, V^*$ der Weylschen Schnittkrümmungstensoren auf $V$. Hingegen beherrscht der Kegelschnitt modelliert nach $H^4 V^*$ das Kapitel 8. Insbesondere wird darin gezeigt, daß alle Randpunkte von dem minimalen Rang $\dim V - 1$ unter $\mathbf{SO}\,V$ zueinander konjugiert sind. In der Umgebung eines solchen Randpunkts werden alle für Elemente dieses Kegelschnitts möglichen Ränge $\dim V - 1$, $\dim V$, $\ldots$, $\dim H^2 V$ realisiert.

# Kapitel 7

# Die Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ der $S^3$

Dieses Kapitel beschreibt die innere Struktur der Modulräume der minimalen isometrischen Immersionen von do Carmo–Wallach im speziellen Fall der dreidimensionalen Sphäre $S^3$. Dieser Spezialfall ist deswegen besonders interessant, weil die Darstellungstheorie der $\mathbf{SO}_4\mathbb{R} \cong \mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2/\mathbb{Z}_2$ einfacher und leichter zugänglich ist als die Darstellungstheorie der $\mathbf{SO}_n\mathbb{R}$ für größere $n > 4$. Deshalb läßt sich die Argumentation aus den Kapiteln 4 und 5 leicht im Kontext der Darstellungstheorie der $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$ interpretieren, wodurch man zumindest eine grobe Landkarte des Modulraums der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ bekommt. Zudem ist die $S^3$ selbst eine kompakte Liegruppe, für die die Konstruktion von Mashimo interessante minimale isometrische Immersionen liefert.

In der Tat liegen die Moduli der minimalen isometrischen Immersionen von Mashimo in einem Unterkegelschnitt $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ modelliert nach einem Unterraum $M_{0,k}^{\text{Mashimo}} \subset M_{0,k}$, der aufgefaßt als Raum von Endomorphismen auf $H^k\mathbb{R}^4$ seinerseits in zwei kommutierende Unterräume $M_{0,k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $M_{0,k,R}^{\text{Mashimo}}$ zerfällt. Dadurch kann man die minimalen isometrischen Immersionen in diesem Unterkegelschnitt recht gut beschreiben, während es ein offenes Problem ist, die gewonnenen Erkenntnisse auf den ganzen Kegelschnitt zu übertragen. Nur im Fall der zum vierten Eigenwert assoziierten minimalen isometrischen Immersionen kommt man auf diesem direkten Weg zum Ziel, weil in diesem Fall $\mathcal{M}_4^{(1)} = \mathcal{M}_4^{\text{Mashimo}}$ gilt.

## 7.1 Realisierungen der Gruppen $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$ und $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$

Unter den orthogonalen Gruppen ist die $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$ eine merkwürdige Ausnahme, denn sie ist keine einfache Liegruppe, sondern wird vom direkten Produkt $\mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2$ zweifach überlagert. Weil diese Tatsache die entscheidende Schlüsselstellung im Studium der minimalen isometrischen Immersionen der dreidimensionalen Sphäre $S^3$ einnimmt, wird dieser Isomorphismus in diesem Abschnitt ausführlich dargestellt. Insbesondere wird dabei ein Faden aus dem Beweis des Lemmas 5.4 von do Carmo–Wallach wieder aufgenommen. Dabei ergibt sich ein wichtiges reelles Analogon des Lemmas A.5 aus Anhang A, das eine Normalform für harmonische Polynome über einem dreidimensionalen reellen Vektorraum bestimmt.

Sei $S$ ein zweidimensionaler, komplexer Vektorraum mit einer fest gewählten, symplektischen Form $\omega$ und einer verträglichen, positiven quaternionischen Struktur $J$, das heißt einer konjugiert–linearen Abbildung $J:\ S \longrightarrow S$ mit $J^2 = -1$, so daß

$$\omega(Js_1, Js_2) \;=\; \overline{\omega(s_1, s_2)} \qquad \text{und} \qquad \omega(s, Js) \;>\; 0$$

für alle $s_1$, $s_2$ und $s \neq 0$ aus $S$. Dann ist $S$ die definierende Darstellung der Gruppe $\mathbf{SU}_2 S$ aller komplex–linearen, symplektischen Automorphismen von $S$, die mit $J$ vertauschen. Eine Realisierung dieser definierenden Darstellung bekommt man, wenn man für $S$ den Raum $\mathbb{H}$ der Quaternionen mit komplexer und quaternionischer Struktur $Iz = zi$ bzw. $Jz = zj$ wählt. Um die symplektische Struktur anzugeben, benötigt man die kanonische Projektion von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{C}$:

$$[\,\cdot\,]_{\mathbb{C}}:\ \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \subset \mathbb{H}, \quad z \longmapsto [z]_{\mathbb{C}} \;:=\; \frac{1}{2}(z - izi)$$

Sie ist $\mathbb{C}$–linear unter Multiplikation sowohl von links als auch von rechts und besitzt die Eigenschaften $\overline{[z]_{\mathbb{C}}} = [\overline{z}]_{\mathbb{C}} = [-jzj]_{\mathbb{C}}$. Eine geeignete symplektische Form ist deshalb einfach:

$$\omega(z_1, z_2) \;:=\; [j\overline{z}_2 z_1]_{\mathbb{C}}$$

Ein komplex–linearer Automorphismus von $\mathbb{H}$, der mit der quaternionischen Struktur $J$ vertauscht, ist offenbar ein Element aus $\mathbf{GL}_1\mathbb{H}$ und somit die Linksmultiplikation mit einem Quaternion. Insbesondere sieht man, daß die Gruppe $\mathbf{SU}_2 S$ in dieser Realisierung gerade die Gruppe $S^3 \subset \mathbb{H}$ der Einheitsquaternionen ist.

Im Beweis des Lemmas 5.4 von do Carmo–Wallach interessierte besonders die zweite symmetrische Potenz $\mathrm{Sym}^2 S$ von $S$. Sie trägt die kanonischen Fortsetzungen von $\omega$ und $J$ und damit eine invariante, symmetrische Bilinearform und eine invariante, reelle Struktur. Die Positivität von $J$ auf $S$ gewährleistet, daß die symmetrische Bilinearform ein Skalarprodukt auf dem reellen Unterraum $V \subset \mathrm{Sym}^2 S$ ist. Zugleich ist der reelle Unterraum $V$ von $\mathrm{Sym}^2 S$ die Liealgebra von $\mathbf{SU}_2 S$, weil man ihn vermöge der symplektischen Form als Raum der infinitesimalen symplektischen Transformationen von $S$ auffassen kann, die mit $J$ kommutieren. Nach Lemma A.5 ist nun die quadratische Abbildung $S \longrightarrow V$, $s \longmapsto is \cdot Js$ surjektiv und induziert eine $\mathbf{SU}_2 S$–äquivariante Identifikation

$$\mathbb{P}S \cong \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\;\cong\;} S_V,\ [s] \longmapsto \frac{is \cdot Js}{\omega(s, Js)}$$

unter der die quaternionische Struktur $[s] \longmapsto [Js]$ zur Antipodenabbildung wird. Insbesondere entspricht die Operation der Gruppe $\mathbf{PSU}_2 S$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}S$ gerade der Operation der Gruppe $\mathbf{SO}\,V$ auf der Sphäre $S_V$.

Diese $\mathbf{SU}_2 S$–äquivariante Identifikation von $\mathbb{P}S$ mit $S_V$ erlaubt die Konstruktion eines reellen Analogons von Lemma A.5. Weil der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, wird darin nämlich bewiesen, daß jedes homogene Polynom vom Grad $k$ über einem zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Weil diese Linearfaktoren eindeutig bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren sind, induziert dies insbesondere eine stetige, bijektive Abbildung

$$(\underbrace{\mathbb{C}P^1 \times \ldots \times \mathbb{C}P^1}_{k})/_{S_k} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}P^k$$

die folglich ein Homöomorphismus sein muß. Entsprechend induziert das reelle Analogon zu Lemma A.5 den Homöomorphismus:

$$(\underbrace{S^2 \times \ldots \times S^2}_{k})/_{S_k \ltimes \mathbb{Z}_2^{k-1}} \longrightarrow S^{2k}$$

**Satz 7.1** *(Zerlegbarkeit harmonischer Polynome über $V^*$)*
*Jedes homogene, harmonische Polynom $\psi \in H^kV$ über einem dreidimensionalen, euklidischen Vektorraum $V^*$ hat eine Darstellung*

$$\psi = (v_1 \cdot \ldots \cdot v_k)_0$$

*als Projektion eines zerfallenden Polynoms $v_1 \cdot \ldots \cdot v_k$ aus $\mathrm{Sym}^kV$ auf $H^kV$. Die $v_\nu \in V$ sind dabei eindeutig bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren.*

**Beweis:** Im Beweis des Lemmas 5.4 wurde auch gezeigt, daß $\mathrm{Sym}^{2k}S \subset \mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^2S$ von den harmonischen Polynomen $\frac{1}{k!}(\frac{1}{2}s^2)^k$, $s \in S$, aufgespannt wird und somit mit $H^k\mathrm{Sym}^2S$ übereinstimmt. Nach Lemma A.5 kann man nun jedes homogene Polynom $\psi \in \mathrm{Sym}^{2k}S$ in Linearfaktoren zerlegen:

$$\psi = c\, s_1 \cdot \ldots \cdot s_{2k}$$

Besonders interessieren natürlich die reellen Polynome $\psi \in H^kV \subset \mathrm{Sym}^{2k}S$, die auf $V$ reelle Werte annehmen. Sie sind gerade die reellen Elemente bezüglich der kanonischen Fortsetzung der quaternionischen Struktur $J$, das heißt:

$$J\psi = \psi = \bar{c}\,(Js_1) \cdot \ldots \cdot (Js_{2k})$$

Weil die Linearfaktoren $s_\nu$ eindeutig bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren sind, induziert $J$ also für jedes reelle Polynom $\psi$ eine Involution auf der Menge der Punkte $\{[s_1], \ldots, [s_{2k}]\} \subset \mathbb{P}S$ mit Multiplizitäten, die unter der Identifikation $\mathbb{P}S \cong S_V$ einfach die Antipodenabbildung wird. Insofern erhält man nach geeignetem Reskalieren und Umnummerieren der $s_\nu$ eine Darstellung von $\psi$ der Form:

$$\psi = (is_1 \cdot Js_1) \cdot \ldots \cdot (is_k \cdot Js_k)$$

Damit ist man schon fast am Ziel, denn wegen $V = \{is \cdot Js \,:\, s \in S\} \subset \mathrm{Sym}^2S$ ist ein Polynom dieser Form offensichtlich im Bild der Projektion $\mathrm{Sym}^kV \longrightarrow \mathrm{Sym}^{2k}S$ auf den reellen Unterraum von $\mathrm{Sym}^{2k}S$. Nach dem Lemma von Schur ist diese Projektion eindeutig bis auf einen notwendigerweise reellen Skalar, weil die Darstellung $H^kV$ in der Zerlegung 4.5 von $\mathrm{Sym}^kV$ nur einmal auftritt. Infolgedessen kann man $\psi$ tatsächlich als $(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k)_0$ schreiben, wenn man die Vektoren $v_\nu = is_\nu \cdot Js_\nu$ wählt. Weil die $s_\nu$ eindeutig sind bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren, gilt dasselbe auch für die $v_\nu$. □

Die so definierten Faktoren $v_\nu \in V$ eines harmonischen Polynoms $\psi \in H^kV$ sind nach Normierung nichts anderes als eine Konfiguration von $k$ numerierten Punkten in der Einheitssphäre $S_V$ von $V$, denen man einen Modul im zugehörigen Modulraum aus Satz 6.20 zuordnen kann. Nach Konstruktion induziert die Operation der $\mathbf{O}\,V$ auf den harmonischen Polynomen die natürliche Operation der $\mathbf{O}\,V$ auf den zugehörigen Punktkonfigurationen, so daß deren Modul eine Invariante des Polynoms unter $\mathbf{O}\,V$ ist:

**Korollar 7.2** *(Invarianten für* $\mathbf{O}_3\mathbb{R}$ *und* $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$*)*
*Die Menge der Moduli von Konfigurationen von* $k$ *numerierten Punkten vom Rang höchstens* 3 *ist ein grobes Repräsentantensystem für die Orbiten der Operation der* $\mathbf{O}_3\mathbb{R}$ *auf der Sphäre* $S_{H^k\mathbb{R}^3}$ *der Richtungen in* $H^k\mathbb{R}^3$*. Ein echtes Repräsentantensystem bekommt man dadurch, daß man die natürliche Operation des semidirekten Produkts* $S_k \ltimes \mathbb{Z}_2^{k-1}$ *herausdividiert, wobei die symmetrische Gruppe* $S_k$ *auf* $\mathbb{Z}_2^{k-1} \cong \mathbb{Z}_2^k/\mathbb{Z}_2$ *durch Permutationen operiert. Bei geradem* $k$ *sind die Orbiten von* $\mathbf{O}_3\mathbb{R}$ *wegen* $-1 \in \mathbf{O}_3\mathbb{R}$ *auch schon Orbiten von* $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$*, während sie unter Umständen für ungerades* $k$ *in zwei Orbiten der* $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$ *zerfallen.*

Insbesondere bilden die Matrixkoeffizienten der Moduli zusammen mit der Norm ein vollständiges Invariantensystem für die Orbiten der $\mathbf{O}_3\mathbb{R}$ in der Darstellung auf den harmonischen Polynomen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß die harmonischen Polynome $(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k)_0$ mit Einheitsvektoren $\{v_\nu\}$ sehr unterschiedliche Norm haben können. Man bekommt auf diese Weise also wirklich nur Repräsentanten in jeder Richtung aus $S_{H^k\mathbb{R}^3}$, nicht aus der Einheitssphäre selbst.

Ähnlich nützlich erweist sich die Kenntnis elementarer Eigenschaften der Gruppe $\mathbf{SU}_2S$ auch bei Darstellungen der $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$. Dazu nimmt man sich zwei Kopien $\mathbf{SU}_2L$ und $\mathbf{SU}_2R$ der $\mathbf{SU}_2S$ mit definierenden Darstellungen $L$ und $R$ her, deren Tensorprodukt $L \otimes R$ dann ebenfalls eine reelle Struktur und eine $\mathbf{SU}_2L \times \mathbf{SU}_2R$–invariante, symmetrische Bilinearform trägt, die auf dem reellen Unterraum $V \subset L \otimes R$ positiv definit ist. Eine spezifische Realisierung dieser Idee im Geist der obigen Identifizierung von $S \cong L \cong R$ mit $\mathbb{H}$ ist die $\mathbb{C}$–lineare, reelle Isometrie

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, \quad z \otimes_{\mathbb{R}} \lambda \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(z \otimes j\lambda \,-\, zj \otimes \lambda) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda \otimes \overline{z}j \,-\, j\lambda \otimes \overline{z})$$

deren Umkehrabbildung $z_1 \otimes z_2$ nach $\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 j \overline{z}_2 \otimes_{\mathbb{R}} 1 - z_1 k \overline{z}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i)$ schickt. Wenn man diesen Isomorphismus einmal nachgerechnet hat, weiß man vielleicht den folgenden, abstrakten Ansatz zu schätzen. Allerdings sieht man nur in diesem Bild sofort, daß die Abbildung $\mathbf{SU}_2L \times \mathbf{SU}_2R \longrightarrow \mathbf{SO}\,V$ surjektiv ist mit Kern $\mathbb{Z}_2$. Besonders störend an dieser spezifischen Realisierung von $L \otimes R$ als $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ ist letztendlich die Wahl eines ausgezeichneten Basispunkts $1 \in \mathbb{H}$, obwohl die Sphäre $S_V$ keinen solchen ausgezeichneten Punkt besitzt. Stattdessen kann man $S_V$ selbst als Menge der symplektischen Isomorphismen von $L$ und $R$ charakterisieren, die auch die beiden quaternionischen Strukturen miteinander verschränken. Jedes $z \in S_V$ definiert nämlich Homomorphismen $z : L \longrightarrow R$, $s_L \longmapsto s_L^z$ und $z : R \longrightarrow L$, $s_R \longmapsto s_R^z$ vermöge:

$$\omega(s_L^z,\, s_R) \;:=\; \omega(s_L,\, s_R^z) \;:=\; \sqrt{2}(\omega \otimes \omega)(\,z,\, s_L \otimes s_R)$$

In der obigen, spezifischen Realisierung sind $z : L \longrightarrow R$ und $z : R \longrightarrow L$ einfach die Linksmultiplikation mit $\overline{z}$ bzw. $z$. Somit definiert $z$ tatsächlich zueinander inverse, symplektische Isomorphismen, die die zwei quaternionischen Strukturen $J$ miteinander verschränken, was sich auch ohne Rückgriff auf die spezifische Realisierung $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ nachrechnen läßt. Diese Konstruktion läßt nun die Gruppen $\mathbf{SU}_2L$ und $\mathbf{SU}_2R$ auch noch durch Verknüpfung auf $S_V$ operieren, und diese Operation ist einfach transitiv nach Definition. Insofern gilt dies auch für die eigentliche Operation dieser beiden Gruppen auf der Sphäre $S_V$ als Teilmenge von $L \otimes R$ wegen $\gamma_L z \;=\; \gamma_L \circ z \;=\; z \circ \gamma_L^{-1}$ und ebenso $\gamma_R z \;=\; \gamma_R \circ z \;=\; z \circ \gamma_R^{-1}$.

**Definition 7.3** *(Harmonische Polynome und Matrixkoeffizienten)*
*Die Darstellung* $\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$ *der Gruppe* $\mathbf{SU}_2 L \times \mathbf{SU}_2 R$ *läßt sich als Raum von Funktionen auf der Einheitssphäre* $S_V$ *des reellen Unterraums* $V$ *von* $L \otimes R$ *auffassen. Dazu setzt man die Homomorphismen* $z \in S_V$ *auf* $k$*–te symmetrische Potenzen fort und definiert:*

$$(\psi_L \otimes \psi_R)[\,z\,] \;:=\; \omega(\psi_L^z, \psi_R) \;=\; \omega(\psi_L, \psi_R^z)$$

*Die reelle Struktur* $J \otimes J$ *auf* $\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$ *entspricht der Konjugation auf Funktionen.*

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Funktionen die Einschränkung von komplexen, harmonischen Polynomen vom Grad $k$ auf die Einheitssphäre $S_V$ sind. Der von ihnen erzeugte Unterraum von $\mathrm{Sym}^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ wird nämlich gerade von den komplexen, harmonischen Polynomen vom Grad $k$

$$(\frac{1}{k!} s_L^k \otimes \frac{1}{k!} s_R^k)[\,z\,] \;=\; \omega(\frac{1}{k!} s_L^{kz}, \frac{1}{k!} s_R^k) \;=\; \frac{1}{k!}\omega(s_L^z, s_R)^k \;=\; \frac{\sqrt{2}^k}{k!}(\omega \otimes \omega)(s_L \otimes s_R,\, z\,)^k$$

zu isotropen Vektoren $(\omega \otimes \omega)(s_L \otimes s_R, \,\cdot\,) \in V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ aufgespannt. Nun ist jeder isotrope Vektor in $L^* \otimes R^*$ von dieser Form für geeignete $s_L \in L$ und $s_R \in R$, so daß $\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$ folglich mit dem Raum $H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ aller komplexen, harmonischen Polynome vom Grad $k$ auf $V$ übereinstimmt. Wichtig ist bei dieser Interpretation der $\psi_L \otimes \psi_R$ die Verträglichkeit mit den Operationen der Gruppen $\mathbf{SU}_2 L$ und $\mathbf{SU}_2 R$ etwa:

$$(\psi_L \otimes \psi_R)[\,\gamma_L^{-1} z\,] \;=\; \omega(\psi_L^{z \circ \gamma_L}, \psi_R) \;=\; (\gamma_L \psi_L \otimes \psi_R)[\,z\,]$$

Das bietet die Möglichkeit, diese Funktionen in Abschnitt 7.2 mit den Matrixkoeffizienten der Darstellungen der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2 L = \mathbf{SU}_2 R$ zu identifizieren. Aber vorerst ist $S_V$ noch keine Gruppe, sondern nur ein affiner Gruppenraum. Zur Gruppe fehlt $S_V$ zunächst die Kür eines Einselements $e \in S_V$, aber selbst dann bleibt noch die Frage, ob man die einfach transitive Operation von $\mathbf{SU}_2 L$ oder die von $\mathbf{SU}_2 R$ mit der Linksmultiplikation identifizieren soll, während die andere Gruppe dann von rechts durch Multiplikation mit dem Inversen operiert. Wie die Notation bereits andeutet und in der spezifischen Realisierung von $L \otimes R$ als $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ stillschweigend vorausgesetzt, sei diese Frage zugunsten der $\mathbf{SU}_2 L$ entschieden. Folgerichtig wird jedes $\gamma \in S_V$ mit den eindeutigen $\gamma_L \in \mathbf{SU}_2 L$ und $\gamma_R \in \mathbf{SU}_2 R$ mit $\gamma = \gamma_L e = \gamma_R^{-1} e$ identifiziert. Dadurch stellt sich eine gewisse Asymmetrie in den weiteren Rollen von $\mathbf{SU}_2 L$ und $\mathbf{SU}_2 R$ ein. So können zum Beispiel die Funktionen $(\psi_L \otimes \psi_R)$ auf $S_V$ nur als Matrixkoeffizienten der Darstellungen $\mathrm{Sym}^k R$ der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2 R$ interpretiert werden.

Alternativ kann man die Auszeichnung einer Linksmultiplikation auch als Wahl einer Orientierung auf der Sphäre $S_V$ auffassen. Das gewählte Einselement $e \in S_V$ definiert nämlich nebenbei auch eine Involution $\sigma^e : L \otimes R \longrightarrow L \otimes R,\; s_L \otimes s_R \longmapsto s_R^e \otimes s_L^e$, die gerade die Rollen von $L$ und $R$ und somit von $\mathbf{SU}_2 L$ und $\mathbf{SU}_2 R$ vertauscht. Insofern muß $\sigma^e$ auch die Orientierung von $S_V$ umkehren, denn es ist eine orthogonale Abbildung aber doch keinesfalls in $\mathbf{SO}\,V = \mathbf{SU}_2 L \times \mathbf{SU}_2 R / \mathbb{Z}_2$. Also wird die volle orthogonale Gruppe $\mathbf{O}\,V$ durch $\mathbf{SO}\,V$ zusammen mit dieser Involution erzeugt, und die verschiedenen Rollen von $\mathbf{SU}_2 L$ und $\mathbf{SU}_2 R$ in der Gruppenstruktur von $S_V = \mathbf{SU}_2 L = \mathbf{SU}_2 R$ sind wirklich die Folge der Wahl einer Orientierung.

Hier schließt sich der Kreis, die Wahl eines Basispunkts $e \in S_V$ genügt für eine Identifikation von $S$ mit $L$ und $R$. Wenn man damit die Gruppe $\mathbf{SU}_2 S$ diagonal in das Produkt Produkt $\mathbf{SU}_2 L \times \mathbf{SU}_2 R$ einbettet, dann zerfällt $L \otimes R$ unter Einschränkung nach der Clebsch–Gordon–Formel in $\mathbb{C} \oplus \mathrm{Sym}^2 S \cong \Lambda^2 S \oplus \mathrm{Sym}^2 S$. Dies ist gerade die Zerlegung von $L \otimes R$ in die Eigenräume $\mathbb{C}e$ und $\{e\}^\perp$ von $\sigma^e$ wegen $\sigma^e e = -e$, das heißt die diagonale $\mathbf{SU}_2 S$ stabilisiert genau die zwei reellen Punkte $\pm e \in S_V$, und operiert nurmehr auf deren orthogonalem Komplement $\{e\}^\perp$, der Komplexifizierung $\mathrm{Sym}^2 S$ eines dreidimensionalen, euklidischen Vektorraums. Umgekehrt bestimmt jeder Fixpunkt $z \in S_V$ eines Elements $(\gamma_L, \gamma_R)$ von $\mathbf{SU}_2 L \times \mathbf{SU}_2 R$ gerade einen Isomorphismus von $L$ und $R$, der $\gamma_L \in \mathbf{SU}_2 L$ und $\gamma_R \in \mathbf{SU}_2 R$ ineinander überführt. Das Element $(\gamma_L, \gamma_R)$ liegt also im Bild einer möglichen, diagonalen Einbettung von $\mathbf{SU}_2 S$.

## 7.2 Minimale isometrische Immersionen der $S^3$

In diesem Abschnitt wird die Argumentation aus den Kapiteln 4 und 5 anhand eines konkreten Beispiels im Kontext der Darstellungstheorie der Gruppe $\mathbf{SO}\, V = \mathbf{SU}_2 L \times \mathbf{SU}_2 R / \mathbb{Z}_2$ nachvollzogen. Speziell erhält man eine vollständige Zerlegung der Parameterräume $M_{0,k}^{(d)}$ der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}$ der dreidimensionalen Sphäre $S_V$ in irreduzible Darstellungen. Für diese Sphäre sind seit Mashimo [Ma] interessante Randpunkte der Modulräume $\mathcal{M}_{\lambda_k} = M_k^{(1)}$ von do Carmo–Wallach bekannt. Tatsächlich ist die Konstruktion 3.3 von Mashimo ursprünglich für eine der zwei möglichen Gruppenstrukturen auf $S_V$ gedacht.

Ein Ziel dieses Abschnitts ist es denn auch, die Moduli der minimalen isometrischen Immersionen von Mashimo in dem Modulraum $\mathcal{M}_k^{(1)}$ zu lokalisieren und näher zu studieren. Für eine über $\mathbb{R}$ irreduzible Darstellung beschreibt Satz 3.8 die Menge aller Vektoren, deren Orbiten die Bilder minimaler isometrischer Immersionen der Gruppe $S_V$ sind, als Lösungsmenge gewisser quadratischer Gleichungen. Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts ist nun die Bestimmung derjenigen Abbildung, die jedem solchen Mashimo–Vektor den Modul der induzierten minimalen isometrischen Immersion zuordnet und zugleich die Operation der invarianten Isometrien der entsprechenden Darstellung herausfaktorisiert. Diese Abbildung läßt sich schon für die nur über $\mathbb{C}$ irreduziblen Darstellungen der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2 R$ oder nach Änderung der Orientierung $S_V = \mathbf{SU}_2 L$ angeben. In ihrem Lichte betrachtet erweist sich die Konstruktion von Mashimo wirklich als ein sehr direkter Weg, Randpunkte im Modulraum zu finden.

Die Moduli aller durch diese Mashimo–Vektoren induzierten minimalen isometrischen Immersionen liegen in einem Unterkegelschnitt $\mathcal{M}_k^{\mathit{Mashimo}}$ von $\mathcal{M}_k^{(1)}$, dessen Geometrie sehr viel einfacher zu beschreiben ist, denn sein Parameterraum $M_{0,k}^{\mathit{Mashimo}}$ zerfällt bezüglich des Moduls $G$ der Standardimmersion in zwei kommutierende Unterräume $M_{0,k,L}^{\mathit{Mashimo}}$ und $M_{0,k,R}^{\mathit{Mashimo}}$ von Endomorphismen auf $\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$. Eine direkte Folgerung aus dieser angenehmen Eigenschaft ist, daß der Rand von $\mathcal{M}_k^{\mathit{Mashimo}}$ eine geometrische Realisierung der topologischen Union

$$\partial \mathcal{M}_k^{\mathit{Mashimo}} \;=\; \partial \mathcal{M}_{k,L}^{\mathit{Mashimo}} * \partial \mathcal{M}_{k,R}^{\mathit{Mashimo}}$$

der Ränder der beiden Unterkegelschnitte $\mathcal{M}_{k,L}^{\mathit{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{k,R}^{\mathit{Mashimo}}$ durch $G$ mit den Parameterräumen $M_{0,k,L}^{\mathit{Mashimo}}$ und $M_{0,k,R}^{\mathit{Mashimo}}$ ist. Diese beiden Unterkegelschnitte sind unter einem Wechsel der Orientierung der $S_V$ äquivalent und werden wechselweise auch als Modulräume der äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen bezeichnet [T&Z], weil sich etwa alle Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen in $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ durch Immersionen der $S_V$ als Orbit der Gruppe $\mathbf{SU}_2 R$ in isotypischen Darstellungen repräsentieren lassen.

Die Definition 7.3 identifiziert $\operatorname{Sym}^k L \otimes \operatorname{Sym}^k R$ mit dem Raum der komplexen, harmonischen Polynome $H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ vom Grad $k$ auf dem reellen Unterraum $V$ von $L \otimes R$. Folglich erlaubt die Clebsch–Gordon–Formel B.4 die vollständige Zerlegung aller Tensorprodukte

$$(H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} H^l V^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \bigoplus_{\nu,\mu=0}^{k\wedge l} \operatorname{Sym}^{k+l-2\nu} L \otimes \operatorname{Sym}^{k+l-2\mu} R$$

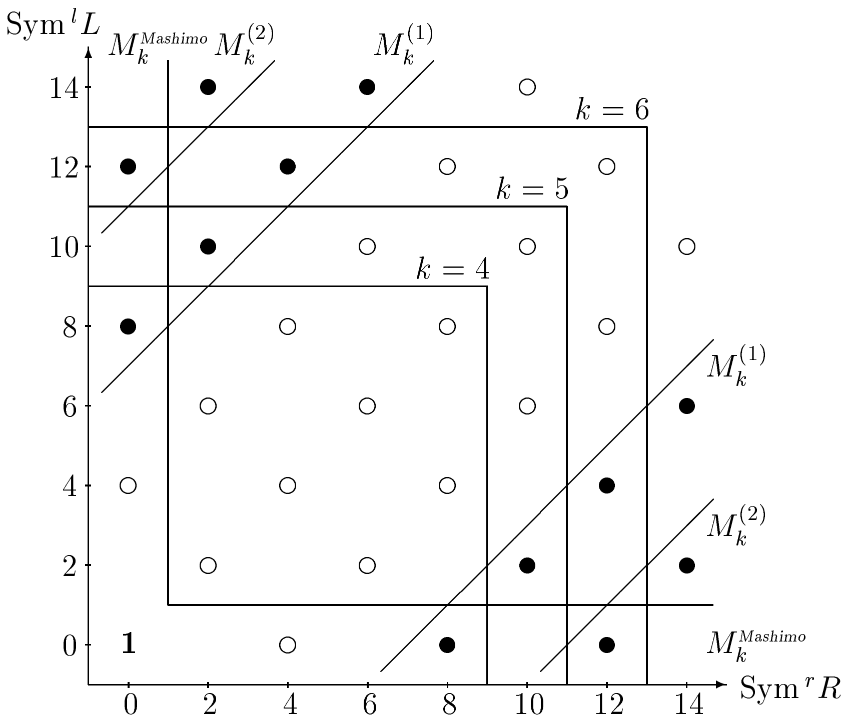
mit $k \wedge l := \min\{k, l\}$ in irreduzible $\mathbf{SO}\,V$–Darstellungen. Nach dem Lemma 5.4 von do Carmo–Wallach ist die diagonale Kontraktion $g\lrcorner : H^k V^* \otimes H^l V^* \longrightarrow H^{k-1} V^* \otimes H^{l-1} V^*$ mit dem kometrischen Tensor für $\dim V \geq 3$ surjektiv. Deshalb zerfallen die Räume $H^{k,l} V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ der Niedrigstgewichtssequenz als $\mathbf{SO}\,V$–Darstellungen in:

$$H^{k,l} V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \bigoplus_{\substack{\nu,\mu=0 \\ \nu\cdot\mu=0}}^{k\wedge l} \operatorname{Sym}^{k+l-2\nu} L \otimes \operatorname{Sym}^{k+l-2\mu} R$$

Folglich sind die Räume $L^{k,l} V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $k \geq l$, der Niedrigstgewichtsvektoren gegeben durch:

$$L^{k,l} V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;=\; (\operatorname{Sym}^{k-l} L \otimes \operatorname{Sym}^{k+l} R) \oplus (\operatorname{Sym}^{k+l} L \otimes \operatorname{Sym}^{k-l} R)$$

Nachdem man auf diese Weise die Grundbausteine der Darstellung der Weylalgebra auf $\operatorname{Sym} V^* \otimes \operatorname{Sym} V^*$ identifiziert hat, kann man die affinen Räume $M_k^{(d)}$ zu den Modulräumen $\mathcal{M}_k^{(d)}$ der dreidimensionalen Sphäre $S_V$ ausgehend von Satz 5.10 schematisch so darstellen:



Dabei entspricht das Schachbrettmuster der vollständigen Zerlegung des Tensorprodukts $(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R) \otimes (\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R)$ in irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathbf{SO}\,V$ über $\mathbb{C}$. Dargestellt sind in dem Schema aber lediglich die irreduziblen Summanden des Unterraums $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R)$, und zwar als $\bullet$ oder $\circ$, je nachdem ob sie in dem Parameterraum $M^{(1)}_{0,k}$ des Modulraums der minimalen isometrischen Immersionen enthalten sind oder nicht. Daneben symbolisiert die $\mathbf{1}$ den $\mathbf{SO}\,V$–invarianten Modul $G$ der Standardimmersion von Takahashi. Das betont auch noch einmal, daß alle Modulräume $\mathcal{M}^{(d)}_k$ Schnitte des positiven Kegels des reellen Unterraums $H^k V^*$ von $\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$ mit affinen Unterräumen durch $G$ sind. Was die Einbettung der einzelnen Summanden in $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R)$ betrifft, kann man sich auf das Lemma von Schur berufen, denn weil alle Summanden paarweise inäquivalent als Darstellungen sind, ist ihre $\mathbf{SO}\,V$–äquivariante Interpretation als Raum symmetrischer Bilinearformen auf $\mathrm{Sym}^k L^* \otimes \mathrm{Sym}^k R^*$ jeweils eindeutig bis auf einen komplexen Skalar, der reell ist, wenn die Einbettung zumindest die Fortsetzungen der quaternionischen Strukturen respektiert.

Der Einfachheit halber wird nun im folgenden angenommen, daß der $\mathbf{SO}\,V$–invariante Modul $G$ der Standardimmersion unter der durch Definition 7.3 festgelegten Identifikation von $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R)$ mit $\mathrm{Sym}^2 H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die durch $\omega$ oder genauer den dualen Bivektor $\Lambda$ induzierte symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Sym}^k L^* \otimes \mathrm{Sym}^k R^*$ ist. Allerdings stimmt diese Annahme nur bis auf einen Faktor, der an der Geometrie aller betrachteten Kegelschnitte aber nichts ändert. Wählt man nämlich duale Basenpaare $\{\psi_{L,\nu}\}$ und $\{d\psi_{L,\nu}\}$ sowie $\{\psi_{R,\mu}\}$ und $\{d\psi_{R,\mu}\}$ für $\mathrm{Sym}^k L$ und $\mathrm{Sym}^k R$, so erhält man mit Hilfe der zwei zueinander inversen, musikalischen Isomorphismen $\sharp : \mathrm{Sym}^k L \longrightarrow \mathrm{Sym}^k L^*$, $\psi_L \longmapsto \omega(\psi_L, \cdot\,)$ und $\flat : \mathrm{Sym}^k L^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^k L$ zunächst die folgende Darstellung dieser Bilinearform:

$$G \;:=\; \Lambda \otimes \Lambda \;=\; \sum_{\nu\mu} (d\psi_{L,\nu})^\flat \otimes \psi_{L,\nu} \otimes (d\psi_{R,\mu})^\flat \otimes \psi_{R,\mu}$$

Mit der in Definition 7.3 angegebenen Interpretation von Elementen von $\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$ als Funktionen auf $S_V$ gilt demnach für $G$ und das Diracsche Deltafunktional $\delta_z$ eines beliebigen Punktes $z \in S_V$:

$$\begin{aligned} G(\delta_z, \delta_z) \;&=\; \sum_{\nu\mu} (d\psi^\flat_{L,\nu} \otimes d\psi^\flat_{R,\mu})[\,z\,] \cdot (\psi_{L,\nu} \otimes \psi_{R,\mu})[\,z\,] \\ &=\; \sum_{\nu\mu} \omega(d\psi^\flat_{L,\nu}, (d\psi^\flat_{R,\mu})^z) \cdot \omega((\psi_{L,\nu})^z, \psi_{R,\mu}) \\ &=\; \sum_{\mu} \omega((d\psi_{R,\mu})^{zz}, \psi_{R,\mu}) \quad=\quad k+1 \end{aligned}$$

$G$ und mit ihm alle anderen Moduli in dem affinen Raum $M^{(1)}_{0,k}$ durch $G$ sind somit die Moduli minimaler isometrischer Immersionen der Einheitssphäre $S_V$ von $V$ mit skalierter Riemannscher Metrik vom Radius $R^2 = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ in Zielsphären vom Radius $r^2 = k+1$.

Bereits im Kapitel 3 wurde die Konstruktion 3.3 von Mashimo vorgestellt und besprochen, die man auf die dreidimensionale Sphäre anwenden kann. Als Ergebnis dieser Konstruktion erhält man minimale isometrische Immersionen der $S_V$, deren Bilder Orbiten isotypischer

Darstellungen von $S_V = \mathbf{SU}_2R$ oder $S_V = \mathbf{SU}_2L$ sind. Der wichtigste Schritt zur Bestimmung der Moduli dieser Immersionen ist dabei die Identifizierung der komplexen, harmonischen Polynome $\mathrm{Sym}^kL \otimes \mathrm{Sym}^kR$ auf $S_V \subset V$ mit den Matrixkoeffizienten der Darstellung $\mathrm{Sym}^kR$ der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2R$ im Sinne des Satzes von Peter–Weyl:

$$L^2S_V \;=\; \overline{\bigoplus_\pi \pi^* \otimes \pi} \;=\; \overline{\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Sym}^kL \otimes \mathrm{Sym}^kR}$$

Die Wahl einer Gruppenstruktur auf $S_V$ erfordert nach den Bemerkungen aus dem vorigen Abschnitt 7.1 nicht nur die Wahl eines Einselements $e \in S_V$, sondern auch die Wahl einer Orientierung. Erst dadurch wird nämlich festgelegt, daß ein $\gamma \in S_V$ mit den eindeutigen $\gamma_L \in \mathbf{SU}_2L$ und $\gamma_R \in \mathbf{SU}_2R$ mit $\gamma = \gamma_L e = \gamma_R^{-1} e$ zu identifizieren ist. Insbesondere impliziert diese Wahl der Orientierung, daß Links– und Rechtsmultiplikation mit $\gamma$ durch die Operation von $\gamma_L$ bzw. $\gamma_R^{-1}$ auf $S_V$ bewirkt werden. Deshalb kann man die aus Definition 7.3 folgenden Eigenschaften

$$(\psi_L \otimes \psi_R)[\,\gamma_L^{-1}z\,] \;=\; (\gamma_L\psi_L \otimes \psi_R)[\,z\,] \qquad\qquad (\psi_L \otimes \psi_R)[\,\gamma_R^{-1}z\,] \;=\; (\psi_L \otimes \gamma_R\psi_R)[\,z\,]$$

für alle $z \in S_V$ als Eigenschaften von Matrixkoeffizienten interpretieren:

**Definition 7.4** *(Reelle Matrixkoeffizienten von* $\mathrm{Sym}^kR$*)*
*Das Einselement $e \in S_V$ der Gruppenstruktur auf $S_V$ erlaubt es, den reellen Vektorraum* $\mathrm{Sym}^kL$ *vermöge* $\psi_L(\psi_R) := \mathrm{Re}\,\omega(\psi_L^e, \psi_R)$ *als reellen Dualraum* $(\mathrm{Sym}^kR)^*_{\mathbb{R}}$ *von* $\mathrm{Sym}^kR$ *aufzufassen. In diesem Sinne sind die reellen Matrixkoeffizienten der Darstellung* $\mathrm{Sym}^kR$ *von $S_V$ für ein $\gamma = \gamma_R^{-1}e = \gamma_R^{-1} \circ e$ in $S_V = \mathbf{SU}_2R$ gegeben durch:*

$$\psi_L(\gamma\psi_R) \;=\; \mathrm{Re}\,\omega(\psi_L^e, \gamma_R\psi_R) \;=\; \mathrm{Re}\,\omega(\psi_L^{\gamma_R^{-1}\circ e}, \psi_R) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\psi_L \otimes \psi_R \,+\, J\psi_L \otimes J\psi_R\Big)[\,\gamma\,]$$

Diese konkrete Identifikation der Funktionen aus $\mathrm{Sym}^kL \otimes \mathrm{Sym}^kR$ mit den Matrixkoeffizienten kann man nun sofort zur Bestimmung der Moduli der minimalen isometrischen Immersionen von Mashimo heranziehen. Anstatt die in Satz 3.8 gegebene Beschreibung der Varietät der Mashimo–Vektoren direkt auf die Darstellungen $\mathrm{Sym}^kR$ und alle $k \geq 0$ anzuwenden, was etwas problematisch ist, sei zunächst der Fall betrachtet, daß $k$ gerade und $\mathrm{Sym}^kR$ damit die Komplexifizierung einer irreduziblen Darstellung $W$ über $\mathbb{R}$ ist. Dann entspricht die Zerlegung von $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kR$ vermöge der Clebsch–Gordon–Formel

$$\mathrm{Sym}^2W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;=\; \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kR \;=\; \mathbb{C} \oplus \mathrm{Sym}^4R \oplus \mathrm{Sym}^8R \oplus \ldots \oplus \mathrm{Sym}^{2k}R$$

der Komplexifizierung der Zerlegung von $\mathrm{Sym}^2W$ aus Satz 3.8, die mit der Zerlegung der zweiten symmetrischen Potenz der Liealgebra verglichen werden muß. Für die letztere Zerlegung erhält man wegen $\mathfrak{su}_2R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Sym}^2R$ sofort:

$$\mathrm{Sym}^2\mathfrak{su}_2R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;=\; \mathbb{C} \oplus \mathrm{Sym}^4R$$

Der einzige nichttriviale Summand in beiden Zerlegungen ist der „kritische“ Summand $\mathrm{Sym}^4R$. Somit ist ein reelles Polynom $\psi_R \in W \subset \mathrm{Sym}^kR$ genau dann ein Mashimo–Polynom, wenn die Projektion seines Quadrats $\psi_R^2 \in \mathrm{Sym}^2W \subset \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kR$ auf $\mathrm{Sym}^4R$

verschwindet. Es ist bemerkenswert und keineswegs zufällig, daß der kritische Summand $\mathrm{Sym}^4 R$ gerade der einzige Summand von $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k R$ in $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R)$ ist, der nicht im Parameterraum $M^{(1)}_{0,k}$ liegt.

Um nun das Argument für alle $k$ und beliebige Polynome $\psi_R \in \mathrm{Sym}^k R$ zu übertragen, faßt man zunächst $\mathrm{Sym}^k R$ als reellen Vektorraum und damit als Darstellung von $\mathbf{SU}_2 R$ über $\mathbb{R}$ auf. Das $\mathbf{SU}_2 R$–invariante Skalarprodukt ist der Realteil der hermiteschen Form $\omega(\,\cdot,\ J\cdot\,)$, und die von $\psi_R \in \mathrm{Sym}^k R$ induzierte symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{su}_2 R$

$$\langle X,\, Y\rangle \;:=\; \mathrm{Re}\,\omega(X\psi_R, YJ\psi_R) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\omega(X\psi_R, YJ\psi_R) \;+\; (-1)^k\omega(XJ\psi_R, Y\psi_R)\Big)$$

hängt für gerade bzw. ungerade $k$ jeweils nur von $\frac{1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ aus $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k R$ oder nur von $\frac{1}{2}\psi_R \wedge J\psi_R$ aus $\Lambda^2\mathrm{Sym}^k R$ ab. Der kritische Summand $\mathrm{Sym}^4 R$ von $\mathrm{Sym}^k R \otimes \mathrm{Sym}^k R$ liegt für gerade oder ungerade $k$ ebenfalls in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k R$ bzw. $\Lambda^2\mathrm{Sym}^k R$, so daß man das Argument aus dem Beweis von Satz 3.8 sinngemäß übertragen kann. Ein Polynom $\psi_R \in \mathrm{Sym}^k R$ ist also genau dann ein Mashimo–Polynom, wenn in Abhängigkeit von $k$ die Projektion von $\frac{1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ oder $\frac{1}{2}\psi_R \wedge J\psi_R$ auf $\mathrm{Sym}^4 R$ verschwindet:

**Satz 7.5** *(Moduli der Immersionen von Mashimo)*
*Der Modul der durch ein normiertes Mashimo–Polynom $\psi_R$ mit $\omega(\psi_R, J\psi_R) = 1$ induzierten minimalen isometrischen Immersion der Sphäre $S_V$ vom Radius $R^2 = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ in eine Sphäre vom Radius $r^2 = k + 1$ ist für gerades $k$ gegeben durch $\frac{k+1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ als Element von $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k R$ und entsprechend durch $\frac{k+1}{2}\psi_R \wedge J\psi_R$ als Element von $\Lambda^2\mathrm{Sym}^k R$ für ungerades $k$. Insbesondere hängt dieser Modul tatsächlich nur vom Orbit von $\psi_R$ unter der Gruppe $S^1$ bzw. $S^3$ aller $\mathbf{SU}_2 R$–äquivarianten, $\mathbb{R}$–linearen Isometrien von $\mathrm{Sym}^k R$ ab.*

**Beweis:** Nach der Konstruktion 3.3 von Mashimo gehört zu einem normierten Mashimo–Polynom $\psi_R$ mit $\omega(\psi_R, J\psi_R) = 1$ die minimale isometrische Immersion $\phi:\ S_V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k R$, $\gamma \longmapsto \sqrt{k+1}\,\gamma\psi_R$ von $S_V = \mathbf{SU}_2 R$ als Orbit von $\sqrt{k+1}\,\psi_R$ in die Sphäre vom Radius $r^2 = k+1$ in $\mathrm{Sym}^k R$. Die duale Abbildung $\phi^*:\ (\mathrm{Sym}^k R)^*_{\mathbb{R}} \longrightarrow H^k V^*$ des reellen Dualraums $(\mathrm{Sym}^k R)^*_{\mathbb{R}}$ von $\mathrm{Sym}^k R$ wird unter der Identifikation des Raums $H^k V^* \subset \mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R$ der harmonischen Polynome auf $V$ mit reellen Matrixkoeffizienten zu:

$$\begin{array}{rcll} \phi^*:\ (\mathrm{Sym}^k R)^*_{\mathbb{R}} \;\cong\; \mathrm{Sym}^k L & \longrightarrow & H^k V^* \\ \psi_L & \longmapsto & \frac{\sqrt{k+1}}{2}(\psi_L \otimes \psi_R \;+\; J\psi_L \otimes J\psi_R) \end{array}$$

Wie bereits zuvor ist das $\mathbf{SU}_2 R$–invariante Skalarprodukt der Realteil der hermiteschen Form $\omega(\,\cdot,\ J\cdot\,)$, läßt sich also nach Wahl eines dualen Basenpaars $\{\psi_{L,\nu}\}$ und $\{d\psi_{L,\nu}\}$ vermöge der obigen Identifizierung von $\mathrm{Sym}^k L$ mit dem reellen Dualraum von $\mathrm{Sym}^k R$ schreiben als

$$\begin{aligned} &\langle \psi_1,\, \psi_2\rangle_{\mathrm{Sym}^k R} \\ &\quad=\; \sum_\nu \mathrm{Re}\Big(\omega(d\psi^{\flat e}_{L,\nu}, \psi_1)\,\omega(\psi^e_{L,\nu}, J\psi_2)\Big) \\ &\quad=\; (-1)^k \sum_\nu \Big(\mathrm{Re}\,\omega(d\psi^{\flat e}_{L,\nu}, \psi_1)\,\mathrm{Re}\,\omega(J\psi^e_{L,\nu}, \psi_2) \;+\; \mathrm{Re}\,\omega(i\,d\psi^{\flat e}_{L,\nu}, \psi_1)\,\mathrm{Re}\,\omega(i\,J\psi^e_{L,\nu}, \psi_2)\Big) \end{aligned}$$

das heißt $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Sym}^k R} = (-1)^k \sum_\nu (d\psi^\flat_{L,\nu} \otimes_{\mathbb{R}} J\psi_{L,\nu} + id\psi^\flat_{L,\nu} \otimes_{\mathbb{R}} iJ\psi_{L,\nu})$. Unter der Fortsetzung der Matrixkoeffizientenabbildung $\phi^*$ geht das Skalarprodukt von $\mathrm{Sym}^k R$ also auf den Modul:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sym}^2\phi^*\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Sym}^k R}\\
&= (-1)^k \frac{k+1}{4} \sum_\nu \Big( (d\psi^\flat_{L,\nu} \otimes \psi_R + Jd\psi^\flat_{L,\nu} \otimes J\psi_R) \otimes (J\psi_{L,\nu} \otimes \psi_R + (-1)^k \psi_{L,\nu} \otimes J\psi_R) \\
&\qquad + (id\psi^\flat_{L,\nu} \otimes \psi_R - iJd\psi^\flat_{L,\nu} \otimes J\psi_R) \otimes (iJ\psi_{L,\nu} \otimes \psi_R - (-1)^k i\psi_{L,\nu} \otimes J\psi_R) \Big) \\
&= \frac{k+1}{2} \sum_\nu \Big( d\psi^\flat_{L,\nu} \otimes \psi_{L,\nu} \otimes \psi_R \otimes J\psi_R + (-1)^k Jd\psi^\flat_{L,\nu} \otimes J\psi_{L,\nu} \otimes J\psi_R \otimes \psi_R \Big)
\end{aligned}$$

Nun muß man nur noch beachten, daß die Identität von $\mathrm{Sym}^k L$ offensichtlich ein reeller Endomorphismus von $\mathrm{Sym}^k L$ ist und sowohl $\sum_\nu d\psi^\flat_{L,\nu} \otimes \psi_{L,\nu}$ als auch $\sum_\nu Jd\psi^\flat_{L,\nu} \otimes J\psi_{L,\nu}$ geschrieben werden kann. $\square$

**Bemerkung 7.6** *(Bilder der Immersionen von Mashimo)*
*Insbesondere zeigt der Beweis auch, daß das Bild des Moduls $\tilde{G} \in \mathcal{M}^{(1)}_k$ der zu einem Mashimo–Polynom $\psi_R \in \mathrm{Sym}^k R$ gehörenden minimalen isometrischen Immersion gerade der reelle Unterraum von*

$$\mathrm{Im}\,\tilde{G} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;=\; \mathrm{Sym}^k L \otimes \psi_R + \mathrm{Sym}^k L \otimes J\psi_R \;\subset\; \mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R \;=\; H^k V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

*ist. Das Bild hat also Dimension $2k+2$, es sei denn $\psi_R$ und $J\psi_R$ sind linear abhängig, wodurch sich die Dimension des Bildes auf $k+1$ reduziert. Dieser Fall tritt nur ein, wenn $k$ gerade und $\psi_R$ ein Vielfaches $\xi\tilde{\psi}_R$, $\xi \in S^1$, eines reellen Mashimo–Polynoms $\tilde{\psi}_R = J\tilde{\psi}_R$ ist.*

Die ursprünglich von Mashimo in [Ma] angebenen Beispiele von normierten Mashimo–Polynomen $\psi_k$ für alle $k \geq 4$ lassen sich nach Wahl einer kanonischen Basis $p$ und $q := Jp$ von $R$ mit $\omega(p,q) = 1$ in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned}
\psi_4 &= \frac{1}{4\sqrt{6}}(p^4 + q^4) + \frac{i}{\sqrt{8}}p^2q^2 \\
\psi_k &= \sqrt{\frac{\kappa+1}{3k\cdot k!}}(p^k + q^k) + \frac{i^\kappa}{\kappa!}\sqrt{\frac{k-1}{3\kappa}}p^\kappa q^\kappa && \text{für } k = 2\kappa \geq 6 \\
\psi_k &= \sqrt{\frac{\kappa+2}{(3\kappa+3)k!}}p^k + \frac{1}{(\kappa+1)!}\sqrt{\frac{k}{3}}p^\kappa q^{\kappa+1} && \text{für } k = 2\kappa+1 \geq 5
\end{aligned}$$

Es lohnt sich, ein paar Beispiele dieser auf den ersten Blick sehr willkürlich gewählten Polynome genauer zu betrachten. So ist $\psi_4$ zum Beispiel kein reelles Polynom im Gegensatz zu den anderen $\psi_k$ mit geradem $k = 2\kappa \geq 6$, und definiert somit nur eine minimale isometrische Immersion der $S^3$ in eine $S^9$. Tatsächlich ist der Fall $k = 4$ eine Ausnahme, die im nächsten Kapitel 8 genauer untersucht und beschrieben wird. Insbesondere wird sich dabei zeigen, daß $\psi_4$ unmöglich reell gewählt werden kann, weil es in $\mathrm{Sym}^4 R$ keine reellen Mashimo–Polynome gibt. Die Standgruppe des angegebenen $\psi_4$ in $\mathbf{SU}_2 R$ muß deshalb sowohl den Real– als auch den Imaginärteil von $\psi_4$ festlassen. Zerlegt man beide vollständig in Linearfaktoren

$$\psi_4 \;=\; \frac{1}{4\sqrt{6}}(p+q)(p+iq)(p-q)(p-iq) \;+\; \frac{i}{\sqrt{8}}p^2q^2$$

so erkennt man, daß die Standgruppe der zu den Linearfaktoren gehörenden Punktkonfiguration in $\mathbb{P}R$ die homogene Dihedralgruppe $D_4^* \subset \mathbf{SU}_2 R$ ist. Die Standgruppe von $\psi_4$ ist darin enthalten und stellt sich als homogene Dihedralgruppe $D_2^*$ heraus, weil der Realteil von $\psi_4$ unter einem Erzeuger $p \longmapsto \xi p$, $q \longmapsto \overline{\xi} q$ der $D_4^*$ mit $\xi^8 = 1$ das Vorzeichen wechselt. Somit ist das Bild der zu $\psi_4$ gehörenden minimalen isometrischen Immersion der Quotient $S^3/D_2^*$. Der Modul dieser Immersion ist nun das Element:

$$\frac{k+1}{2}(\psi_4)\cdot(J\psi_4) \;\in\; \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^4 R \;\cong\; \mathbb{C}\oplus\mathrm{Sym}^4 R\oplus\mathrm{Sym}^8 R$$

Weil die Projektion von $(\psi_4)\cdot(J\psi_4)$ auf $\mathbb{C}$ im wesentlichen nur die $\mathbf{SU}_2 R$–invariante Norm und die Projektion auf $\mathrm{Sym}^4 R$ nach Wahl von $\psi_4$ verschwindet, ist der wesentliche Teil dieses Moduls die Projektion auf $\mathrm{Sym}^8 R$:

$$\psi_4\cdot J\psi_4 \;=\; \sqrt{21}\,\psi_8 \;=\; \frac{1}{96}(p^8 \;+\; 14p^4q^4 \;+\; q^8) \;=\; \frac{1}{96}\prod_{\xi^4=1}(p - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\xi q)(p + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\xi q)$$

Bemerkenswert ist dabei, daß der Modul von $\psi_4$ auch ein Mashimo–Polynom ist. Damit ist sein Orbit unter $\mathbf{SU}_2 R$ in dem affinen Raum $M_4^{(1)}$ selbst eine minimale isometrische Immersion der $S^3$ in eine $S^8$ zum achten Eigenwert [T&Z]. Die Menge aller Moduli von minimalen isometrischen Immersionen ist der Orbit dieses Moduls unter der vollen orthogonalen Gruppe $\mathbf{O}\,V$, also die Vereinigung von zwei dieser minimal immersierten $S^3$.

Die zu den Linearfaktoren von $\psi_4\cdot J\psi_4$ gehörende Punktkonfiguration in $\mathbb{P}R$ ist genau die Konfiguration der acht Ecken eines Würfels, die Standgruppe dieser Punktkonfiguration ist deshalb die homogene Oktaedergruppe $O^*$. Im nächsten Kapitel 8 wird gezeigt, daß tatsächlich die volle Oktaedergruppe $\mathbf{SO}_3\mathbb{Z} \subset \mathbf{SO}_3\mathbb{R}$ den Modul zu $\psi_4$ stabilisiert. Mit den Beispielen fortfahrend lautet die vollständige Zerlegung von $\psi_6$ in Linearfaktoren:

$$\psi_6 \;=\; \frac{1}{18\sqrt{10}}\prod_{\xi^3=i}(p - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\xi q)(p + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\xi q)$$

Die zugehörige Punktkonfiguration in $\mathbb{P}R \cong S^2$ ist gerade die Konfiguration der sechs Einheitsvektoren auf drei orthogonalen Koordinatenachsen. Deswegen ist die Standgruppe von $\psi_6$ ebenfalls enthalten in der homogenen Oktaedergruppe $O^*$. Im Sinne des Satzes 7.1 ist $\psi_6$ bis auf eine Konstante aber auch das reelle, harmonische Polynom $xyz$ mit einer Orthonormalbasis $x$, $y$ und $z$ von $\mathbb{R}^3$. Deshalb ist die Standgruppe von $\psi_6$ in $\mathbf{SO}_3\mathbb{R}$ tatsächlich nur die Tetraedergruppe $T$, denn unter $x \longmapsto y$, $y \longmapsto -x$ wechselt $xyz$ das Vorzeichen.

Auf die gleiche Art und Weise kann man sich davon überzeugen, daß die Standgruppe aller anderen Beispiele $\psi_k$ von Mashimo mit geradem $k \geq 10$ entweder die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_k$ oder die homogene Dihedralgruppe $D_{\frac{k}{2}}^*$ ist, falls $k$ sogar durch vier teilbar sein sollte.

Dagegen findet sich unter den Beispielen $\psi_k$ von Mashimo für ungerades $k$ keines mit nichttrivialer Standgruppe, denn die Standgruppe der Punktkonfiguration der Linearfaktoren ist in allen Fällen die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_{k+1}$, dessen Erzeuger $p \longmapsto \xi p$, $q \longmapsto \overline{\xi} q$ mit $\xi^{k+1} = 1$ das Polynom $\psi_k$ mit $\overline{\xi}$ multipliziert. Weitere Beispiele für Mashimo–Polynome wurden von DeTurck–Ziller [DT&Z] konstruiert und dabei explizit gezeigt, daß jede diskrete Untergruppe der $\mathbf{SU}_2 R$, also auch die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_m$ ungerader Ordnung $m$, als Stabilisator eines Mashimo–Polynoms auftauchen kann. Infolgedessen besitzt jede homogene Raumform $S^3/\Gamma$ eine minimale isometrische Immersion.

Für gerades $k$ gibt es eine ganze Klasse von Polynomen $\psi_R \in \mathrm{Sym}^k R$, für die die Projektion von $\frac{k+1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ auf $\mathrm{Sym}^4 R$ verschwinden muß. Wenn nämlich ein Polynom $\psi_R$ und damit auch $J\psi_R$ invariant unter einer diskreten Untergruppe $\Gamma$ von $\mathbf{SU}_2 R$ ist, dann muß auch das Bild der $\mathbf{SU}_2 R$–äquivarianten Projektion von $\frac{k+1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ auf den invarianten Unterraum $\mathrm{Sym}^4 R$ unter $\Gamma$ invariant sein. Aber weder die homogene Tetraedergruppe, noch die Oktaeder– oder Ikosaedergruppe stabilisieren nichttriviale Elemente von $\mathrm{Sym}^4 R$. Deshalb induziert jedes Polynom, das unter einer dieser Gruppen invariant ist, automatisch eine minimale isometrische Immersion der dreidimensionalen Sphäre $S_V$.

Die Ikosaedergruppe stabilisiert noch nicht einmal ein Element in $\mathrm{Sym}^8 R$. Ist also $\psi_R$ ein invariantes Polynom unter der Ikosaedergruppe, dann verschwindet das Bild von $\frac{k+1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ nicht nur unter der Projektion auf $\mathrm{Sym}^4 R$, sondern auch unter der Projektion auf $\mathrm{Sym}^8 R$. Infolgedessen liegt der Modul der von $\psi_R$ induzierten minimalen isometrischen Immersion schon in dem Modulraum $\mathcal{M}_k^{(2)} \subset \mathcal{M}_k^{(1)}$, das heißt die zweite Fundamentalform dieser Immersion ist in jedem Punkt äquivalent zur zweiten Fundamentalform der Standardimmersion. Die Punktkonfiguration der Linearfaktoren des einfachsten dieser Polynome in $\mathbb{P}R$ ist gerade die Konfiguration der zwölf Ecken eines Ikosaeders [DT&Z]:

$$\psi_{\text{Ikosaeder}} := \frac{1}{3600\sqrt{11}} pq \prod_{\xi^5=1} (p - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\xi q)(p + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\xi q) = \frac{1}{3600\sqrt{11}} (\, p^{11} q + 11 p^6 q^6 - p q^{11}\, )$$

Diesen Gedanken weiterverfolgend kann man sich fragen, ob nicht nur in $\mathcal{M}_k^{(1)}$, sondern auch in den höheren Modulräumen $\mathcal{M}_k^{(d)}$, $d \geq 1$, Moduli der Form $\frac{k+1}{2}\psi_R \cdot J\psi_R$ bzw. $\frac{k+1}{2}\psi_R \wedge J\psi_R$ liegen. Wenn das Bild eines solchen Moduls unter der Projektion auf den invarianten Unterraum $\mathrm{Sym}^4 R \oplus \mathrm{Sym}^8 R \oplus \ldots \oplus \mathrm{Sym}^{4d} R$ von $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{Sym}^k R$ oder $\Lambda^2 \mathrm{Sym}^k R$ verschwinden soll, dann muß $\psi_R$ dem genau dadurch definierten System quadratischer Gleichungen genügen. Wie im ursprünglich von Mashimo [Ma] betrachteten Fall $d = 1$ führt dies nach Wahl von Koordinaten zu natürlich von $k$ und $d$ abhängigen Gleichungssystemen für die Polynome $\psi_R$.

Besonders interessant sind nun reelle Lösungen $\psi_R = J\psi_R$ dieser Gleichungssysteme für gerade $k$ und $d \geq 3$. Die Moduli $\tilde{G} = \frac{k+1}{2}\psi_R^2$ der von diesen $\psi_R$ induzierten minimalen isometrischen Immersionen liegen nämlich nicht nur in dem Modulraum $\mathcal{M}_k^{(3)} \subset \mathcal{M}_k^{(1)}$, sondern besitzen der Bemerkung 7.6 zufolge als Randpunkte des größeren Kegelschnitts $\mathcal{M}_k^{(1)}$ flache Deformationen im Sinne der Definition 6.14. Tatsächlich ist der Schnitt von $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{Im}\, \tilde{G} \subset \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathrm{Sym}^k R)$ mit dem Parameterraum $M_{0,k}^{(1)}$ des Modulraums der minimalen isometrischen Immersionen nicht leer, sondern enthält zumindest den neundimensionalen reellen Unterraum von:

$$\mathrm{Sym}^8 L \otimes \tilde{G} \quad \subset \quad \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k L \otimes \mathbb{C}\psi_R) \;\cap\; M_{0,k}^{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Wenn also für gerades $k$ und $d \geq 3$ eine reelle Lösung $\psi_R$ des entsprechenden Gleichungssystems existiert, dann muß es eine minimale isometrische Immersion zum $k$–ten Eigenwert geben, die in eine Zielsphäre der Dimension kleiner als $k$ geht. Insofern ist es wichtig zu wissen, daß diese Gleichungssysteme zumindest für alle geraden $42 \leq k \leq 80$ reelle Lösungen besitzen. Leider lassen diese Beispiele bis jetzt aber noch keine klaren Schlüsse zu.

**Korollar 7.7** *(Minimale isometrische Immersionen mit Selbstschnitten)*
*Für jeden Eigenwert $\lambda_k = k(k+2)$ mit geradem $k \geq 4$ besitzt die dreidimensionale Sphäre $S^3$ minimale isometrische Immersionen, deren Bilder in der Zielsphäre Selbstschnitte besitzen und somit keine glatten Untermannigfaltigkeiten sind. Alle im Beweis konstruierten Beispiele schneiden sich selbst entlang von mehreren Großkreisen $S^1 \subset S^3$.*

**Beweis:** Die explizite Diskussion der Standgruppen der Beispiele von Mashimo zeigt insbesondere, daß für gerade $k$ stets minimale isometrische Immersionen zum $k$–ten Eigenwert existieren, deren Bilder homogene Raumformen $S^3/\Gamma$ mit $\Gamma \neq \{\pm 1\}$ sind. Ohne Einschränkung ist $\Gamma$ eine Untergruppe von $\mathbf{SU}_2 R$ und nach Wahl einer konjugierten Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ in $\mathbf{SU}_2 L$ gibt es in der Menge $\Gamma\tilde{\Gamma}^{-1} \subset \mathbf{SU}_2 L \times \mathbf{SU}_2 R$ nichttriviale Isometrien der $S^3$ mit Fixpunkten. Wie für $\Gamma$ gibt es natürlich auch für $\tilde{\Gamma}$ eine minimale isometrische Immersion der $S^3$ zum $k$–ten Eigenwert, deren Bild die homogene Raumform $S^3/\tilde{\Gamma}$ ist. Auf der Verbindungsstrecke der beiden zugehörigen Moduli liegen dem Tunnelargument 2.11 zufolge Moduli minimaler isometrischer Immersionen mit Selbstschnitten. Dem Beweis des Tunnelarguments nach müssen sich die Bilder entlang von Großkreisen schneiden, weil eine nichttriviale Isometrie aus $\mathbf{SO}_4\mathbb{R}$ mit einem Fixpunkt auf der $S^3$ schon einen Großkreis $S^1 \subset S^3$ festläßt. $\square$

Bis jetzt wurden lediglich die Beispiele der durch Mashimo–Polynome $\psi_R \in \mathrm{Sym}^k R$ induzierten minimalen isometrischen Immersionen betrachtet, und dabei noch nicht benutzt, daß die Konstruktion von Mashimo in sehr großer Allgemeinheit für isotypische Darstellungen möglich ist. Der Schluß dieses Kapitels ist deshalb einer teilweisen Beschreibung aller Äquivalenzklassen dieser „äquivarianten" Immersionen gewidmet. Im wesentlichen ist diese Frage äquivalent zur Bestimmung der Randstruktur des folgenden Unterkegelschnitts von $\mathcal{M}_k^{(1)}$:

**Definition 7.8** *(Der Unterkegelschnitt $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$)*
*Die Moduli aller von Mashimo konstruierten minimalen isometrischen Immersionen liegen in dem Unterkegelschnitt $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ des Modulraums $\mathcal{M}_k^{(1)}$, der durch den Modul $G$ der Standardimmersion geht und durch den reellen Unterraum $M_{0,k}^{\text{Mashimo}}$ von*

$$M_{0,k}^{\text{Mashimo}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;=\; \bigoplus_{\nu=2}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Sym}^{2\nu} L \oplus \bigoplus_{\mu=2}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Sym}^{2\mu} R$$

*modelliert wird. In offensichtlicher Weise zerfällt $M_{0,k}^{\text{Mashimo}}$ dabei in zwei Unterräume $M_{0,k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $M_{0,k,R}^{\text{Mashimo}}$, die ihrerseits Unterkegelschnitte $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ durch $G$ definieren. $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ sind unter der Isometriegruppe $\mathbf{O}\,V$ der Sphäre $S_V$ isomorph und werden wechselweise als Modulraum der äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen bezeichnet.*

Zunächst ist sicherlich eine Erklärung darüber angebracht, warum $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ oder alternativ $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ als Modulraum der Äquivalenzklassen äquivarianter minimaler isometrischer Immersionen bezeichnet wird. Die Konstruktion von Mashimo ist ja für alle isotypischen Darstellungen einer kompakten Liegruppe möglich, der Satz 7.5 behandelt aber nur den Spezialfall der über $\mathbb{C}$ irreduziblen Darstellungen von $S_V = \mathbf{SU}_2R$. Im folgenden wird gezeigt, daß alle Moduli $\tilde{G} \in \mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ durch eine minimale isometrische Immersion von $S_V = \mathbf{SU}_2R$ als Orbit einer isotypischen Darstellung repräsentiert werden können und alle Äquivalenzklassen äquivarianter minimaler isometrischer Immersionen von $S_V = \mathbf{SU}_2R$ auch in $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ liegen. Analog korrespondieren die Moduli in $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ zu den minimalen isometrischen Immersionen der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2L$ als Orbiten in isotypischen Darstellungen der $\mathbf{SU}_2L$.

Den allgemeinen Fall einer isotypischen Darstellung der Gruppe $\mathbf{SU}_2R$ über $\mathbb{R}$ stellt dabei im wesentlichen bereits die orthogonale Summe $(\mathrm{Sym}^kR)^{\oplus m}$ mit $m \geq 1$ dar, denn jede andere isotypische Darstellung läßt sich nach Wahl eines $\mathbf{SU}_2R$–invarianten Skalarprodukts isometrisch und $\mathbf{SU}_2R$–äquivariant in eine solche orthogonale Summe einbetten. Ein allgemeiner Vektor $\psi_{R,\oplus} = \psi_{R,1} \oplus \ldots \oplus \psi_{R,m}$ aus $(\mathrm{Sym}^kR)^{\oplus m}$ der Länge $\sum_{\nu=1}^{m} \omega(\psi_{R,\nu}, J\psi_{R,\nu}) = 1$ induziert wir zuvor auf der Liealgebra $\mathfrak{su}_2R$ die symmetrische Bilinearform

$$\langle X,\, Y\rangle := \mathrm{Re}\,\omega_\oplus(X\psi_{R,\oplus}, YJ\psi_{R,\oplus}) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m}\Big(\omega(X\psi_{R,\nu}, YJ\psi_{R,\nu}) \;+\; (-1)^k\omega(XJ\psi_{R,\nu}, Y\psi_{R,\nu})\Big)$$

und $\langle\ ,\ \rangle$ ist genau dann ein biinvariantes und damit positiv definites Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}_2R$, wenn für gerades bzw. ungerades $k$ die Projektion der Summe

$$\tilde{G} \;=\; \frac{k+1}{2}\sum_{\nu=1}^{m}\psi_{R,\nu}\cdot J\psi_{R,\nu} \qquad\text{bzw.}\qquad \tilde{G} \;=\; \frac{k+1}{2}\sum_{\nu=1}^{m}\psi_{R,\nu}\wedge J\psi_{R,\nu}$$

auf $\mathrm{Sym}^4R$ verschwindet. Die im Beweis von Satz 7.5 durchgeführte Rechnung impliziert, daß $\tilde{G}$ tatsächlich der Modul einer äquivarianten minimalen isometrischen Immersion der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2R$ mit skalierter Metrik vom Radius $R^2 = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ in eine Sphäre vom Radius $r^2 = k+1$ ist, die die $S_V$ nach der Konstruktion von Mashimo auf den Orbit des Vektors $\sqrt{k+1}\,\psi_{R,\oplus}$ abbildet. Das Bild des Moduls $\tilde{G}$ ist dabei gerade der reelle Unterraum von:

$$\mathrm{Im}\,\tilde{G}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \;=\; \mathrm{Sym}^kL \otimes \mathrm{Spann}\{\psi_{1,R},\, J\psi_{1,R},\, \ldots\,,\, \psi_{m,R},\, J\psi_{m,R}\,\}$$

Damit liegen die Moduli $\tilde{G}$ aller äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2R$ in dem Unterkegelschnitt $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ von $\mathcal{M}_k^{(1)}$. Ändert man die Orientierung der Sphäre $S_V$ und wählt die Identifizierung $S_V = \mathbf{SU}_2L$, dann findet man die Moduli der anderen äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen in $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ wieder.

Es stellt sich daher nur die Frage, ob und wie die Moduli $\tilde{G}$ minimaler isometrischer Immersionen in $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ durch äquivariante minimale isometrische Immersionen repräsentiert werden können. Dabei ist etwa jeder Modul $\tilde{G}$ aus $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ ein reelles Element von $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kR$ oder $\Lambda^2\mathrm{Sym}^kR$ in Abhängigkeit von $k$, dessen Projektion auf $\mathrm{Sym}^4R$ verschwindet. Außerdem liegt es in dem affinen Raum $M_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ durch den Modul der Standardmetrik $G$ und $\Lambda \otimes \tilde{G}$ induziert eine positiv semidefinite Bilinearform auf dem reellen

Unterraum von $\mathrm{Sym}^k L^* \otimes \mathrm{Sym}^k R^*$. Um diese Bedingungen an $\tilde{G}$ in eine handliche Form zu bringen, kann man das reelle Element $\tilde{G}$ von $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k R$ bzw. $\Lambda^2\mathrm{Sym}^k R$ zunächst als eine hermitesche Form $\tilde{G}(\cdot, J\cdot)$ auf $\mathrm{Sym}^k R^*$ auffassen. Man kann sich dann leicht davon überzeugen, daß $\Lambda \otimes \tilde{G}$ genau dann eine positiv semidefinite Bilinearform auf dem reellen Unterraum von $\mathrm{Sym}^k L^* \otimes \mathrm{Sym}^k R^*$ induziert, wenn diese hermitesche Form positiv semidefinit auf $\mathrm{Sym}^k R^*$ ist.

Wenn nun $k$ gerade ist, dann ist die Einschränkung dieser hermiteschen Form auf den reellen Unterraum von $\mathrm{Sym}^k R^*$ eine positiv semidefinite Bilinearform und hat nach dem Trägheitssatz von Sylvester eine Darstellung der Form

$$\tilde{G} \;=\; \frac{k+1}{2}\sum_{\nu=1}^{m} \psi_{R,\nu} \cdot J\psi_{R,\nu}$$

mit reellen, linear unabhängigen $\psi_{R,\nu} = J\psi_{R,\nu}$. Schließlich muß $\tilde{G}$ als Modul auch noch in dem affinen Unterraum durch den Modul $G$ der Standardimmersion liegen, daß heißt seine Projektion auf $\mathbb{C}$ ist 1. Weil diese Projektion im wesentlichen die Spur ist, erfüllt $\tilde{G}$ diese Bedingung genau dann, wenn $\sum_{\nu=1}^{m} \omega(\psi_{R,\nu}, J\psi_{R,\nu}) = 1$ gilt. Deswegen ist $\tilde{G}$ tatsächlich der Modul einer äquivarianten minimalen isometrischen Immersion.

Für ungerades $k$ muß man etwas anders argumentieren, weil kein Analogon des Trägheitssatzes von Sylvester für positiv semidefinite hermitesche Formen wie $\tilde{G}(\cdot, J\cdot)$ auf einem Vektorraum $\mathrm{Sym}^k R^*$ mit quaternionischer Struktur $J$ bekannt ist. Allerdings geht der übliche Induktionsbeweis des Trägheitssatzes mit nur geringen Modifikationen durch und zeigt, daß $\tilde{G} \in \Lambda^2\mathrm{Sym}^k R$ tatsächlich eine Darstellung der Form

$$\tilde{G} \;=\; \frac{k+1}{2}\sum_{\nu=1}^{m} \psi_{R,\nu} \wedge J\psi_{R,\nu}$$

mit sogar über den Quaternionen linear unabhängigen $\psi_{R,\nu}$ besitzt. Auch in diesem Fall liegt $\tilde{G}$ genau dann in dem affinen Unterraum durch den Modul $G$ der Standardimmersion, wenn $\sum_{\nu=1}^{m} \omega(\psi_{R,\nu}, J\psi_{R,\nu}) = 1$ erfüllt ist. Weil die Projektion des Moduls $\tilde{G}$ auf $\mathrm{Sym}^4 R$ verschwindet, definiert jede solche Darstellung wie bereits zuvor einen Mashimo–Vektor $\psi_{R,\oplus} = \psi_{R,1} \oplus \ldots \oplus \psi_{R,m}$, und die minimale isometrische Immersion der Gruppe $S_V = \mathbf{SU}_2 R$ als Orbit von $\psi_{R,\oplus}$ in $(\mathrm{Sym}^k R)^{\oplus m}$ repräsentiert die Äquivalenzklasse des Moduls $G$:

**Korollar 7.9** *(Bilder der Moduli aus $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$)*
*Das Bild einer minimalen isometrischen Immersion, deren Modul in $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ oder $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ liegt, ist eine glatte Untermannigfaltigkeit der Zielsphäre. Tatsächlich ist das Bild einer minimalen isometrischen Immersion mit Modul $\frac{k+1}{2}\sum \psi_{R,\nu} \cdot J\psi_{R,\nu}$ bzw. $\frac{k+1}{2}\sum \psi_{R,\nu} \wedge J\psi_{R,\nu}$ aus $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ der Quotient $S^3/\Gamma$ mit dem Schnitt $\Gamma \subset \mathbf{SU}_2 R$ der Standgruppen der $\psi_{R,\nu}$.*

Es ist nun ziemlich leicht, alle für einen Randpunkt von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ möglichen Ränge zu bestimmen. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß der Modellraum $M_{0,k}^{\text{Mashimo}}$ dieses Unterkegelschnitts in die beiden Unterräume $M_{0,k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{0,k,R}^{\text{Mashimo}}$ zerfällt, die vermöge der Standardmetrik $G$ als Räume von reellen, symmetrischen Endomorphismen auf dem Tensorprodukt $\mathrm{Sym}^k L^* \otimes \mathrm{Sym}^k R^*$ aufgefaßt werden können und dann jeweils nur auf einem der beiden Faktoren operieren. Zwei Endomorphismen aus $M_{0,k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $M_{0,k,R}^{\text{Mashimo}}$ kommutieren also stets, und sind deswegen gleichzeitig diagonalisierbar:

**Satz 7.10** *(Korang eines Randpunkts von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$)*
*Der Korang jedes Randpunkts $\tilde{G} \in \partial\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ ist das Produkt eines Tupels $(n_L, n_R)$ von natürlichen Zahlen $n_L$, $n_R$ aus der Menge $\{1, 2, 3, 5\}$ für $k = 4$, aus $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ für gerades $k \geq 6$ und aus $\{2, 4, \ldots, k+1\}$ für ungerades $k \geq 5$, wobei $n_L$ und $n_R$ nicht gleichzeitig gleich $k+1$ gewählt werden dürfen. Jeder dieser Werte wird tatsächlich auch durch geeignete Randpunkte realisiert.*

**Beweis:** Der Korang des von der Standardmetrik $G$ in Richtung $G_0 \in M_{0,k}^{\text{Mashimo}}$ liegenden Randpunkts wird durch die Multiplizität des kleinsten Eigenwerts von $G_0$ bezüglich $G$ bestimmt. Wenn $G_0$ also in die Summe $G_{0,L} + G_{0,R}$ zweier kommutierender Endomorphismen auf jeweils einem der beiden Tensorfaktoren von $\operatorname{Sym}^k L^* \otimes \operatorname{Sym}^k R^*$ zerfällt, dann sind die gemeinsamen Eigenräume von $G_{0,L}$ und $G_{0,R}$ und damit auch die Eigenräume von $G_0$ gerade die Tensorprodukte der Eigenräume von $G_{0,L}$ auf $\operatorname{Sym}^k L^*$ und von $G_{0,R}$ auf $\operatorname{Sym}^k R^*$. Deshalb ist der Korang des in Richtung $G_0$ liegenden Randpunkts das Produkt der Dimensionen der Eigenräume zum kleinsten Eigenwert von $G_{0,L}$ und $G_{0,R}$. Nach Definition sind die Endomorphismen in den beiden Unterräumen $M_{0,k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $M_{0,k,R}^{\text{Mashimo}}$ jeweils spurfrei auf $\operatorname{Sym}^k L^*$ bzw. $\operatorname{Sym}^k R^*$. Also kann etwa die Dimension des kleinsten Eigenwerts von $G_{0,L}$ ausschließlich für $G_{0,L} = 0$ gerade $k+1$ sein. Deshalb muß das Tupel $(k+1, k+1)$ in der Formulierung dieses Satzes explizit ausgenommen werden, denn es kann nur durch $G_{0,L} = 0 = G_{0,R}$ und damit $G_0 = 0$ realisiert werden, wozu aber kein Randpunkt von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ gehört.

Unter der vollen orthogonalen Gruppe $\mathbf{O}\, V$ sind die beiden Unterräume $M_{0,k,L}$ und $M_{0,k,R}$ nun zueinander konjugiert, so daß es genügt, die möglichen Dimensionen für den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert etwa von $G_{0,R}$ zu bestimmen. Als reeller Endomorphismus von $\operatorname{Sym}^k R^*$ kommutiert $G_{0,R}$ per Definition mit der Fortsetzung der quaternionischen Struktur $J$ auf $\operatorname{Sym}^k R^*$. Solange $k$ gerade ist, hat das keine Konsequenzen, in diesem Fall existiert für $\operatorname{Sym}^k R^*$ einfach eine reelle Basis von Eigenvektoren, aber für ungerade $k$ müssen alle Eigenwerte von $G_{0,R}$ gerade Vielfachheit besitzen.

Also kann es für den Unterkegelschnitt $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ nur Randpunkte mit den behaupteten Rängen geben, wenn man einmal von dem Spezialfall $k = 4$ absieht, der erst in Kapitel 8 eingehend behandelt wird. Um zu zeigen, daß alle diese Möglichkeiten auch von geeigneten Randpunkten von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ realisiert werden, betrachte man zuerst den Fall, daß $k \geq 6$ gerade ist. Dann gibt es in $\operatorname{Sym}^k R$ ein reelles, normiertes Mashimo–Polynom $\psi_R = J\psi_R$, dessen Orbit unter $\mathbf{SU}_2 R$ den reellen Unterraum von $\operatorname{Sym}^k R$ aufspannt. Mit $\psi_R$ sind auch alle $\gamma\psi_R$ mit $\gamma \in \mathbf{SU}_2 R$ Mashimo–Polynome, so daß man sogar eine reelle Basis $\{\psi_{R,\nu}\}$ von $\operatorname{Sym}^k R$ bestehend aus normierten Mashimo–Polynomen findet. Dann ist

$$\tilde{G} = \frac{k+1}{2m} \sum_{\nu=1}^{m} \psi_{R,\nu} \cdot J\psi_{R,\nu}$$

für jedes $1 \leq m \leq k$ ein Randpunkt von $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ mit dem gewünschten Rang, denn sein Bild ist gerade der $m(k+1)$–dimensionale reelle Unterraum von $\operatorname{Sym}^k L \otimes \operatorname{Spann}\{\psi_{R,1}, \ldots, \psi_{R,m}\}$. Tatsächlich ist $\tilde{G}$ ein sehr spezieller Randpunkt von $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$, nämlich das Baryzentrum eines Simplexes in $\partial\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$, der durch die Moduli $\frac{k+1}{2}\psi_{R,\nu} \cdot J\psi_{R,\nu}$ mit $1, \ldots, m$ aufgespannt wird. Schließlich wird man kaum erwarten können, zu allen Moduli aus $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ eine Darstellung der Form $\frac{k+1}{2}\sum \psi_{R,\nu} \cdot J\psi_{R,\nu}$ zu finden, in der die Projektion jedes einzelnen Summanden $\psi_{R,\nu} \cdot J\psi_{R,\nu}$ auf $\mathrm{Sym}^4 R$ schon verschwindet.

Um das Argument auf die ungeraden $k$ zu übertragen, muß man lediglich $\mathrm{Sym}^k R$ als quaternionischen Vektorraum auffassen, und aus dem Orbit eines normierten Mashimo–Polynoms $\psi_{R,\nu}$ eine quaternionische Basis $\{\psi_{R,\nu}\}$ von $\mathrm{Sym}^k R$ auswählen. Ein Randpunkt $\tilde{G}$ mit dem gewünschten Korang ist dann wie zuvor gegeben durch:

$$\tilde{G} = \frac{k+1}{2m}\sum_{\nu=1}^{m} \psi_{R,\nu} \wedge J\psi_{R,\nu} \qquad \square$$

**Bemerkung 7.11** *(Struktur des Randes von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$)*
*Der Beweis zeigt insbesondere auch, daß jeder Randpunkt von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ sich schreiben läßt als Summe $G+tG_{0,L}+(1-t)G_{0,R}$, $0 \le t \le 1$, der Standardmetrik $G$ und zweier kommutierender Endomorphismen $G_{0,L} \in M_{0,k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $G_{0,R} \in M_{0,k,R}^{\text{Mashimo}}$ mit jeweils kleinstem Eigenwert $-1$. Wenn $0 < t < 1$ ist, dann sind $G_{0,L}$ und $G_{0,L}$ dadurch eindeutig bestimmt. Die Randpunkte der Form $G+tG_{0,L}+(1-t)G_{0,R}$ mit $0 < t < 1$ liegen nun aber auf der Verbindungsstrecke der beiden Randpunkte $G+G_{0,L}$ und $G+G_{0,R}$, so daß der Rand von $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ eine geometrische Realisierung der topologischen Union der Ränder von $\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$ ist:*

$$\partial\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}} \;=\; \partial\mathcal{M}_{k,L}^{\text{Mashimo}} * \partial\mathcal{M}_{k,R}^{\text{Mashimo}}$$

Der Beweis von Satz 7.10 ist im Fall $k = 4$ unvollständig, weil das angegebene Argument lediglich zeigt, daß der Korang eines Randpunkts $G \in \partial\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ das Produkt von zwei Zahlen $n_L$ und $n_R$ aus einer wohldefinierten Teilmenge von $\{1, \ldots, 5\}$ ist. Diese Teilmenge wird erst in Kapitel 8 bestimmt, wo auf die Randstruktur dieses speziellen Falls sehr viel genauer eingegangen wird. Das Ergebnis aus Satz 7.10 und Bemerkung 7.11 findet sich für $k = 4$ nebst einer näheren Beschreibung dieses Randes schon in Toth–Ziller [T&Z].

Alle äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen der dreidimensionalen Sphäre $S_V$ zum $k$–ten Eigenwert gehen somit in Zielsphären der Dimension mindestens $k$ bzw. $2k+1$, je nachdem ob $k$ gerade oder ungerade ist, und der Satz 7.10 könnte zu der Vermutung verleiten, daß die nicht äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen nicht nur als Abbildungen schwieriger zu verstehen sind, sondern stets in Sphären vergleichsweise hoher Dimension gehen. Allerdings zeigen die oben angesprochenen Beispiele äquivarianter minimaler isometrischer Immersionen mit flachen Deformationen, daß dies so nicht richtig sein kann:

**Bemerkung 7.12** *(Jenseits der äquivarianten Immersionen)*
*Zumindest für gewisse gerade $k$ sind die minimalen isometrischen Immersionen der dreidimensionalen Sphäre $S_V$, deren Zielsphären die kleinstmögliche Dimension besitzen, keine äquivarianten minimalen isometrischen Immersionen. Das zeigt, daß es in dem jenseits des Unterkegelschnitts $\mathcal{M}_k^{\text{Mashimo}}$ weitgehend unbekannten Modulraum $\mathcal{M}_k^{(1)}$ der minimalen isometrischen Immersionen noch einiges zu entdecken gibt.*

# Kapitel 8

# Der Satz von Moore und der Modulraum $\mathcal{M}_{\lambda_4}$ der $S^3$

Der Satz von Moore bestimmt eine untere Schranke für die Dimension der Zielsphären aller minimalen isometrischen Immersion der Sphäre $S^{n-1}$ in Sphären $S_W \subset W$. Der Ausgangspunkt dieses Arguments sind die Gaußgleichungen

$$\langle R_{X,Y}Z,\, U\rangle \;=\; \langle \mathrm{I\!I}_W(X,U),\, \mathrm{I\!I}_W(Y,Z)\rangle \;-\; \langle \mathrm{I\!I}_W(X,Z),\, \mathrm{I\!I}_W(Y,U)\rangle$$

die man als affin lineare Bedingung an den Modul $\langle \mathrm{I\!I}_W,\, \mathrm{I\!I}_W\rangle$ der zweiten Fundamentalform $\mathrm{I\!I}_W$ in jedem Punkt interpretieren kann. In diesem Sinne ist der Modul der zweiten Fundamentalform ein Element eines Kegelschnitts, der im allgemeinen vom betrachteten Punkt $p \in N$ abhängt. Auf den Sphären sind alle diese Kegelschnitte isomorph, und mit Hilfe eines Ergebnisses von Cartan kann man die Frage nach dem möglichen Rang eines Randpunkts vollständig beantworten.

Dadurch erhält man sofort eine punktweise untere Abschätzung für die Dimension des Bildes der zweiten Fundamentalform $\mathrm{I\!I}$. Die noch etwas bessere Abschätzung des Satzes von Moore erzielt man, indem man auch die Ableitungen der Fundamentalform mit in Betracht zieht. Interessanterweise hat nun der Kegelschnitt der Lösungen der Gaußgleichungen selbst eine Interpretation als Unterkegelschnitt $\mathcal{M}^{\mathit{Mashimo}}_{4,L} \cong \mathcal{M}^{\mathit{Mashimo}}_{4,R}$ des Modulraums $\mathcal{M}_{\lambda_4}$ der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert. Infolgedessen induziert das angesprochene Ergebnis von Cartan die Starrheit von Immersionen der $S^3$ in die $S^9$ zu diesem Eigenwert. Im Anschluß daran werden die minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ in die $S^{14}$ zum selben Eigenwert klassifiziert. Dieses Ergebnis interessiert besonders wegen des Zusammenhangs mit den zweiten Fundamentalformen allgemeiner minimaler isometrischer Immersionen der $S^3$.

## 8.1 Der Kegelschnitt der zweiten Fundamentalformen

**Definition 8.1** *(Überkreuzen von Tensorfaktoren)*
*Durch kreuzweise Vertauschung von Tensorfaktoren kann man einer symmetrischen Bilinearform $G$ auf der zweiten symmetrischen Potenz* $\mathrm{Sym}^2 V$ *eines Vektorraums $V$ eine symme-*

*trische Bilinearform $G^\times$ auf der zweiten äußeren Potenz $\Lambda^2 V$ zuordnen vermöge der Formel:*

$$G^\times(X \wedge Y, Z \wedge U) \;:=\; G(XZ, YU) - G(XU, YZ) \qquad X,\, Y,\, Z \text{ und } U \in V$$

*Dieses Überkreuzen definiert eine lineare Abbildung* $\times : \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^2 V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^2\Lambda^2 V^*$*, die verknüpft mit der symmetrischen Multiplikation* $\mathrm{Sym}^2 V^* \times \mathrm{Sym}^2 V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^2 V^*$ *auch unter dem Namen Nomizu–Kulkarni–Produkt bekannt ist.*

Diese lineare Abbildung ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv. Tatsächlich ist ihr Bild gerade der Raum der Lösungen der ersten Bianchi–Identität in $\mathrm{Sym}^2\Lambda^2 V^*$ und Kern und Kokern werden vollständig durch die exakte „Symbolsequenz der Riemannschen Geometrie" beschrieben:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sym}^4 V^* \xrightarrow{\;\Delta\;} \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^2 V^* \xrightarrow{\;\times\;} \mathrm{Sym}^2\Lambda^2 V^* \xrightarrow{\;\wedge\;} \Lambda^4 V^* \longrightarrow 0$$

Es sei an dieser Stelle darauf verzichtet, den Beweis für die Exaktheit zu führen. Es ist nämlich einfach, sich davon zu überzeugen, daß diese Sequenz ein Komplex ist, zu dem man explizit eine Nullhomotopie konstruieren kann. Man vergleiche diese exakte Sequenz aber mit Bemerkung 4.18.

Stattdessen sei lieber ein besonders wichtiges Beispiel berechnet. Ist $N$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann zerfällt die $\mathbf{SO}\,T_pN$–Darstellung $\mathrm{Sym}^2 T_p^*N = \mathbb{R}g \oplus H^2 T_p^*N$ in zwei irreduzible Summanden, während $\Lambda^2 T_p^*N$ zumindest für $\dim N > 4$ irreduzibel ist. Also müssen die nach dem Lemma von Schur zwei linear unabhängigen, invarianten, symmetrischen Bilinearformen in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^2 T_p^*N$ beide auf ein Vielfaches der eindeutigen, invarianten Bilinearform in $\mathrm{Sym}^2\Lambda^2 T_p^*N$ abgebildet werden. Genauer gilt für die spezielle Wahl dieser beiden Bilinearformen

$$\begin{aligned} G\;(XY, ZU) &:= g(X,Z)g(Y,U) + g(X,U)g(Y,Z) - \frac{2}{\dim N} g(X,Y)g(Z,U) \\ g\otimes g(XY, ZU) &:= g(X,Y)g(Z,U) \end{aligned}$$

die Gleichung:

$$(g\otimes g)^\times(X\wedge Y, Z\wedge U) \;=\; g(X,Z)g(Y,U) - g(X,U)g(Y,Z) \;=\; -\frac{\dim N}{\dim N + 2} G^\times(X\wedge Y, Z\wedge U)$$

Man beachte, daß $G + \frac{2}{\dim N} g\otimes g$ und $(g\otimes g)^\times$ die üblichen Fortsetzungen von $g$ auf $\mathrm{Sym}^2 T_pN$ bzw. $\Lambda^2 T_pN$ sind. Infolgedessen ist $G$ die Standardmetrik auf dem Unterraum $H^2 T_pN$ von $\mathrm{Sym}^2 T_pN$, denn der kometrische Tensor $g^{-1}$ liegt in $\mathrm{Kern}\, G$. Betrachtet man nun eine isometrische Immersion $\phi : N \longrightarrow S_W \subset W$ in die Sphäre vom Radius $r$ eines euklidischen Vektorraums $W$, so zerfällt die zweite Fundamentalform $\mathrm{I\!I}_W$ von $\phi$ als Immersion in den Vektorraum $W$ wie im Beweis des Lemmas 2.1 von Takahashi in die Summe $\mathrm{I\!I}_W = \mathrm{I\!I} - \frac{1}{r^2} g\otimes\phi$ der zweiten Fundamentalform $\mathrm{I\!I}$ als Immersion in die $S_W$ und einen radialen Teil $-\frac{1}{r^2} g\otimes\phi$. Damit kann man die Gaußgleichungen für den Krümmungstensor von $N$ im Punkt $p$ schreiben als:

$$\begin{aligned} g(R_{X,Y}Z, U) &= -\,\langle \mathrm{I\!I}_W,\, \mathrm{I\!I}_W\rangle^\times(X\wedge Y, Z\wedge U) \\ &= -\,\langle \mathrm{I\!I},\, \mathrm{I\!I}\rangle^\times(X\wedge Y, Z\wedge U) \;-\; \frac{1}{r^2}(g\otimes g)^\times(X\wedge Y, Z\wedge U) \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist dies eine affin lineare Zwangsbedingung an den Modul der zweiten Fundamentalform, das heißt der Modul der zweiten Fundamentalform einer isometrischen Immersion in eine Sphäre ist in jedem Punkt $p \in N$ ein Element eines Kegelschnitts in $P^+\mathrm{Sym}^2 T_p^* N$. Gemäß der Symbolsequenz der Riemannschen Geometrie sind alle diese Kegelschnitte nach dem Raum $M_0 = \Delta\mathrm{Sym}^4 T_p^* N \subset \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^2 T_p^* N$ modelliert. Allerdings hängt die Struktur dieser Kegelschnitte auch vom Krümmungstensor von $N$ im betrachteten Punkt $p$ ab. Dabei kann es natürlich passieren, daß der Kegelschnitt nicht mehr reduziert und der tatsächliche Parameterraum seiner Reduktion nur ein Unterraum von $\mathrm{Sym}^4 T_p^* N$ ist.

Nun muß die zweite Fundamentalform einer minimalen isometrischen Immersion in eine Sphäre außerdem noch spurfrei sein, daß heißt der Kern ihres Moduls $\langle \mathrm{II}, \mathrm{II} \rangle$ enthält den kometrischen Tensor $g^{-1} \in \mathrm{Sym}^2 T_p N$. Das gleiche gilt dann auch für die Differenz $\Delta\psi$ zweier Lösungen. Diese Bedingung an $\Delta\psi$ ist aber gleichbedeutend damit, daß $\psi \in \mathrm{Sym}^4 T_p^* N$ harmonisch ist. Der Unterkegelschnitt aller Moduli zweiter Fundamentalformen minimaler isometrischer Immersionen ist demzufolge modelliert nach:

$$M_0^{\mathit{minimal}} \;=\; \Delta\mathrm{Sym}^4 T_p^* N \cap \mathrm{Sym}^2 H^2 T_p^* N \;=\; \Delta H^4 T_p^* N$$

Wenn die Riemannsche Mannigfaltigkeit $N$ selbst die $n-1$–dimensionale runde Sphäre $S^{n-1}$ ist, dann können diese beiden Kegelschnitte völlig explizit hingeschrieben werden. Offensichtlich nämlich kann die $S^{n-1}$ in sich selbst totalgeodätisch eingebettet werden, weshalb ihr Krümmungstensor von der Form $-(g \otimes g)^\times$ sein muß. Der Kegelschnitt aller Moduli zweiter Fundamentalformen isometrischer Immersionen ist dann die Menge der positiv semidefiniten Lösungen $\langle \mathrm{II}, \mathrm{II} \rangle$ der Gleichungen

$$\langle \mathrm{II}, \mathrm{II} \rangle^\times \;=\; (1 - \frac{1}{r^2})(g \otimes g)^\times$$

das heißt der Kegelschnitt $(1 - \frac{1}{r^2}) g \otimes g + \Delta\mathrm{Sym}^4 T_p^* S^{n-1} \cap P^+\mathrm{Sym}^2 T_p^* S^{n-1}$. Zumindest für $r < 1$ enthält der Unterkegelschnitt der Moduli zweiter Fundamentalformen minimaler isometrischer Immersionen nach der vorangegangenen Rechnung ein positives Vielfaches von $G$ von maximalem Rang, ist also der reduzierte Kegelschnitt:

$$P^+\mathrm{Sym}_0^2 T_p^* S^{n-1} \;\cap\; (\frac{1}{r^2} - 1)\frac{n-1}{n+1} G + \Delta H^4 T_p^* S^{n-1}$$

Der positive Vorfaktor spielt keine Rolle bei der weiteren Beschreibung der Geometrie dieses Kegelschnitts. Für den Rest dieses Kapitels wird daher nur der Kegelschnitt $M = G + \Delta H^4 V^*$ in $\mathrm{Sym}^2 H^2 V^*$ für euklidische Vektorräume $V$ und die Standardmetrik $G$ auf $H^2 V$ betrachtet.

Übrigens stellt die Bedingung $r < 1$ nur scheinbar eine Einschränkung dar, denn wie man sich leicht überlegt gibt es keine positiv semidefinite, spurfreie Lösung $\langle \mathrm{II}, \mathrm{II} \rangle$ der Gaußgleichungen für $r > 1$ und nur die triviale Lösung $\langle \mathrm{II}, \mathrm{II} \rangle = 0$ im Falle $r = 1$. Alternativ kann man mit Hilfe des Lemmas 2.1 von Takahashi folgern, daß die zum $k$–ten Eigenwert $\lambda_k$ assoziierten minimalen isometrischen Immersionen in eine Sphäre vom Radius $r^2 = \frac{\dim S^{n-1}}{\lambda_k} = \frac{n-1}{k(n+k-2)}$ gehen, so daß nur die zur Identität $\mathrm{id} : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ äquivalenten minimalen isometrischen Immersionen zum ersten Eigenwert die Bedingung $r < 1$ verletzen.

## 8.2 Der Beweis der Sätze von Cartan und Moore

Die Definition der Bilder und Kerne symmetrischer Bilinearformen aus Kapitel 6 kann auf naheliegende Weise zur Definition der höheren Bilder und Kerne eines beliebigen homogenen Polynoms verallgemeinert werden, denn die Komultiplikation $\Delta$ erlaubt es stets, ein vorgegebenes Polynom $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$ mit $\Delta\psi \in \mathrm{Sym}^d V^* \otimes \mathrm{Sym}^{k-d} V^*$ auch als Homomorphismus $\Delta\psi : \mathrm{Sym}^d V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-d} V^*$ aufzufassen, der etwa $v_1 \cdot \ldots \cdot v_d$ nach $v_d \lrcorner \ldots v_1 \lrcorner \psi$ schickt. Demnach sind die höheren Bilder und Kerne von $\psi$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}^{(d)}\psi &:= \{\mathfrak{V} \in \mathrm{Sym}^d V : \mathfrak{V}\lrcorner\psi = 0\} \\ \mathrm{Im}^{(k-d)}\psi &:= \{\mathfrak{V}\lrcorner\psi : \mathfrak{V} \in \mathrm{Sym}^d V\} \\ &= \mathrm{Spann}\{v_1\lrcorner \ldots v_d\lrcorner\psi : v_1, \ldots, v_d \in V\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathrm{Im}^{(k-d)}\psi$ der kleinste Unterraum von $\mathrm{Sym}^{k-d}V^*$, für den $\Delta\psi$ bereits in $\mathrm{Sym}^d V^* \otimes \mathrm{Im}^{(k-d)}\psi$ und deshalb sogar in $\mathrm{Im}^{(d)}\psi \otimes \mathrm{Im}^{(k-d)}\psi$ liegt. Folglich ist $\mathrm{Kern}^{(d)}\psi$ der Annihilator von $\mathrm{Im}^{(d)}\psi$ in $\mathrm{Sym}^d V$ und $\psi$ induziert selbst einen kanonischen Isomorphismus:

$$\Delta\psi : (\mathrm{Im}^{(d)}\psi)^* \cong \mathrm{Sym}^d V/_{\mathrm{Kern}^{(d)}\psi} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}^{(k-d)}\psi$$

**Bemerkung 8.2** *(Interpretation des Bilds* $\mathrm{Im}^{(1)}\psi$*)*
*Nach Definition ist der Annihilator* $\mathrm{Kern}^{(1)}\psi$ *von* $\mathrm{Im}^{(1)}\psi$ *der Unterraum aller* $v \in V$*, für die gemäß Korollar A.3 die partielle Ableitung* $v\lrcorner\psi$ *in Richtung* $v$ *überall auf* $V$ *verschwindet. Somit ist* $\psi$ *als Polynom konstant auf Hyperbenen parallel zu* $\mathrm{Kern}^{(1)}\psi$ *und stammt eigentlich von einem Polynom auf* $V/\mathrm{Kern}^{(1)}\psi$ *her. Insofern kann man* $\mathrm{Im}^{(1)}\psi$ *auch als den kleinsten Unterraum von* $V^*$ *definieren, für den* $\psi$ *im Bild der Inklusion* $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Im}^{(1)}\psi \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V^*$ *liegt. Ähnliche Interpretationen gibt es für höhere Bilder nicht.*

Im folgenden betrachtet man speziell homogene Polynome $\psi \in \mathrm{Sym}^{2k}V^*$ von geradem Grad, für die die induzierten symmetrischen Bilinearformen $\Delta\psi \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^k V^*$ positiv semidefinit sind. Diese Polynome sind automatisch konvex, werden dadurch aber nicht hinreichend charakterisiert. Beispiele für diese Polynome findet man für alle $k \geq 1$ mit einem Ansatz der Form $\psi = \sum \frac{1}{(2k)!}\alpha_\nu^{2k}$ mit beliebigen $\alpha_\nu \in V^*$. Das Klassifikationsergebnis 8.4 von Cartan besagt im wesentlichen, daß alle Polynome $\psi$ mit $\Delta\psi \geq 0$ und der zusätzlichen Eigenschaft $\dim \mathrm{Im}^{(k)}\psi = \dim \mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ bereits von dieser Form sind. Zwecks weiterer Verwendung sei der genauen Formulierung jedoch noch eine allgemeine Schlußweise vorangestellt, die mit großer Regelmäßigkeit benutzt und ständig neu abgeleitet wird, sich aber selten explizit formuliert findet:

**Lemma 8.3** *(Lemma von Guillemin [BCGGG])*
*Ein linearer Unterraum* $\mathcal{A} \subset V^* \otimes W$ *von Homomorphismen von* $V$ *nach* $W$ *induziert für jeden Vektor* $v \in V$ *eine exakte Sequenz, die* $\mathcal{A}$ *mit dem Bild* $\mathcal{A}v \subset W$ *von* $v$ *unter* $\mathcal{A}$ *und dem entsprechenden Annihilator* $\mathrm{Ann}_v\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} : Av = 0\}$ *in Beziehung setzt:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ann}_v\mathcal{A} \xrightarrow{\subset} \mathcal{A} \xrightarrow{v} \mathcal{A}v \longrightarrow 0$$

*Die nach unten halbstetige, $\mathbb{Z}$–wertige Funktion* $\dim \mathcal{A}v$ *nimmt auf einer Zariski–offenen Teilmenge von* $V$*, der Menge der regulären Vektoren, ihr Maximum an. Für jeden regulären Vektor* $v$ *und alle* $\tilde{v} \in V$ *gilt:*

$$(\mathrm{Ann}_v\mathcal{A})\tilde{v} \;\subset\; \mathcal{A}v$$

**Beweis:** Mit $v \in V$ sind auch alle Vektoren nahe $v$ regulär, so daß $\epsilon \longmapsto \mathcal{A}(v + \epsilon\tilde{v})$ für genügend kleine $\epsilon$ eine glatte Kurve in der Graßmannschen aller $\dim \mathcal{A}v$–dimensionalen Unterräume von $W$ ist. Für jedes $\epsilon \neq 0$ gilt nun $(\mathrm{Ann}_v\mathcal{A})\tilde{v} \;=\; (\mathrm{Ann}_v\mathcal{A})(v+\epsilon\tilde{v}) \;\subset\; \mathcal{A}(v+\epsilon\tilde{v})$, so daß diese Inklusion auch noch für $\epsilon = 0$ bestehen muß. $\square$

**Satz 8.4** *(Klassifikationsergebnis von Cartan [Car])*
*Sei* $\psi \in \mathrm{Sym}^{2k}V^*$ *ein homogenes Polynom vom Grad* $2k$ *auf* $V$*, für das* $\Delta\psi \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$ *positiv semidefinit ist. Dann gilt* $\dim \mathrm{Im}^{(k)}\psi \geq \dim \mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ *und im Falle der Gleichheit zudem*

$$\psi \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{(2k)!}\alpha_\nu^{2k} \qquad\qquad \alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_m \in V^*$$

*mit bis aufs Vorzeichen eindeutigen* $\alpha_\nu$*, deren Potenzen* $\alpha_\nu^{k-1}$ *eine Basis von* $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ *sind.*

**Beweis:** Der Beweis folgt dem ursprünglichen Beweis von Cartan [Car] wie er auch in Moore [Mo] erscheint mit veränderter Notation. Zunächst ist $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ nach Definition der kleinste Unterraum von $\mathrm{Sym}^{k-1}V^*$, für den man $\Delta\mathrm{Im}^{(k)}\psi \subset V^* \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}V^*$ schon als linearen Raum von Homorphismen von $V$ nach $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ auffassen kann. In diesem Sinne ist $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ gerade der Spann der Bilder aller Homomorphismen in $\Delta\mathrm{Im}^{(k)}\psi$.

Im ersten Schritt wird nun gezeigt, daß für einen regulären Vektor $v \in V$ zu $\Delta\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ die Abbildung $v\lrcorner : \mathrm{Im}^{(k)}\psi \longrightarrow \mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ surjektiv ist. Der vorangegangenen Bemerkung zufolge reicht es dazu zu zeigen, daß für jeden Vektor $\tilde{v} \in V$ bereits $\tilde{v}\lrcorner\mathrm{Im}^{(k)}\psi \subset v\lrcorner\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ gilt. Weil $\Delta\psi \in \mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^kV^*$ positiv semidefinit auf $\mathrm{Sym}^kV$ ist, gibt es nach Korollar 6.5 ein eindeutiges „orthogonales“ Komplement $K$ von $\mathrm{Ann}_v\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ in $\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ mit:

$$\Delta\psi \;\in\; \mathrm{Sym}^2\mathrm{Ann}_v\mathrm{Im}^{(k)}\psi \oplus \mathrm{Sym}^2K$$

Nun benutzt man ein typisches Tensorargument. Der Summand aus $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Ann}_v\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ fällt bei Kontraktion mit $v$ sicherlich weg, so daß es nach dem Trägheitssatz von Sylvester eine Basis $\psi_1, \ldots, \psi_m$ von $K$ gibt mit:

$$(\tilde{v}\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} \tilde{v}\lrcorner\psi_\nu \otimes v\lrcorner\psi_\nu$$

Die im Anhang A näher erläuterte Eigenschaft $(v\lrcorner \otimes 1)\Delta\psi = \Delta(v\lrcorner\psi) = (1 \otimes v\lrcorner)\Delta\psi$ der Komultiplikation $\Delta$ impliziert an dieser Stelle, daß $(\tilde{v}\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi = \Delta(\tilde{v}\lrcorner v\lrcorner\psi)$ jedenfalls eine symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Sym}^{k-1}V$ ist. Nach Definition ist $v\lrcorner$ auf $K$ aber injektiv, so daß die $v\lrcorner\psi_\nu$ genau wie die $\psi_\nu$ immer noch linear unabhängig sind. Deshalb ist das Bild der symmetrischen Bilinearform $(\tilde{v}\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi$ einerseits der Spann $\tilde{v}\lrcorner K$ der $\tilde{v}\lrcorner\psi_\nu$, andererseits aber auch enthalten im Spann $v\lrcorner K$ der $v\lrcorner\psi_\nu$.

Zusätzlich gilt für den regulären Vektor $v$ dem Lemma 8.3 von Guillemin zufolge sowieso schon die Inklusion $\tilde{v}\lrcorner\mathrm{Ann}_v\mathrm{Im}^{(k)}\psi \subset v\lrcorner\mathrm{Im}^{(k)}\psi$, zusammengenommen folgt daraus $\tilde{v}\lrcorner\mathrm{Im}^{(k)}\psi \subset v\lrcorner\mathrm{Im}^{(k)}\psi$. Die Abbildung $v\lrcorner : \mathrm{Im}^{(k)}\psi \longrightarrow \mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ ist also surjektiv. Man beachte die subtile Rolle der Bedingung $\Delta\psi \geq 0$ in diesem ersten Schritt. Sie gewährleistet, daß man das Komplement $K$ so wählen kann, daß $\Delta\psi$ keine „gemischten Terme" in $\mathrm{Ann}_v\mathrm{Im}^{(k)}\psi \otimes K$ besitzt. Die Ungleichung $\dim\mathrm{Im}^{(k)}\psi \geq \dim\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ sollte denn auch sehr viel allgemeiner gelten.

Absolut unverzichtbar ist die Bedingung $\Delta\psi \geq 0$ aber für den Beweis der Starrheitsaussage. Unter der Voraussetzung $\dim\mathrm{Im}^{(k)}\psi = \dim\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ induziert jeder regulärer Vektor $v$ zunächst einen Isomorphismus $v\lrcorner$ von $\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ nach $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$. Somit ist die symmetrische Bilinearform $(v\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi$ der kometrische Tensor eines positiv definiten Skalarprodukts auf $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$. Dieses Skalarprodukt kann man folglich auch so charakterisieren, daß eine Basis von $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ der Form $v\lrcorner\psi_1, \ldots, v\lrcorner\psi_m$ mit geeigneten $\psi_\nu \in \mathrm{Im}^{(k)}\psi$ genau dann eine Orthonormalbasis ist, wenn

$$\Delta\psi \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu \otimes \psi_\nu$$

gilt. Zusätzlich ermöglicht der Isomorphismus $v\lrcorner$ die Definition der Endomorphismen

$$L_{\tilde{v}} : \; \mathrm{Im}^{(k-1)}\psi \longrightarrow \mathrm{Im}^{(k-1)}\psi, \;\; v\lrcorner\psi \longmapsto \tilde{v}\lrcorner\psi$$

für alle $\tilde{v} \in V$. Wendet man $L_{\tilde{v}}$ auf einen Faktor des kometrischen Tensors $(v\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi$ an

$$(L_{\tilde{v}} \otimes 1)(v\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi \;=\; (\tilde{v}\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi \;=\; \Delta(\tilde{v}\lrcorner v\lrcorner\psi)$$

so erhält man einen symmetrischen Tensor. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß $L_{\tilde{v}}$ ein symmetrischer Endomorphismus von $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ und folglich diagonalisierbar ist. Geht man noch einen Schritt weiter und wendet zwei dieser symmetrischen Endomorphismen auf je einen der beiden Faktoren des kometrischen Tensors an

$$(L_{\tilde{v}_1} \otimes L_{\tilde{v}_2})(v\lrcorner \otimes v\lrcorner)\Delta\psi \;=\; (\tilde{v}_1\lrcorner \otimes \tilde{v}_2\lrcorner)\Delta\psi \;=\; \Delta(\tilde{v}_1\lrcorner\tilde{v}_2\lrcorner\psi)$$

so erhält man immer noch einen symmetrischen Tensor in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$. Für zwei symmetrische Endomorphismen ist dies aber offensichtlich äquivalent dazu, daß sie kommutieren. Somit gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren $v\lrcorner\psi_\nu$ aller $L_{\tilde{v}}$ mit geeigneten $\psi_\nu \in \mathrm{Im}^{(k)}\psi$. Diese $\psi_\nu$ erfüllen demnach partielle Differentialgleichungen

$$\tilde{v}\lrcorner\psi_\nu \;=\; L_{\tilde{v}}(v\lrcorner\psi_\nu) \;=\; \alpha_\nu(\tilde{v})v\lrcorner\psi_\nu$$

mit gewissen Linearformen $\alpha_\nu \in V^*$, so daß $\mathrm{Im}^{(1)}\psi_\nu = \mathbb{R}\alpha_\nu$ eindimensional ist. Nach Bemerkung 8.2 gilt deshalb nach geeigneter Skalierung der $\alpha_\nu$ bereits $\psi_\nu = \pm\frac{1}{k!}\alpha_\nu^k$. Die obige Charakterisierung des Skalarprodukts auf $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$ lautet dann für die Orthonormalbasis $v\lrcorner\psi_1, \ldots, v\lrcorner\psi_m$:

$$\Delta\psi \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu \otimes \psi_\nu \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{k!}\alpha_\nu^k \otimes \frac{1}{k!}\alpha_\nu^k$$

Infolgedessen gilt $\psi = \sum \frac{1}{(2k)!}\alpha_\nu^{2k}$. Nach Konstruktion sind die $\alpha_\nu^{k-1}$ eine Basis von $\mathrm{Im}^{(k-1)}\psi$. An diesem Beispiel sieht man auch, daß die regulären Vektoren $v$ zu $\Delta\mathrm{Im}^{(k)}\psi$ gerade diejenigen Vektoren aus $V$ sind, die auf keiner der Hyperebenen $\{\alpha_\nu = 0\}$ liegen. □

**Korollar 8.5** *(Punktweise Abschätzung)*
*Die zweite Fundamentalform einer minimalen isometrischen Immersion der $S^{n-1}$ in eine Sphäre vom Radius $r < 1$ nimmt in jedem Punkt $p \in S^{n-1}$ Werte in einem mindestens $(n-2)$–dimensionalen Vektorraum an, denn ihr Modul $\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle \in \mathrm{Sym}^2 H^2 T_p^* S^{n-1}$ in $p$ hat mindestens Rang $n-2$.*

**Beweis:** Die Gaußgleichungen für die isometrischen Immersionen der $S^{n-1}$ kann man nach Abschnitt 8.1 auch in der Form schreiben:

$$\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle^{\times} = (1 - \frac{1}{r^2})(g \otimes g)^{\times}$$

Somit liegt $\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle + (\frac{1}{r^2} - 1)(g \otimes g)$ im Kern von $\times : \mathrm{Sym}^2 \mathrm{Sym}^2 T_p^* S^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 \Lambda^2 T_p^* S^{n-1}$. Gemäß der exakten Symbolsequenz existiert deshalb ein Polynom $\psi \in \mathrm{Sym}^4 T_p^* S^{n-1}$ mit:

$$\Delta\psi \;=\; \langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle + (\frac{1}{r^2} - 1) g \otimes g$$

Weil nach Voraussetzung $r < 1$ gilt, ist $\Delta\psi$ wie $\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle$ positiv semidefinit. Außerdem ist $\mathrm{I\!I}$ die Fundamentalform einer minimalen Immersion, das heißt der kometrische Tensor $g^{-1}$ liegt in Kern $\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle$. Kontrahiert man einmal mit ihm, so folgt $g \in \mathrm{Im}^{(2)}\psi$ und zwangsläufig $\mathrm{Im}^{(1)}\psi = T_p^* S^{n-1}$. Mit Hilfe des Klassifikationsergebnisses 8.4 von Cartan schließt man daraus $\mathrm{Rang}\, \Delta\psi \geq n-1$. Folglich hat $\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle$ mindestens Rang $n-2$. □

Das Klassifikationsergebnis 8.4 besagt aber noch etwas mehr in dem Fall, in dem der Modul der zweiten Fundamentalform im betrachteten Punkt $p \in S^{n-1}$ gerade Rang $n-2$ hat. Nach geeigneter Skalierung findet man dann nämlich eine Basis $\{\alpha_\nu\}$ von $T_p^* S^{n-1}$ mit:

$$\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle + (\frac{1}{r^2} - 1) g \otimes g \;=\; (n-1)(\frac{1}{r^2} - 1)\Delta\psi \;=\; (n-1)(\frac{1}{r^2} - 1) \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2}\alpha_\nu^2 \otimes \frac{1}{2}\alpha_\nu^2$$

Kontrahiert man diese Gleichung mit dem kometrischen Tensor im Kern von $\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle$, dann lautet das Ergebnis:

$$g \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \langle \alpha_\nu, \alpha_\nu \rangle \alpha_\nu^2$$

Diese Gleichheit kann nur bestehen, wenn die $\{\alpha_\nu\}$ eine Orthonormalbasis von $T_p^* S^{n-1}$ bilden. Diese Basis ist eindeutig bis auf Vorzeichen und Permutationen, denn die Quadrate $\frac{1}{2}\alpha_\nu^2$ der $\alpha_\nu$ spannen gerade den Raum $\mathrm{Im}^{(2)}\psi = \mathrm{Im}\, \langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle \oplus \mathbb{R} g$ auf, der keine weiteren Quadrate von Einheitsvektoren mehr enthält. Es gibt eben nicht sehr viele Diagonalmatrizen mit Rang und Spur 1. Deshalb sind alle Moduli zweiter Fundamentalformen mit Rang $n-2$ konjugiert zueinander unter $\mathbf{SO}\, T_p^* S^{n-1}$, und die Standgruppe eines Moduls ist isomorph zur Gruppe $\mathbf{SO}_{n-1}\mathbb{Z}$.

**Bemerkung 8.6** *(Der Kegelschnitt $H^4 V^*$ in $\mathrm{Sym}^2 H^2 V^*$)*
*Insbesondere hat jeder Randpunkt des Kegelschnitts $M = G + \Delta H^4 V^*$ in $\mathrm{Sym}^2 H^2 V^*$ durch die Standardmetrik $G$ von $H^2 V$ mindestens den Rang $\dim V - 1$. Alle Randpunkte mit diesem minimalen Rang sind unter $\mathbf{SO}\, V$ zueinander konjugiert, und ihre Standgruppe in $\mathbf{SO}\, V$ ist isomorph zu $\mathbf{SO}_{\dim V - 1}\mathbb{Z}$.*

Der Normalenraum einer minimalen isometrischen Immersion der Sphäre $S^{n-1}$ in eine Sphäre vom Radius $r < 1$ muß somit mindestens Dimension $n-2$ haben, die Zielsphäre hat also mindestens Dimension $2n-3$. Durch einen Widerspruchsbeweis kann man auch die Zieldimension $2n-3$ ausschließen, indem man neben den „tangentialen" Gaußgleichungen für die zweite Fundamentalform $\mathrm{I\!I}$ der minimalen isometrischen Immersion $\phi : S^{n-1} \longrightarrow S_W \subset W$ auch die Normalkomponente der allgemeineren Gaußgleichungen

$$(\nabla_X \mathrm{I\!I}_W)(Y, Z) \;-\; (\nabla_Y \mathrm{I\!I}_W)(X, Z) \;=\; -(R_{X,Y}Z)\phi$$

für die zweite Fundamentalform $\mathrm{I\!I}_W$ als Immersion in den Vektorraum $W$ in Betracht zieht:

**Satz 8.7** *(Satz von Moore [Mo] [E&R])*
*Es gibt keine minimale isometrische Immersion der $S^{n-1}$, $n \geq 4$, in eine Zielsphäre vom Radius $r < 1$ und der Dimension kleiner als $2n-2$. Infolgedessen gibt es in keinem der Modulräume $\mathcal{M}_{\lambda_k}$ von do Carmo–Wallach einen Randpunkt vom Rang kleiner als $2\dim V - 1$.*

**Beweis:** Aufgrund des Klassifikationsergebnisses 8.4 von Cartan in Form des Korollars 8.5 gibt es jedenfalls keine minimale isometrische Immersion in eine Sphäre vom Radius $r < 1$ und der Dimension kleiner als $2n-3$. Angenommen es gebe nun eine Immersion $\phi : S^{n-1} \longrightarrow S_W$ in eine Sphäre eines euklidischen Vektorraums $W$ mit $\dim W = 2n-2$. Dann erlaubt die Starrheitsaussage aus dem Klassifikationsergebnis den Schluß, daß es in jedem Punkt $p$ eine Orthonormalbasis $\{\alpha_\nu\}$ von $T_p^* S^{n-1}$ gibt mit:

$$\langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle + (\frac{1}{r^2} - 1) g \otimes g \;=\; (n-1)(\frac{1}{r^2} - 1) \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2}\alpha_\nu^2 \otimes \frac{1}{2}\alpha_\nu^2$$

Konkreter formuliert gilt für die duale Orthonormalbasis $\{X_\nu\}$ von $T_p S^{n-1}$ und die zweite Fundamentalform $\mathrm{I\!I}_W = \mathrm{I\!I} - \frac{1}{r^2} g \otimes \phi$ von $\phi$ als Immersion der $S^{n-1}$ in den Vektorraum $W$ wegen $\langle \mathrm{I\!I}_W, \mathrm{I\!I}_W \rangle = \langle \mathrm{I\!I}, \mathrm{I\!I} \rangle + \frac{1}{r^2} g \otimes g$

$$\mathrm{I\!I}_W(X_\nu, X_\mu) \;=:\; \delta_{\nu,\mu}\xi_\nu \qquad\qquad \langle \xi_\nu, \xi_\mu \rangle \;=\; 1 \;+\; \delta_{\nu,\mu}(n-1)(\frac{1}{r^2} - 1)$$

mit den dadurch definierten Normalenvektoren $\{\xi_\nu\}$. Insbesondere sind die $\xi_\nu$ wegen $r < 1$ linear unabhängig und spannen damit den Normalenraum von $\phi_*(T_p S^{n-1})$ in $W$ auf. Infolgedessen kann man $\phi$ als Linearkombination der $\xi_\nu$ darstellen. Tatsächlich besagt die Minimalität von $\phi$ dem Lemma 2.1 von Takahashi zufolge gerade $\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} = \frac{n-1}{r^2}\phi$.

Wie der Modul der zweiten Fundamentalform ist auch $\Delta\psi = \langle \mathrm{I\!I}_W, \mathrm{I\!I}_W \rangle + g \otimes g$ immer eine glatte symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Sym}^2 T_p S^{n-1}$. Wenn ihr zweites Bild $\mathrm{Im}^{(2)}\psi$ und dessen Annihilator $\mathrm{Kern}^{(2)}\psi$ dann konstante Dimensionen $n-1$ bzw. $\frac{n-1}{2}(n-2)$ aufweisen, dann müssen sie schon glatte Vektorunterbündel von $\mathrm{Sym}^2 T_p^* S^{n-1}$ und $\mathrm{Sym}^2 T_p S^{n-1}$ sein. Aber $\mathrm{Kern}^{(2)}\psi$ kann man als Raum von Koniken auf $\mathbb{P}T_p^* S^{n-1}$ auffassen, die sich genau in den $n-1$ Punkten $[\alpha_\nu]$ schneiden, denn die $\alpha_\nu$ sind ja gerade als die bis aufs Vorzeichen einzigen Einheitslinearformen mit $\frac{1}{2}\alpha_\nu^2 \in \mathrm{Im}^{(2)}\psi$ gewählt. Deshalb kann man die $\{\alpha_\nu\}$ und damit auch die duale Basis $\{X_\nu\}$ lokal glatt wählen, und auf den einfach zusammenhängenden Sphären $S^{n-1}$, $n \geq 4$, dann auch global auszeichnen. Für das weitere Argument ist dabei unerheblich, daß allein aus diesem Grund nurmehr die Fälle $n = 4$ und $n = 8$ möglich sind. Stattdessen gilt nach Definition der kovarianten Ableitung der zweiten Fundamentalform:

$$(\nabla_{X_\nu}\mathrm{II}_W)(X_\rho, X_\mu) \;=\; \delta_{\rho,\mu}X_\nu\xi_\rho \;-\; \langle\nabla_{X_\nu}X_\rho,\, X_\mu\rangle\xi_\mu \;-\; \langle X_\rho,\, \nabla_{X_\nu}X_\mu\rangle\xi_\rho$$

Deshalb erzwingen die Gaußgleichungen $(\nabla_X\mathrm{II}_W)(Y,Z) - (\nabla_Y\mathrm{II}_W)(X,Z) \;=\; -(R_{X,Y}Z)\phi$ für drei paarweise verschiedene Indizees $\nu$, $\mu$ und $\rho$ schon das entscheidende Verschwinden von $\langle X_\rho,\, \nabla_{X_\nu}X_\mu\rangle \;=\; 0$. Weil das jedenfalls auch für $\mu = \rho$ richtig ist, gilt für die glatten Funktionen $f^\mu_\nu := \langle\nabla_{X_\nu}X_\mu,\, X_\nu\rangle$ mit $f^\mu_\mu = 0$ dann $\nabla_{X_\nu}X_\mu \;=\; f^\mu_\nu X_\nu$ für $\nu \neq \mu$ und $\nabla_{X_\nu}X_\nu \;=\; -\sum_\mu f^\mu_\nu X_\mu$. Umgekehrt folgt daraus durch Einsetzen für die kovarianten Ableitungen der zweiten Fundamentalform

$$(\nabla_{X_\nu}\mathrm{II}_W)(X_\mu, X_\mu) \;=\; X_\nu\xi_\mu \qquad\qquad (\nabla_{X_\mu}\mathrm{II}_W)(X_\nu, X_\mu) \;=\; -\,f^\nu_\mu\xi_\mu \;+\; f^\nu_\mu\xi_\nu$$

für alle $\nu \neq \mu$. Benutzt man noch einmal die Gaußgleichungen dann erhält man

$$(\nabla_{X_\nu}\mathrm{II}_W)(X_\mu, X_\mu) \;-\; (\nabla_{X_\mu}\mathrm{II}_W)(X_\nu, X_\mu) \;=\; -\,(R_{X_\nu,X_\mu}X_\mu)\phi \;=\; X_\nu\xi_\mu \;-\; f^\nu_\mu(\xi_\nu - \xi_\mu)$$

für alle $\nu \neq \mu$ und schließlich den Widerspruch $\langle X_\nu\xi_\mu,\, \xi_\mu\rangle \;=\; -f^\nu_\mu(n-1)(\frac{1}{r^2} - 1) \;=\; 0$. Nach Voraussetzung ist nämlich $r < 1$ und damit würde diese Gleichung sofort $f^\nu_\mu = 0$ für alle $\nu \neq \mu$ implizieren. Dann müßten die Vektorfelder $X_\nu$ aber schon alle parallel sein. $\square$

## 8.3 Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert

Im Kapitel 7 wurden die Modulräume $\mathcal{M}^{(1)}_k$ der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ eingehend beschrieben. Insbesondere wurden die konkreten Beispiele der minimalen isometrischen Immersionen von Mashimo besprochen. Die Moduli dieser Beispiele liegen in einem Unterkegelschnitt $\mathcal{M}^{\mathit{Mashimo}}_k$ von $\mathcal{M}^{(1)}_k$, für den zumindest alle auftretenden Ränge von Randpunkten durch Satz 7.10 bestimmt sind. Allerdings ist der Beweis dieses Satzes im Fall der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert unvollständig geblieben, er wird in diesem Abschnitt nachgetragen und die Randstruktur dabei sehr viel eingehender beschrieben.

Bereits im Kapitel 7 wurde darauf hingewiesen, daß der Modulraum $\mathcal{M}^{(1)}_4$ der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert mit dem Unterkegelschnitt $\mathcal{M}^{\mathit{Mashimo}}_4$ übereinstimmt, und deshalb wie dieser in zwei kommutierende Räume von Endomorphismen zerfällt. Diese beiden Räume sind die reellen Unterräume von $\mathrm{Sym}^8 L$ und $\mathrm{Sym}^8 R$, die durch reelle Endomorphismen auf je einem der beiden Tensorfaktoren in $\mathrm{Sym}^4 L \otimes \mathrm{Sym}^4 R$ operieren und die über die orthogonale Gruppe $\mathbf{O}_4\mathbb{R}$ konjugiert zueinander sind. Deshalb genügt es nur einen dieser beiden Unterräume genau zu beschreiben.

Der springende Punkt ist nun, daß die Darstellungen $\mathrm{Sym}^4 R$ und $\mathrm{Sym}^8 R$ der $\mathbf{SU}_2 R$ auch isomorph zu den Darstellungen auf den komplexen, harmonischen Polynomen $H^2\mathrm{Sym}^2 R$ bzw. $H^4\mathrm{Sym}^2 R$ auf dem Raum $\mathrm{Sym}^2 R$ sind. Also sind ihre reellen Unterräume als $\mathbf{SU}_2 R$–Darstellung isomorph zu den Räumen der reellen, harmonischen Polynome $H^2V^*$ bzw. $H^4V^*$ auf dem reellen Unterraum $V$ von $\mathrm{Sym}^2 R$. An dieser Stelle stellt sich die entscheidende Frage, wie $H^4V^*$ genau in den Raum der symmetrischen Bilinearformen $\mathrm{Sym}^2 H^2V^*$ auf

$H^2V$ eingebettet ist. Das Lemma von Schur garantiert aber, daß die $\mathbf{SO}\,V$–äquivariante Einbettung via Komultiplikation $\Delta : H^4V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 H^2V^*$ bis auf eine reelle Konstante tatsächlich die reelle Form der Einbettung des Raums $\mathrm{Sym}^8 R$ in $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Sym}^4 R$ ist.

Insbesondere ist der resultierende Kegelschnitt der Kegelschnitt $P^+H^2V^* \cap G + \Delta H^4V^*$ der Lösungen der Gaußgleichungen. Zum weiteren Rechnen braucht man eine Parametrisierung des zugehörigen affinen Raums $M = G + \Delta H^4V^*$ durch die Standardmetrik $G$ als Unterraum der symmetrischen Bilinearformen auf $H^2V$. Um die Symmetrie nicht zu stören, erweist es sich als zweckmäßig, $M$ dabei als affinen Unterraum der symmetrischen Bilinearformen auf $\mathrm{Sym}^2 V$ aufzufassen, wobei die Zerlegung $\mathrm{Sym}^2 V = \mathbb{R}g^{-1} \oplus H^2V$ orthogonal und auch die Norm $\tilde{G}(g^{-1}, g^{-1}) = \frac{3}{2}$ von $g^{-1}$ für alle $\tilde{G} \in M$ gleich ist. Zu einer Orthonormalbasis $x$, $y$ und $z$ von $V$ kann man dann sofort die abgeleitete Orthonormalbasis $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}y^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}z^2$ und $xy$, $yz$ sowie $zx$ von $\mathrm{Sym}^2 V$ angeben. Eine symmetrische Bilinearform $G_0$ auf $\mathrm{Sym}^2 V$, die Komultiplikation $\Delta\psi$ eines Polynoms $\psi \in \mathrm{Sym}^4 V^*$ auf $V$ ist, erfüllt nun offensichtlich die zusätzlichen Bedingungen:

$$\begin{array}{rclcl@{\qquad}rclcl}
G_0(x^2, y^2) &=& G_0(xy, xy) &=:& 2a & G_0(xy, z^2) &=& G_0(xz, yz) &=:& \sqrt{2}\alpha \\
G_0(y^2, z^2) &=& G_0(yz, yz) &=:& 2b & G_0(yz, x^2) &=& G_0(yx, zx) &=:& \sqrt{2}\beta \\
G_0(z^2, x^2) &=& G_0(zx, zx) &=:& 2c & G_0(zx, y^2) &=& G_0(zy, xy) &=:& \sqrt{2}\gamma
\end{array}$$

Diese Bedingungen sind auch schon hinreichend dafür, daß $G_0 = \Delta\psi$ Komultiplikation eines $\psi \in \mathrm{Sym}^4 V^*$ ist, wovon man sich etwa mittels der Symbolsequenz überzeugen kann. Soll dieses $\psi$ zusätzlich harmonisch sein, so muß der kometrische Tensor $g^{-1}$ im Kern von $G_0$ liegen, daß heißt die ersten drei Spalten bzw. Zeilen der Matrix von $G_0$ in der oben angegeben Basis addieren sich zu 0. Somit erhält man als Parametrisierung des affinen Raums $M$:

$$\begin{pmatrix}
1-a-c & a & c & -A-\alpha & \beta & C \\
a & 1-a-b & b & A & -B-\beta & \gamma \\
c & b & 1-b-c & \alpha & B & -C-\gamma \\
-A-\alpha & A & \alpha & 1+2a & \sqrt{2}\gamma & \sqrt{2}\beta \\
\beta & -B-\beta & B & \sqrt{2}\gamma & 1+2b & \sqrt{2}\alpha \\
C & \gamma & -C-\gamma & \sqrt{2}\beta & \sqrt{2}\alpha & 1+2c
\end{pmatrix}$$

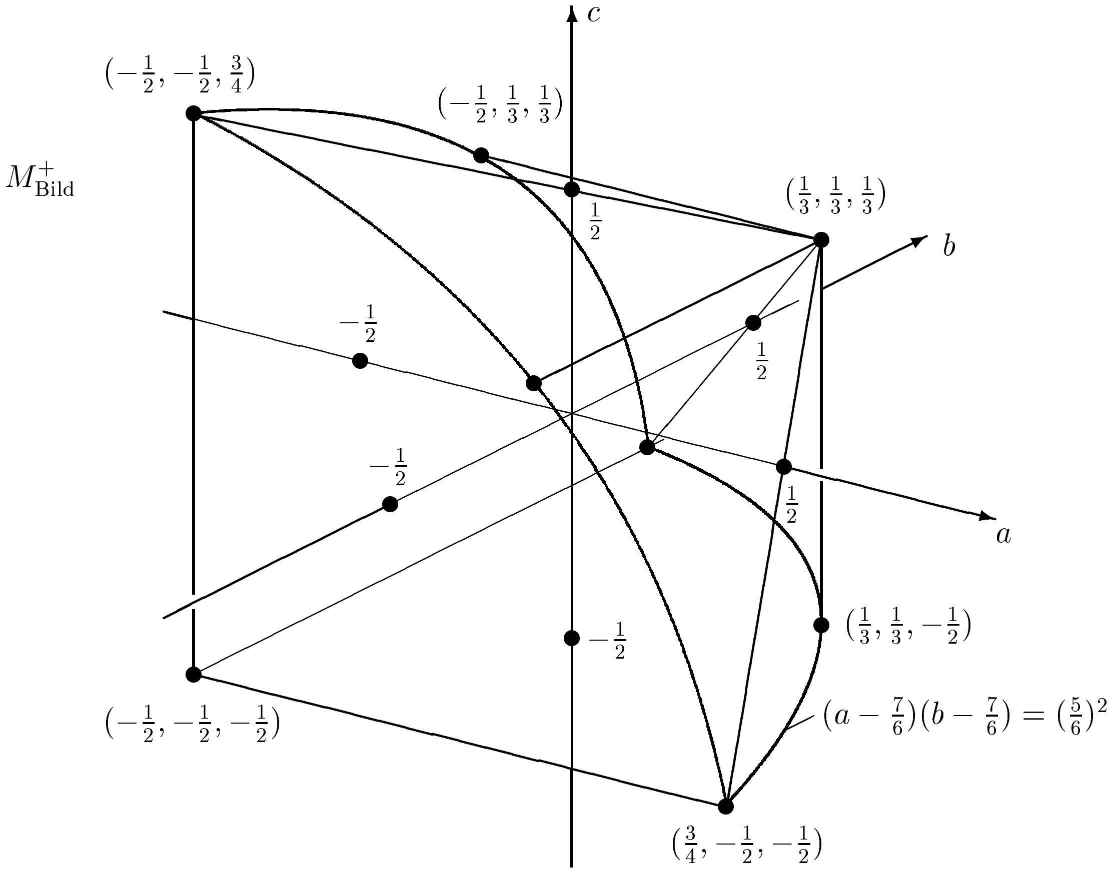
Das $\mathbf{SO}\,V$–invariante Abstandsquadrat zweier Punkte $\tilde{G}_1$ und $\tilde{G}_2$ ist in diesen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}^2(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2) \;:=\;& 4(a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \;+\; 2(A^2 + B^2 + C^2) \\
& + (ab + bc + ca) \;+\; 2(A\alpha + B\beta + C\gamma)
\end{aligned}$$

Durch Ausprobieren kann man nun versuchen, Teilaspekte dieses Kegelschnitts in konkreten Bildern zu erfassen. Ein ziemlich interessantes Beispiel ist dabei der Unterkegelschnitt $M^+_{\mathrm{Bild}}$, bei dem man nur die Koordinaten $a$, $b$ und $c$ behält und alle anderen auf 0 setzt. Geometrisch ist $M^+_{\mathrm{Bild}}$ der Schnitt der drei affinen Halbräume $a \geq -\frac{1}{2}$, $b \geq -\frac{1}{2}$ und $c \geq -\frac{1}{2}$ mit der richtigen Hälfte des Doppelkegels der Lösungen der Ungleichung:

$$\det\begin{pmatrix}
1-a-c & a & c \\
a & 1-a-b & b \\
c & b & 1-b-c
\end{pmatrix} \geq 0$$

Dieser Doppelkegel ist nämlich das Bild des Doppelkegels $\{\det \geq 0\} = P^+U \cup -P^+U$ des zweidimensionalen, orthogonalen Komplements $U$ des kometrischen Tensors $g^{-1}$ im Unterraum $\mathbb{R}g^{-1} \oplus U = \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}z^2 \subset \operatorname{Sym}^2 V$. Auf diese Weise erhält man das Bild:




Somit besitzt $M^+_{\text{Bild}}$ genau 4 Randpunkte mit Korang 3 auf $H^2V$. Aufgrund von Bemerkung 8.6 handelt es sich also um Randpunkte von minimalem Rang, die unter der Operation von $\mathbf{SO}\,V$ konjugiert zueinander sind. Man kann $M_{\text{Bild}}$ sogar als Zentralisator des Randpunks $G_2$ mit Koordinaten $a = b = c = -\frac{1}{2}$ in $M$ charakterisieren, wenn man $M$ als affinen Raum von Endomorphismen auf $H^2V$ auffaßt. Geometrisch hat das zur Folge, daß zweidimensionale Unterkegelschnitte von $M^+_{\text{Bild}}$ durch $G_2$ und $G$ ebene, konvexe Polygone sind. Außerdem operiert auf $M^+_{\text{Bild}}$ deshalb bereits die Standgruppe von $G_2$ in $\mathbf{SO}\,V$, die nach Bemerkung 8.6 isomorph zu $\mathbf{SO}\,_3\mathbb{Z}$ ist.

In der Umgebung des Randpunktes $G_2$ von $M^+_{\text{Bild}}$ mit Koordinaten $a = b = c = -\frac{1}{2}$ liegen offensichtlich Randpunkte von $M^+_{\text{Bild}}$ vom Korang 1, 2 und 3. Nach Bemerkung 8.6 gibt es hingegen im ganzen Kegelschnitt $M^+$ keinen Randpunkt mit Korang 4. Das schließt die im Fall $k = 4$ verbliebene Lücke im Beweis des Satzes 7.10 und bestimmt die Teilmenge, aus denen $n_L$ und $n_R$ gewählt werden dürfen zu $\{1, 2, 3, 5\}$:

**Satz 8.8** *(Satz von Toth–Ziller [T&Z])*
*Alle vollen minimalen isometrischen Immersionen der dreidimensionalen Sphäre $S^3$ mit Radius 1 zum vierten Eigenwert $\lambda_4 = 24$ gehen in eine der folgenden Zielsphären mit Radius*

$r^2 = \frac{1}{8}$:

$$S^9,\ S^{14},\ S^{15} \quad oder \quad S^{18} \quad bis \quad S^{24}$$

Natürlich stellt der Unterkegelschnitt $M^+_{\mathrm{Bild}}$ nur einen verschwindend kleinen Teil des ganzen Kegelschnitts $M^+$ dar. Er spielt im folgenden trotzdem eine zentrale Rolle, weil man an ihm bereits alle wichtigen Punkte erkennen kann. Dazu benötigt man aber zuerst ein besseres Verständnis für die Operation der $\mathbf{SO}\,V$ auf dem Raum $H^2V$, auf dem die Elemente von $M$ symmetrische Bilinearformen definieren. Verwirrenderweise kann man nämlich $H^2V$ selbst vermöge der Metrik $g$ als Raum der spurfreien, symmetrischen Endomorphismen auf $V$ bezeichnen. In diesem Sinne stellen die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ mit der Bedingung $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ der Spurfreiheit schon ein vollständiges System von Invarianten unter der Gruppe $\mathbf{SO}\,V$ dar. Es stellt sich nun die Frage, wie sich diese zwei effektiven Invarianten zu den in Satz 7.1 definierten zwei Invarianten verhalten. Nach diesem Satz hat nämlich jedes Element aus $H^2V$ eine Darstellung $r(v_1 \cdot v_2)_0$ mit $r \geq 0$ und $\langle v_1,\, v_1\rangle = 1 = \langle v_2,\, v_2\rangle$. Als Endomorphismus auf $V$ schreibt sich $(v_1 \cdot v_2)_0 = v_1 \cdot v_2 - \frac{2}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle g^{-1}$ auch:

$$(v_1 \cdot v_2)_0 \;=\; \langle v_1,\, \cdot\rangle \otimes v_2 \,+\, \langle v_2,\, \cdot\rangle \otimes v_1 \,-\, \frac{2}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle \mathrm{id}_V$$

Insbesondere schickt dieser Endomorphismus $v_1$ auf $v_2 + \frac{1}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle v_1$ und $v_2$ entsprechend auf $v_1 + \frac{1}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle v_1$, so daß für linear unabhängige $v_1$ und $v_2$ die Vektoren $v_1 - v_2$, $v_1 \times v_2$ und $v_1 + v_2$ Eigenvektoren von $(v_1 \cdot v_2)_0$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\frac{1}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle - 1$, $-\frac{2}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle$ bzw. $\frac{1}{3}\langle v_1,\, v_2\rangle + 1$ sind. Offenbar gelten diese Formeln auch für linear abhängige $v_1$ und $v_2$, jedoch fallen wegen $\langle v_1,\, v_2\rangle = \pm 1$ zwei dieser Eigenwerte zusammen:

**Definition 8.9** *(Die Winkelinvariante für $H^2V$)*
*Jeder spurfreie, symmetrische Endomorphismus $\psi \in H^2V$ auf einem dreidimensionalen, euklidischen Vektorraum $V$ hat gemäß Satz 7.1 eine Darstellung $\psi = r(v_1 \cdot v_2)_0$ mit $r \geq 0$ und $\langle v_1,\, v_1\rangle = 1 = \langle v_2,\, v_2\rangle$ und somit nur zwei Invarianten $r \geq 0$ und $\cos\varphi := \langle v_1,\, v_2\rangle \in [-1, 1]$ unter $\mathbf{SO}\,V$. Die Eigenwerte von $\psi$ sind $\frac{r\cos\varphi}{3} \pm r$ und $-\frac{2r\cos\varphi}{3}$. Zusammenfassend gilt damit:*

$$\mathrm{tr}\,\psi \;=\; 0 \qquad\qquad \mathrm{tr}\,\psi^2 \;=\; 2r^2(1 + \frac{\cos^2\varphi}{3}) \qquad\qquad \mathrm{tr}\,\psi^3 \;=\; 2r^3\cos\varphi(1 - \frac{\cos^2\varphi}{9})$$

*Die Invariante $\varphi$ wird im folgenden als „Winkel" von $\psi$ bezeichnet. Weil sich die Winkel von $\psi$ und $-\psi$ zu $\pi$ addieren, spielen die Endomorphismen $\psi \neq 0$ mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ eine besondere Rolle. Sie werden eindeutig durch die Eigenschaft $\mathrm{tr}\,\psi^3 = 0$ charakterisiert.*

**Satz 8.10** *(Endomorphismen mit Winkel $\frac{\pi}{2}$)*
*Ein zweidimensionaler Unterraum von $H^2V$ enthält stets einen Endomorphismus $\psi \neq 0$ mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Genauer gibt es höchstens drei verschiedene Geraden von Endomorphismen mit Winkel $\frac{\pi}{2}$, es sei denn das Polynom $\mathrm{tr}\,\psi^3$ verschwindet identisch auf diesem Unterraum. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn der Unterraum unter $\mathbf{SO}\,V$ entweder zum Unterraum $\mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}(x^2 - y^2)$ oder zum Unterraum $\mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}yz$ konjugiert ist.*

**Beweis:** Verschwindet das Polynom tr $\psi^3$ nicht identisch auf dem Unterraum, dann gibt es in ihm jedenfalls ein $\psi_1 \neq 0$ mit $\operatorname{tr}\psi_1^3 \neq 0$. Sind $\psi_1$ und $\psi_2$ linear unabhängig, dann hat das reelle Polynom $t \longmapsto \operatorname{tr}(t\psi_1 + \psi_2)^3$ mindestens eine und höchstens drei Nullstellen. Hingegen verschwindet das Polynom tr $\psi^3$ genau dann auf $\operatorname{Spann}\{\psi_1, \psi_2\}$, wenn alle die Bedingungen

$$\operatorname{tr}\psi_1^3 \;=\; \operatorname{tr}\psi_1^2\psi_2 \;=\; \operatorname{tr}\psi_1\psi_2^2 \;=\; \operatorname{tr}\psi_2^3 \;=\; 0$$

erfüllt sind. Dann gibt es nach geeigneter Skalierung von $\psi_1$ eine orientierte Orthonormalbasis $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ von $V$ mit $\psi_1 = \tilde{x}\tilde{y}$. Addiert man ein geeignetes Vielfaches von $\psi_1$ zu $\psi_2$, dann haben diese beiden Endomorphismen von $V$ in der gewählten Basis Matrixdarstellungen der Form:

$$\psi_1 \;\sim\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \psi_2 \;\sim\; \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & -p_{11} - p_{22} \end{pmatrix}$$

Es folgt tr $\psi_1^2\psi_2 = p_{11} + p_{22}$ sowie tr $\psi_1\psi_2^2 = 2p_{13}p_{23}$. Also gilt $p_{22} = -p_{11}$ und nach eventuellem Vertauschen von $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ kann man außerdem $p_{13} = 0$ annehmen. Dann erzwingt die letzte Bedingung tr $\psi_2^3 = -3p_{11}p_{23}$, daß $\psi_1$ und $\psi_2$ entweder den Raum $\mathbb{R}\tilde{x}\tilde{y} \oplus \mathbb{R}\tilde{y}\tilde{z}$ oder den Raum $\mathbb{R}\tilde{x}\tilde{y} \oplus \mathbb{R}(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)$ aufspannen. Diese beiden Fälle schließen sich gegenseitig aus, denn alle Endomorphismen des zweiten Raums verschwinden auf $\tilde{z}$. $\square$

**Bemerkung 8.11** *(Randpunkte vom Korang 2 mit flachen Deformationen)*
*Man kann sich sofort davon überzeugen, daß es im affinen Unterraum $M = G + \Delta H^4V^*$ von* $\operatorname{Sym}^2 H^2V^*$ *nur eine einzige symmetrische Bilinearform $\tilde{G}$ mit* $\operatorname{Kern}\tilde{G} = \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}(x^2 - y^2)$ *gibt, die aber Signatur $(3,1)$ hat. Somit können höchstens die zu $\mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}yz$ konjugierten, zweidimensionalen Unterräume von $H^2V$ als Kerne von Randpunkten des Kegelschnitts $M^+$ auftreten, auf denen auch das Polynom* tr $\psi^3$ *identisch verschwindet.*

**Satz 8.12** *(Lineare Struktur des Randes)*
*Jeder eindimensionale Unterraum $\mathbb{R}\psi \subset H^2V$ ist der Kern einer positiv semidefiniten Bilinearform auf $H^2V$ aus dem Kegelschnitt $M^+ = P^+H^2V^* \cap G + \Delta H^4V^*$. Folglich ist jeder Randpunkt von $M^+$ eine flache Deformation eines Randpunktes vom Korang 1.*

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem möglichen Wert der Winkelinvariante $\varphi$ einen Randpunkt $\tilde{G} \in M^+$ gibt, dessen Kern von einem Endomorphismus mit Winkel $\varphi$ aufgespannt wird. Dazu betrachte man zunächst das Bild des Unterkegelschnitts $M^+_{\text{Bild}}$ und achte dabei besonders auf die Kegelspitze. Sie gehört zum Randpunkt $G_3$ mit Koordinaten $a = b = c = \frac{1}{3}$ vom Korang 2

$$G_3 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ & & & \frac{5}{3} & & \\ & & & & \frac{5}{3} & \\ & & & & & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

der von einer $\mathbb{R}P^1$–Familie der Mantellinien der Kegelspitze umgeben ist, die aus den Randpunkten vom Korang 1 gebildet werden, deren Kern in $\operatorname{Kern} G_3$ enthalten ist. Weil die Kegelspitze im wesentlichen ein Bild des positiven Kegels $P^+U$ des zweidimensionalen, orthogonalen Komplements $U$ des kometrischen Tensors $g^{-1}$ in $\mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}z^2$ ist, zeigt das Bild insbesondere, daß es für jeden eindimensionalen Unterraum von $\operatorname{Kern} G_3$ einen Randpunkt $\tilde{G}$ von $M^+_{\text{Bild}}$ gibt, dessen Kern gerade dieser Unterraum ist. Somit bleibt nur zu zeigen, daß auf $\operatorname{Kern} G_3$ alle möglichen Werte der Winkelinvariante angenommen werden. Tatsächlich wird $\operatorname{Kern} G_3$ durch $(x^2)_0$, $(y^2)_0$ und $(z^2)_0$ aufgespannt, und enthält somit auch die Elemente

$$(\cos\frac{\varphi}{2})^2(x^2)_0 \;-\; (\sin\frac{\varphi}{2})^2(y^2)_0 \;=\; (\cos\frac{\varphi}{2}x + \sin\frac{\varphi}{2}y)(\cos\frac{\varphi}{2}x - \sin\frac{\varphi}{2}y)_0$$

mit Winkel $\varphi \in [0, \pi]$. Etwas genauer kann man sich davon überzeugen, daß jeder mögliche Wert $\varphi \neq 0, \pi$ für die Winkelinvariante auf genau sechs Richtungen in $\operatorname{Kern} G_3$ angenommen wird. $\square$

Der Rand des Kegelschnitts $M^+$ der spurfreien Lösungen der Gaußgleichungen ist somit Vereinigung der abgeleiteten Kegelschnitte zu den Randpunkten mit Korang 1. Man beachte, daß der abgeleitete Kegelschnitt zu einem Punkt $\tilde{G} \in M^+$ nach Definition nur von $\operatorname{Kern} \tilde{G}$ abhängt. Somit liegen zwei Korang 1 Randpunkte genau dann im gleichen abgeleiteten Kegelschnitt, wenn sie den gleichen Kern haben. Demgegenüber liegt ein Randpunkt vom Korang 2 (oder höher) in einer ganzen Schar abgeleiteter Kegelschnitte parametrisiert nach der $\mathbb{R}P^1$–Familie der eindimensionalen Unterräume seines Kerns. Im diesem Kern gibt es Satz 8.10 zufolge stets mindestens einen eindimensionalen Unterraum von Endomorphismen mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Anders ausgedrückt, jeder Randpunkt vom Korang mindestens 2 ist flache Deformation eines Randpunkts mit Korang 1, dessen Kern nur Endomorphismen mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ enthält:

**Korollar 8.13** *(Randpunkte mit Korang mindestens 2)*
*Zu jedem Randpunkt $\tilde{G}$ vom Korang 2 oder höher existiert mindestens ein $\gamma \in \mathbf{SO}\, V$, so daß $\gamma\tilde{G}$ flache Deformation eines fest gewählten Randpunkts $G_{\frac{\pi}{2}}$ ist, dessen Kern ein eindimensionaler Raum von Endomorphismen mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist. Insbesondere ist die Menge aller Randpunkte vom Korang mindestens 2 zusammenhängend.*

Um alle Randpunkte mit Korang mindestens 2 zu klassifizieren, muß man also nur noch einen Randpunkt $G_{\frac{\pi}{2}}$ vom Korang 1 wählen, dessen Kern von einem Endomorphismus mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ aufgespannt wird. Die Randpunkte seines abgeleiteten Kegelschnitts repräsentieren dann die Orbiten der Gruppe $\mathbf{SO}\, V$ in der Menge der Randpunkte von $M^+$ mit Korang mindestens 2. Schaut man nochmals auf das Bild des Unterkegelschnitts $M^+_{\text{Bild}}$, dann sieht man, daß der Kern des Randpunkts $G_{\frac{\pi}{2}}$ mit $a = b = 0$ und $c = -\frac{1}{2}$ von $zx$ aufgespannt wird. Der abgeleitete Kegelschnitt zu $G_{\frac{\pi}{2}}$ wird parametrisiert durch

$$M_{\frac{\pi}{2}} \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-a & a & -\frac{1}{2} & -A & & \\ a & 1-a-b & b & A & -B & \\ -\frac{1}{2} & b & \frac{3}{2}-b & & B & \\ -A & A & & 1+2a & & \\ & -B & B & & 1+2b & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und ist somit vierdimensional. Das gilt allgemeiner für alle abgeleiteten Kegelschnitte zu Randpunkten vom Korang 1, wie ein Zählargument von Toth–Ziller [T&Z] zeigt. Kritisch ist dabei nur der Fall der Randpunkte mit Kern $\mathbb{R}(v^2)_0$ mit $v \in V$ vom Winkel 0 bzw. $\pi$, weil dieser Raum durch eine Einparameteruntergruppe der $\mathbf{SO}\,V$ stabilisiert wird.

Nach Definition enthält $M_{\frac{\pi}{2}}$ alle $\tilde{G} \in M$ mit $\operatorname{Kern}\tilde{G} \supset \mathbb{R}zx$. Deshalb operiert auf $M_{\frac{\pi}{2}}$ immer noch die Standgruppe des eindimensionalen Unterraums $\mathbb{R}zx$ in $\mathbf{SO}\,V$, die man sofort als semidirektes Produkt $S_2 \ltimes \mathbb{Z}_2^2$ erkennt. Die $S_2$ vertauscht $a \leftrightarrow b$ und $A \leftrightarrow B$, während je eine $\mathbb{Z}_2$ durch Multiplikation mit $\pm 1$ auf $A$ und $B$ operiert. Ein $\tilde{G}$ aus $M_{\frac{\pi}{2}}$ ist genau dann positiv semidefinit auf $\operatorname{Sym}^2 V$, wenn es auf einem Komplement von $\mathbb{R}zx$ in $H^2V$ positiv semidefinit ist. Zu einem solchen $\tilde{G}$ definiere man nun $\tilde{A} := \frac{A}{1+2a}$ und $\tilde{B} := \frac{B}{1+2b}$, wobei $A = 0$ dem Hurwitz–Kriterium 6.2 zufolge sowieso verschwindet, falls $a = -\frac{1}{2}$ sein sollte. In diesem Fall kann man also beruhigt auch $\tilde{A} = 0$ setzen. Dann wird ein geeignetes Komplement durch die Endomorphismen

$$\psi_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 \;-\; \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 \;+\; 2\tilde{A}xy \;-\; \tilde{B}yz \quad \text{und} \quad \psi_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 \;-\; \frac{1}{\sqrt{2}}z^2 \;-\; \tilde{A}xy \;+\; 2\tilde{B}yz$$

zusammen mit $xy$ und $yz$ aufgespannt. Die Matrix von $\tilde{G}$ bezüglich dieser Basis ist:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 4(a + A\tilde{A}) - (b + B\tilde{B}) & 2(a + A\tilde{A}) + 2(b + B\tilde{B}) - \frac{1}{2} & & \\ 2(a + A\tilde{A}) + 2(b + B\tilde{B}) - \frac{1}{2} & \frac{5}{2} - (a + A\tilde{A}) - 4(b + B\tilde{B}) & & \\ & & 1 + 2a & \\ & & & 1 + 2b \end{pmatrix}$$

Also ist $\tilde{G}$ genau dann positiv semidefinit auf $\operatorname{Sym}^2 V$, wenn

$$a \geq -\frac{1}{2} \qquad b \geq -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad (a + A\tilde{A} - \frac{7}{6})(b + B\tilde{B} - \frac{7}{6}) \geq (\frac{5}{6})^2$$

gilt und $\tilde{G}$ zusätzlich in der richtigen Hälfte der Lösungen der letzten Bedingung liegt. Nachdem man sich überzeugt hat, daß kein $\tilde{G} \in M^+_{\frac{\pi}{2}}$ identisch auf dem Spann von $\psi_1$ und $\psi_2$ verschwindet, kann man den Korang von $\tilde{G}$ als Randpunkt von $M^+$ bestimmen, der einfach die Anzahl der scharf erfüllten Ungleichungen unter diesen drei Bedingungen plus 1 für den stets im Kern enthaltenen Unterraum $\mathbb{R}zx$ ist.

Bevor auf die Mehrdeutigkeiten dieses Repräsentantensystems der Orbiten der $\mathbf{SO}\,V$ in der Menge der Randpunkte von $M^+$ mit Korang mindestens 2 näher eingegangen wird, sei zunächst die Geometrie des Kegelschnitts $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ beschrieben. Wegen $\tilde{A}A \geq 0$ sowie $\tilde{B}B \geq 0$ projeziert $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ auf die konvexe Menge

$$\{(a,b) : \; a,\, b \geq -\frac{1}{2} \;\text{ und }\; (a - \frac{7}{6})(b - \frac{7}{6}) \geq (\frac{5}{6})^2 \;\text{ sowie }\; a + b \leq \frac{7}{3}\} \;\subset\; \mathbb{R}^2$$

wobei die Bedingung $a + b \leq \frac{7}{3}$ nur die richtige Hälfte der Lösungen von $(a - \frac{7}{6})(b - \frac{7}{6}) \geq (\frac{5}{6})^2$ auswählt. Diese durch einen Hyperbelbogen begrenzte Ecke taucht auch schon in der obigen Darstellung des Kegelschnitts $M^+_{\text{Bild}}$ auf. Das Urbild jedes Punktes $(a, b)$ aus dieser Ecke ist eine durch die zusätzlichen Koordinaten $A$ und $B$ bestimmte, mehr oder weniger runde Scheibe, welche Zusammenhangskomponente der Lösungsmenge der angegebenen, für festes $a$, $b > -\frac{1}{2}$ quartischen Ungleichung in $A$ und $B$ ist. Deshalb ist sie im allgemeinen nur unter den Spiegelungen $A \longmapsto -A$ und $B \longmapsto -B$ invariant, die in der Standgruppe $S_2 \ltimes \mathbb{Z}_2^2$ von $\mathbb{R}zx$ enthalten sind.

Diese Scheibe wird zum Hyperbelbogen hin gleichmäßig in $A$ und $B$ immer kleiner, nähert man sich jedoch etwa $a = -\frac{1}{2}$, so geht auch $A$ gegen 0 und die Scheibe entartet zu einem Intervall. Das legt den Gedanken nahe, daß der Rand des Kegelschnitts $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ nur in $a = -\frac{1}{2}$ oder $b = -\frac{1}{2}$ Singularitäten besitzt. Tatsächlich reduzieren sich die Bedingung an $b$ und $B$ in $a = -\frac{1}{2}$ wegen $A = 0$ zu:

$$4(b - \frac{1}{8})^2 + 2B^2 + \frac{35}{16} \;\leq\; \frac{15}{4}$$

In der $\mathbf{SO}\,V$–invarianten Metrik auf $\mathrm{Sym}^2 H^2 V^*$ bzw. im zugehörigen $\mathbf{SO}\,V$–invarianten Abstandsquadrat ist dies eine Kreisscheibe, Sie korrespondiert zu einer Einparameteruntergruppe der $\mathbf{SO}\,V$ unter der alle Randpunkte dieser Kreisscheibe zueinander konjugiert sind. Ebenso sind sie unter der Standgruppe von $\mathbb{R}zx$ konjugiert zu den Randpunkten einer zweiten Kreisscheibe in $b = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Weil somit alle Randpunkte von $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ vom Korang 3 unter $\mathbf{SO}\,V$ konjugiert sind, erhält man auf diese Weise einen neuen, expliziten Beweis der Starrheitsaussage aus Bemerkung 8.6 im Fall $\dim V = 3$.

Die Kreisscheibe in $a = -\frac{1}{2}$ zeigt jedenfalls, daß der Rand des Kegelschnitts $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ als Repräsentantensystem der Randpunkte des Kegelschnitts $M^+$ vom Korang mindestens 2 Mehrdeutigkeiten besitzt, die sich nicht alleine durch die Standgruppe $S_2 \ltimes \mathbb{Z}_2^2$ des eindimensionalen Unterraums $\mathbb{R}zx$ erklären lassen. Allerdings liegt die Ursache eben dieser Mehrdeutigkeiten nach Korollar 8.13 in der Auswahl einer Gerade aus Endomorphismen mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Deshalb existieren die beiden Kreisscheiben im Rand von $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ nur deshalb, weil das Polynom $\mathrm{tr}\,\psi^3$ auf den zwei Unterräumen $\mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}zx$ und $\mathbb{R}yz \oplus \mathbb{R}zx$ identisch verschwindet.

Es gibt aber nach dem Beweis von Satz 8.10 zusammen mit Bemerkung 8.11 keine weiteren möglichen Kerne für positiv semidefinite Bilinearformen aus $M^+$, die $\mathbb{R}zx$ enthalten und auf denen das Polynom $\mathrm{tr}\,\psi^3$ identisch verschwindet. Infolgedessen zerfällt der Schnitt eines Orbits der $\mathbf{SO}\,V$ mit dem Komplement dieser beiden Kreisscheiben im Rand von $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ in höchstens drei Orbiten der Standgruppe $S_2 \ltimes \mathbb{Z}_2^2$ von $\mathbb{R}zx$. Zusammenfassend läßt sich die Beschreibung aller Randpunkte des Kegelschnitts $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ in die folgende Klassifikation der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert übersetzen:

**Satz 8.14** *(Minimale isometrische Immersionen der $S^3$)*
*Alle Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen der $S^3$ in die $S^9$ zum vierten Eigenwert sind unter der Operation der Isometriegruppe $\mathbf{O}_4\mathbb{R}$ zueinander konjugiert [T&Z]. Die Orbiten der Äquivalenzklassen minimaler isometrischer Immersionen der $S^3$ in die $S^{14}$ zum selben Eigenwert unter der Operation der Isometriegruppe $\mathbf{O}_4\mathbb{R}$ werden durch zwei Mengen, ein halboffenes Intervall für die Moduli auf den Kreisscheiben in $a = -\frac{1}{2}$ bzw. $b = -\frac{1}{2}$ und die Menge der Lösungen der Gleichung*

$$(a + \frac{A^2}{1+2a} - \frac{7}{6})(b + \frac{B^2}{1+2a} - \frac{7}{6}) \;=\; (\frac{5}{6})^2$$

*in $a$, $A$, $b$ und $B$ mit $a,\, b > -\frac{1}{2}$ und $a+b \leq \frac{7}{3}$ parametrisiert. Dabei ist die Parametrisierung in der zweiten Menge nicht eindeutig, und selbst in dem Quotienten dieser Menge durch die Operation der Gruppe $S_2 \ltimes \mathbb{Z}_2^2$ entsprechen noch bis zu drei verschiedene Punkte einem Orbit der Isometriegruppe $\mathbf{O}\,_4\mathbb{R}$.*

**Korollar 8.15** *(Minimalität und Abstand zur Standardimmersion)*
*Die Moduli der minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ in die $S^9$ zum vierten Eigenwert sind gerade diejenigen Randpunkte des Modulraums $\mathcal{M}_4^{(1)}$ mit dem größten Abstand zur Standardimmersion $G$. Umgekehrt haben die ihnen gegenüberliegenden Randpunkte unter allen Moduli von minimalen isometrischen Immersionen der $S^3$ in die $S^{14}$ den geringsten Abstand zu $G$.*

**Beweis:** Offensichtlich kann das invariante Abstandsquadrat auf einem Randpunkt mit flachen Deformationen nicht maximal werden. In erster Linie betrifft dies nach Bemerkung 7.11 die Moduli minimaler isometrischer Immersionen der $S^3$ zum vierten Eigenwert, deren Moduli weder in $\mathcal{M}_{4,L}^{\text{Mashimo}}$ noch in $\mathcal{M}_{4,R}^{\text{Mashimo}}$ liegen. Insofern nimmt das invariante Abstandsquadrat sein Maximum in jedem Fall auf den Randpunkten von $\mathcal{M}_{4,L}^{\text{Mashimo}}$ und $\mathcal{M}_{4,R}^{\text{Mashimo}}$ an. Somit kann man sich ganz auf den Kegelschnitt $M^+$ in $\mathrm{Sym}^2 H^2 V^*$ zurückziehen, aber selbst dann können alle Randpunkte vom Korang 1 ignoriert werden. Es genügt also, die entsprechende Aussage für den abgeleiteten Kegelschnitt $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ zu beweisen, auf dem das invariante Abstandsquadrat gegeben ist durch:

$$\mathrm{dist}^2(G, G+G_0) \;=\; 4a^2 \;+\; 4b^2 \;+\; ab \;-\; \frac{1}{2}(a+b) \;+\; 2A^2 \;+\; 2B^2 + 1$$

Auf den beiden Kreisscheiben in $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{2}$ nimmt dieses Abstandsquadrat alle Werte zwischen $\frac{35}{16}$ und $\frac{15}{4}$ an. Um sein Verhalten auf dem glatten Teil des Randes von $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ zu bestimmen, muß man zuerst die Randpunkte finden, in denen der Gradient des Abstandsquadrats linear abhängig vom Gradienten der Nebenbedingung

$$(\frac{5}{6})^2 \;=\; (a + \frac{A^2}{1+2a} - \frac{7}{6}) \cdot (b + \frac{B^2}{1+2b} - \frac{7}{6}) \;=:\; \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$$

ist, das heißt:

$$\Big(8a{+}b{-}\frac{1}{2},\, 4A,\, 8b{+}a{-}\frac{1}{2},\, 4B\Big) \;\sim\; \Big((1{-}\frac{2A^2}{(1+2a)^2})\mathcal{B},\, \frac{2A}{1+2a}\mathcal{B},\, (1{-}\frac{2B^2}{(1+2b)^2})\mathcal{A},\, \frac{2B}{1+2b}\mathcal{A}\Big)$$

Das führt wegen $\mathcal{B} \neq 0$ sofort auf die Bedingungen $A = 0$ und damit $\mathcal{A} = a - \frac{7}{6}$ oder alternativ

$$2 - \frac{4A^2}{(1+2a)^2} \;=\; \frac{1}{1+2a}(8a + b - \frac{1}{2})$$

was man auch als $\mathcal{A} = -\frac{13}{24} - \frac{b}{4}$ schreiben kann. Entsprechend gilt auch $B = 0$ und damit $\mathcal{B} = b - \frac{7}{6}$ oder $\mathcal{B} = -\frac{13}{24} - \frac{a}{4}$. Drei Fälle der notwendigen Fallunterscheidung lassen sich dann leicht als irrelevant nachweisen, nur im Fall $A = B = 0$ sind die beiden Gradienten $(8a + b - \frac{1}{2},\, 0,\, 8b + a - \frac{1}{2},\, 0)$ und $(a - \frac{7}{6},\, 0,\, b - \frac{7}{6},\, 0)$ genau im Randpunkt $a = b = \frac{1}{3}$ und $A = B = 0$ linear abhängig. Also nimmt das invariante Abstandsquadrat in diesem Punkt mit dem Wert $\frac{5}{3}$ sein Minimum auf dem Rand von $M^+_{\frac{\pi}{2}}$ an. $\square$

# Anhang A

# Symmetrische und äußere Algebra

Für einen reellen oder komplexen Vektorraum $V$ sei $\mathrm{Sym}^0 V^*$ der Grundkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $\mathrm{Sym}^k V^*$ für $k > 0$ der Vektorraum der symmetrischen $k$–Multilinearformen auf $V$. Die symmetrische Algebra ist dann die direkte Summe $\mathrm{Sym}\, V^* := \bigoplus_{\nu \geq 0} \mathrm{Sym}^\nu V^*$, ausgestattet mit dem graduierten Shuffleprodukt

$$(\psi \cdot \phi)(v_1, \ldots, v_{k+l}) \;:=\; \sum \psi\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\big)\, \phi\big(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}\big)$$

für $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$ und $\phi \in \mathrm{Sym}^l V^*$, wobei die Summe über ein vollständiges Repräsentantensystem $\{\sigma\}$ der Rechtsnebenklassen $S_{k+l}/(S_k \times S_l)$ der symmetrischen Gruppe $S_{k+l}$ geht. Weil $\psi$ und $\phi$ selber symmetrisch sind, hängt das Produkt nicht von der Auswahl der Repräsentanten ab. Ein spezielles Repräsentantensystem sind die Shuffles, die durch die Bedingung $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ und $\sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+l)$ charakterisiert werden. Sie stellen gerade alle möglichen Permutationen beim Mischen von Spielkarten dar, daher der Name.

Entsprechend kann man Repräsentanten der Nebenklassen $S_{k_1+\ldots+k_r}/(S_{k_1} \times \ldots \times S_{k_r})$ als höhere Shuffles bezeichnen. Offensichtlich lassen sich iterierte Shuffleprodukte stets als Summen über diese höheren Shuffles hinschreiben, wodurch zum Beispiel die Assoziativität des Shuffleprodukts trivial wird. Speziell ist ein $S_k/(S_1 \times \ldots \times S_1)$–Shuffle nichts anderes als eine Permutation, und für das iterierte Shuffleprodukt von $k$ Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ erhält man die „Gramsche“ Permanente:

$$(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) \;=\; \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_1(v_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \alpha_k(v_{\sigma(k)}) \;=:\; \mathrm{per} \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Auf der symmetrischen Algebra $\mathrm{Sym}\, V^*$ operieren nun $V^*$ und $V$ durch die graduierten Operatoren des Shuffleprodukts $\alpha\cdot$ mit $\alpha \in V^*$ und der Kontraktion $v \lrcorner$ mit $v \in V$, die durch Einsetzen als erstes Argument $(v \lrcorner \psi)(v_1, \ldots, v_k) := \psi(v, v_1, \ldots, v_k)$ definiert werden kann. Durch Entwickeln der Gramschen Permanente nach der ersten Zeile erhält man die explizite Formel:

$$v \lrcorner (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k) \;:=\; \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu(v) (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{\alpha}_\nu \cdot \ldots \cdot \alpha_k)$$

Insbesondere ist $v \lrcorner$ eine Derivation der symmetrischen Algebra, und folgerichtig gilt die Kommutatorrelation $[v \lrcorner, \alpha\cdot] = \alpha(v)$. Mit Hilfe dieser Operatoren kann man den bosonischen

Zahloperator als Summe $\sum de_\nu \cdot e_\nu\lrcorner$ über ein duales Basenpaar $\{e_\nu\}$ und $\{de_\nu\}$ von $V$ und $V^*$ definieren. Auf $V^*$ ist er die Identität nach Definition und als Derivation operiert er auf $\mathrm{Sym}^k V^*$ durch Multiplikation mit $k$, bestimmt also die Graduierung der symmetrischen Algebra. Durch Iteration erhält man so die „Taylorformeln" für $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_k} \psi(e_{\nu_1},\dots,e_{\nu_k})\, de_{\nu_1} \cdot \ldots \cdot de_{\nu_k} \\ &= \sum_{s_1+\dots+s_n=k} \frac{1}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_n!}\, \psi(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{s_1},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{s_n})\, de_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot de_n^{s_n} \end{aligned}$$

Also wird die symmetrische Algebra von den Linearformen erzeugt, die Monome $de_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot de_n^{s_n}$ mit $s_1 + \dots + s_n = k$ sind eine Basis von $\mathrm{Sym}^k V^*$. Insbesondere ist die Dimension von $\mathrm{Sym}^k V^*$ gerade $\binom{n-1+k}{k}$. Außerdem erlaubt dies die Definition einer kanonischen Paarung

$$\langle \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k,\, v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \rangle \;:=\; (\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha_k)(v_1,\dots,v_k)$$

die $\mathrm{Sym}^k V$ mit dem Dualraum $(\mathrm{Sym}^k V^*)^*$ und das direkte Produkt $\mathrm{Sym}\, V := \coprod_{\nu \geq 0} \mathrm{Sym}^\nu V$ mit dem Dualraum der symmetrischen Algebra identifiziert. $\mathrm{Sym}\, V$ trägt deshalb neben der Algebrastruktur auch eine Komultiplikation $\Delta$ als Adjungierte des Shuffleprodukts. Sie läßt sich auf zerlegbaren Elementen offensichtlich mit der Formel

$$\Delta(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r) \;=\; \sum_{k+l=r} \sum_{\{\sigma\}} v_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot v_{\sigma(k)} \otimes v_{\sigma(k+1)} \cdot \ldots \cdot v_{\sigma(k+l)}$$

berechnen, wobei die innere Summe über ein vollständiges Repräsentantensystem $\{\sigma\}$ der Rechtsnebenklassen $S_{k+l}/(S_k \times S_l)$ geht. Insbesondere ist die Komultiplikation auch der eindeutig bestimmte Homomorphismus $\Delta : \mathrm{Sym}\, V \longrightarrow \mathrm{Sym}\, V \otimes \mathrm{Sym}\, V$ von Algebren mit $\Delta v = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ für alle $v \in V$. Ihre charakteristische Eigenschaft kann man ebenfalls der expliziten Formel entnehmen:

$$(\alpha\lrcorner \otimes 1) \circ \Delta \;=\; \Delta \circ \alpha\lrcorner \;=\; (1 \otimes \alpha\lrcorner) \circ \Delta \qquad \text{für alle } \alpha \in V^*$$

Von Interesse sind allerdings hauptsächlich die graduierten Versionen der Komultiplikation $\Delta_{k,l} : \mathrm{Sym}^{k+l} V \longrightarrow \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^l V$, die ebenfalls als Komultiplikationen bezeichnet werden. Alle diese Abbildungen sind injektiv, denn unter der symmetrischen Multiplikation $m : \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^l V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k+l} V$ gilt offenbar $m \circ \Delta = \binom{k+l}{k}$.

Alle bis jetzt eingeführten Definitionen machen neben der symmetrischen Algebra mit geeigneten Vorzeichen auch für die äußere Algebra $\Lambda V^*$ Sinn. Lediglich bei der Komultiplikation muß man beachten, daß $\Delta$ nur für die getwistete Multiplikation auf dem Tensorprodukt $\Lambda V^* \widehat{\otimes} \Lambda V^*$ ein Homomorphismus von Algebren wird. Die besondere Eigenschaft der symmetrischen Algebra ist nun, daß man sie mit der Algebra der Polynome über dem Vektorraum $V$ identifizieren kann:

**Definition A.1** *(Multilinearformen und Polynome)*
*Für eine $k$–Multilinearform $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$ definiert man das zugehörige Polynom $\psi[\,\cdot\,]$ durch*

$$\psi[x] \;=\; \frac{1}{k!}\psi(x,\dots,x) \;=\; \langle \psi,\, \frac{1}{k!} x^k \rangle \qquad x \in V$$

*Für allgemeine Elemente von $\psi \in \mathrm{Sym}\, V^*$ wird $\psi[x]$ entsprechend durch $\psi[x] := \langle \psi,\, e^x \rangle$ definiert, wobei die formale Expotentialreihe $e^x = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!} x^\nu$ als Element des direkten Produkts $\mathrm{Sym}\, V$ zu verstehen ist.*

**Bemerkung A.2**
*Etwas ungewohnt gehört nach dieser Definition zu einem Skalarprodukt $g \in \mathrm{Sym}^2 V^*$ auf $V$ das Polynom $g[x] = \frac{1}{2} g(x,x)$. Insbesondere wird die Einheitssphäre $S_V$ von $V$ durch das Polynom $2g - 1$ definiert.*

Das Entscheidende an dieser Definition ist, daß die natürliche Multiplikation auf $C^\infty V$ bzw. $\mathbb{C}^\infty V$ eingeschränkt auf das Bild von $\mathrm{Sym}\, V^*$ mit dem Shuffleprodukt übereinstimmt. Davon kann man sich durch direktes Einsetzen der Definitionen überzeugen, abstrakter ist der Hinweis darauf, daß die Expotentialreihe nicht nur multiplikativ $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, sondern auch komultiplikativ $\Delta e^x = e^x \otimes e^x$ ist. Benutzt man nun $\Delta$ als Adjungierte des Shuffleprodukts, so erhält man:

$$(\psi \cdot \varphi)[x] \;=\; \langle \psi \cdot \varphi,\, e^x \rangle \;=\; \langle \psi \otimes \varphi,\, \Delta e^x \rangle \;=\; \langle \psi \otimes \varphi,\, e^x \otimes e^x \rangle \;=\; \psi[x] \varphi[x]$$

Außerdem erlaubt diese Definition eine neue Interpretation der Operatoren $v \lrcorner$:

$$\psi[x + tv] \;=\; \frac{1}{k!} \psi(x + tv, \ldots, x + tv) \;=\; \frac{1}{k!} \psi(x, \ldots, x) \;+\; t \frac{1}{(k-1)!} (v \lrcorner \psi)(x, \ldots, x) \;+\; O(t^2)$$

**Korollar A.3** *(Partielle Ableitungen)*
*Der Operator $v \lrcorner$ entspricht unter $\mathrm{Sym}^k V^* \subset C^\infty V$ bzw. $\mathbb{C}^\infty V$ der partiellen Ableitung in Richtung $v \in V$.*

Insbesondere ist der Wert der $k$–Multilinearform $\psi$ auf Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ einfach der Wert der iterierten partiellen Ableitung $(v_k \lrcorner \ldots v_1 \lrcorner \psi) = \psi(v_1, \ldots, v_k)$ an irgendeiner Stelle. Deshalb ist die Abbildung von $\mathrm{Sym}\, V^*$ nach $C^\infty V$ bzw. $\mathbb{C}^\infty V$ nicht nur ein Homomorphismus von Algebren, sondern auch injektiv, das heißt eine Einbettung. Aus diesem Grunde heißt $\mathrm{Sym}^k V^*$ der Raum der homogenen Polynome vom Grad $k$ über $V$. Explizit kann man die $k$–Multilinearform $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$ mittels der Polarisationsformeln aus dem zugehörigen Polynom $\psi[\,\cdot\,]$ bestimmen:

**Satz A.4** *(Polarisationsformeln)*
*Ist $V$ ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik $0$, dann spannen die $k$–ten Potenzen $v^k$ der Vektoren $v \in V$ den Raum der homogenen Polynome $\mathrm{Sym}^k V$ vom Grad $k$ über $V^*$ auf. Dual dazu kann man den Wert $\psi(v_1, \ldots, v_k)$ einer symmetrischen $k$–Multilinearform $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$ aus den Werten des zugehörigen Polynoms $\psi[\cdot]$ an gewissen Stellen berechnen:*

$$\psi(v_1, \ldots, v_k) \;=\; \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_l} \psi[v_{\nu_1} + \cdots + v_{\nu_l}] \;=\; \frac{1}{2^k} \sum_{\epsilon_\nu \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k \cdot \psi[\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_k v_k]$$

**Beweis:** Zum Beweis betrachte man die Funktion $e^x - 1 = x + O(x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ gilt dann offensichtlich:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \ldots \cdot x_k &= (e^{x_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (e^{x_k} - 1) \; + \; O(x^{k+1}) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_l} (-1)^{k-l} e^{x_{\nu_1} + \cdots + x_{\nu_l}} \; + \; O(x^{k+1}) \end{aligned}$$

Der homogene Teil vom Grad $k$ dieser Gleichung

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \;=\; \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_l} (x_{\nu_1} + \cdots + x_{\nu_l})^k$$

ist etwa durch Taylorentwicklung in 0 wohldefiniert. Eine ziemlich ähnliche Gleichung erhält man, wenn man anstatt mit $e^x - 1$ mit der Funktion $2 \sinh \frac{x}{2} = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = x + O(x^2)$ startet. Beide Gleichungen gelten für alle $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und sind deswegen schon Polynomidentitäten im Ring $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$. Als solche gelten sie dann aber bereits für alle Elemente einer Algebra über $\mathbb{Q}$, etwa für beliebige $v_1, \ldots, v_k \in V$ in $\mathrm{Sym}\, V$:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \ldots \cdot v_k &= \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_l} (v_{\nu_1} + \cdots + v_{\nu_l})^k \\ &= \frac{1}{2^k k!} \sum_{\epsilon_\nu \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k \, (\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_k v_k)^k \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen das Monom $v_1 \cdot \ldots \cdot v_k$ als Linearkombination der $k$–ten Potenzen dar und beweisen damit die erste Aussage. Die dualen Polarisationsformeln erhält man durch Paaren mit $\psi \in \mathrm{Sym}^k V^*$. $\square$

Am Schluß dieses Anhangs sei noch auf eine spezielle Eigenart zweidimensionaler Vektorräume über $\mathbb{C}$ hingewiesen, die aus der Tatsache folgt, daß der Grundkörper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Zusammen mit der Polarisationsformel impliziert sie die Hermite–Reziprozität A.6. Eine weitere Konsequenz ist übrigens die Existenz der Normalform harmonischer Polynome über $\mathbb{R}^3$, die in Satz 7.1 bewiesen wird.

**Lemma A.5** *(Punkte auf der projektiven Geraden über $\mathbb{C}$)*
*Für einen zweidimensionalen Vektorraum $S$ über $\mathbb{C}$ läßt sich jedes homogene Polynom $\psi$ vom Grad $k$ über $S$ als Produkt $\psi = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k$ von $k$ Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in S^*$ schreiben. Diese sind eindeutig bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren $\xi \in \mathbb{C}^*$.*

**Beweis:** Sei $\psi \neq 0$ ein beliebiges Polynom vom Grad $k$ und $p \in S$ ein Punkt mit $\psi[p] \neq 0$. Dann gibt es eine Zerlegung $S \cong \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q$ und eine zugehörige Karte der projektiven Geraden $\mathbb{P}S \cong \mathbb{C}P^1$, die $[s]$ nach $z := \frac{dp(s)}{dq(s)} \in \mathbb{C}$ schickt. Im unendlich fernen Punkt $p$ mit $z = \infty$ verschwindet das Polynom $\psi$ nicht und definiert dadurch ein Polynom $\tilde{\psi}[z] := \psi[zp + q]$ vom Grad $k$ über $\mathbb{C}$ mit Leitkoeffizient $\psi[p] \neq 0$, das über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren $\tilde{\psi} = c(z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_k)$ zerfällt. Folglich ist auch $\psi$ ein Vielfaches des Produkts der Linearformen $\alpha_\nu := (dp - \lambda_\nu dq) \in S^*$. $\square$

**Satz A.6** *(Hermite–Reziprozität [F&H])*
*Für einen zweidimensionalen Vektorraum $S$ über $\mathbb{C}$ gibt es einen* $\mathbf{GL}\,S$*–äquivarianten Isomorphismus von* $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S^*$ *und* $\mathrm{Sym}^l\mathrm{Sym}^k S^*$*. Insbesondere sind beide Räume als* $\mathbf{GL}\,S$*–Darstellungen äquivalent. Für höherdimensionale Vektorräume $S$ ist die Abbildung immer noch wohldefiniert, aber im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.*

**Beweis:** Zunächst gibt es eine natürliche Abbildung von $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S^*$ nach $\mathrm{Sym}^l\mathrm{Sym}^k S^*$. Bettet man nämlich $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S^*$ in das iterierte Tensorprodukt $(S^{*\otimes l})^{\otimes k}$ ein, das man sich als $k \times l$–Matrix von $S$–Faktoren vorstelle, dann kann man Zeilen und Spalten vertauschen und demgemäß das Bild eines Elements aus $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S^*$ nach $\mathrm{Sym}^l\mathrm{Sym}^k S^*$ multiplizieren. Diese Abbildung ist $\mathbf{GL}\,S$–äquivariant und wird im wesentlichen durch die Formel

$$\frac{1}{k!}(\frac{1}{l!}\alpha_1^l)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{l!}\alpha_k^l) \longmapsto (\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_k)^l$$

für alle $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in S^*$ charakterisiert, ist aber im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv. Falls nun aber $S$ ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, dann spannen die Bilder der $(\frac{1}{l!}\alpha_1^l)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{l!}\alpha_k^l)$ nach der Polarisationsformel A.4 zusammen mit Lemma A.5 bereits $\mathrm{Sym}^l\mathrm{Sym}^k S^*$ auf, die obige Abbildung ist also surjektiv. Weil $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S^*$ und $\mathrm{Sym}^l\mathrm{Sym}^k S^*$ als Vektorräume über $\mathbb{C}$ beide Dimension $\binom{l+k}{k}$ haben, erhält man auf diese Weise einen Isomorphismus. $\square$

Faßt man einen zweidimensionalen komplexen Vektorraum $S$ als Darstellung der Gruppe $\mathbf{SL}\,S$ auf, so kann man aus der invarianten, symplektischen Form $\omega = \det$ auf $S$ übrigens leicht eine $\mathbf{SL}\,S$–äquivariante Abbildung

$$\omega^{\frac{k(k-1)}{2}}\lrcorner :\ \underbrace{\mathrm{Sym}^{k+l-1}S\otimes\ldots\otimes\mathrm{Sym}^{k+l-1}S}_{k} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Sym}^l S\otimes\ldots\otimes\mathrm{Sym}^l S}_{k}$$

konstruieren, indem man jedes Paar von Faktoren genau einmal mit $\omega$ kontrahiert. Nach dem im Beweis der Clebsch–Gordon–Formel angegebenen Argument ist jede einzelne Kontraktion zweier Faktoren mit $\omega$ und folglich auch $\omega^{\frac{k(k-1)}{2}}\lrcorner$ selbst surjektiv. Außerdem antikommutiert es nach Konstruktion mit allen Transpositionen zweier Faktoren und induziert somit surjektive, $\mathbf{SL}\,S$–äquivariante Abbildungen:

$$\Lambda^k\mathrm{Sym}^{k+l-1}S \longrightarrow \mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S \qquad\qquad \mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^{k+l-1}S \longrightarrow \Lambda^k\mathrm{Sym}^l S$$

Somit sind die beiden Vektorräume $\Lambda^k\mathrm{Sym}^{k+l-1}S$ und $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Sym}^l S$ der Dimension $\binom{k+l}{k}$ äquivalent als $\mathbf{SL}\,S$–Darstellungen [F&H], was sofort die Interpretation der Hermite–Reziprozität als Hodge–Isomorphismus $\Lambda^k\mathrm{Sym}^{k+l-1}S \cong \Lambda^l\mathrm{Sym}^{k+l-1}S$ nahelegt. Ein Beispiel für die zweite Abbildung im Fall $k = 2$ kann man aus der Clebsch–Gordon–Formel B.4 ablesen.

# Anhang B

# Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2$

In diesem Anhang werden die benötigten Formeln der Darstellungstheorie der Liealgebra $\mathfrak{sl}_2$ hergeleitet. Nun ist die Theorie der endlich–dimensionalen Darstellungen weithin bekannt, aber in dieser Arbeit werden auch etwas allgemeinere Darstellungen betrachtet:

**Definition B.1** *(Niedrigstgewichtsdarstellungen)*
*Eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}_2$ auf einen möglicherweise unendlich–dimensionalen Vektorraum $V$ heißt Niedrigstgewichtsdarstellung, wenn $H$ diagonalisierbar und $Y$ lokal nilpotent ist, das heißt für alle $\psi \in V$ gibt es ein $k < \infty$ mit $Y^k\psi = 0$.*

**Satz B.2** *(Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}_2$)*
*Sei $V$ eine Niedrigstgewichtsdarstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}_2$, $\psi \in V$ ein Eigenvektor von $H$ zum Eigenwert $\lambda$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $Y^{k+1}\psi = 0$. Gilt dann $\lambda \neq 2, 3, \ldots, 2k$, so kann man $\psi$ als Summe in seine isotypischen Komponenten zerlegen:*

$$\psi = \psi_0 + X\psi_1 + X^2\psi_2 + \cdots + X^k\psi_k$$

*Dabei sind die $\psi_\nu \in \operatorname{Kern} Y$ definiert durch*

$$\psi_\nu := \frac{1}{\nu![-\lambda + 2\nu]_\nu} \sum_{\mu=0}^{k-\nu} \frac{X^\mu Y^{\mu+\nu}}{\mu![\lambda - 2\nu - 2]_\mu}\psi$$

*wobei $[x]_\nu := x(x-1)\cdots(x-\nu+1) = (-1)^\nu[-x+\nu-1]_\nu$ das faktorielle Polynom bezeichnet.*

**Beweis:** Mit Hilfe der Kommutatorrelation $[Y, X^\mu] = -\mu X^{\mu-1}(H + \mu - 1)$ überzeugt man sich leicht davon, daß die $\psi_\nu$ im Kern von $Y$ liegen, denn wendet man $Y$ auf die definierenden Summen an, so werden diese Teleskopsummen, die sich zu 0 addieren. Es ist vielleicht interessanter zu zeigen, daß sich die $X^\nu\psi_\nu$ tatsächlich zu $\psi$ summieren. Dazu beginnt man mit der für alle $k \geq 0$ gültigen Polynomidentität:

$$x\delta_{k,0} \;=\; \sum_{\nu+\mu=k} (x + \mu - \nu)\binom{k-x}{\mu}\binom{k+x}{\nu}$$

Tatsächlich ist die rechte Seite ein Polynom vom Grad $k + 1$ in $x$, das an den $2k + 1$ Stellen $x = -k, \ldots, k$ verschwindet, denn bei diesen Werten für $x$ heben sich die Summanden zu

$\nu$, $\mu$ und $\mu+x$, $\nu-x$ gegenseitig weg und alle anderen Summanden verschwinden von alleine. Drückt man die Binominalkoeffizienten durch faktorielle Polynome aus und dividiert durch das Polynom $(x-k)(x-k+1)\cdots(x+k)$, so wird aus dieser Identität:

$$\delta_{k,0} \;=\; \sum_{\nu+\mu=k} \frac{1}{\nu!\mu![x+\mu]_\nu\,[-x+\nu]_\mu}$$

Die Stellen $x = 1-k,\dots,k-1$ sind einfache Pole der rechten Seite. Setzt man speziell $x = \lambda-k-1$ für $\lambda \neq 2,3,\dots,2k$ ein und multipliziert mit $(-1)^k$, so erhält man:

$$\delta_{k,0} \;=\; \sum_{\nu+\mu=k} \frac{1}{\nu!\mu![-\lambda+2\nu]_\nu\,[\lambda-2\nu-2]_\mu} \qquad \Box$$

**Bemerkung B.3** *(Eigenwerte der Operatoren $Y^\mu X^\mu$)*
*Ist Satz B.2 auf alle Eigenvektoren $\psi$ von $H$ zu einem bestimmten Eigenwert $\lambda$ anwendbar, das heißt $\lambda \neq 2,3,\dots,2k$ für $k$ minimal mit $Y^{k+1}\psi = 0$, so sind die Operatoren $Y^\nu X^\nu$, $\nu \geq 0$, diagonalisierbar auf diesem Eigenraum von $H$. In diesem Zusammenhang benutzt man eine Formel, die aus der allgemeinen Kommutatorrelation $[Y, X^\nu] = -\nu X^{\nu-1}(H+\nu-1)$ folgt. Ist nämlich $\psi_\nu \in \mathrm{Kern}\,Y$ ein Eigenvektor von $H$ zum Eigenwert $\lambda-2\nu$ entsprechend $X^\nu\psi_\nu$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$, so gilt für alle $\mu \geq 0$:*

$$\begin{aligned}(Y^\mu X^\mu)X^\nu\psi_\nu &= -(\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu-1)(Y^{\mu-1}X^{\mu-1})X^\nu\psi_\nu \quad = \quad \dots \\ &= (-1)^\mu[\mu+\nu]_\mu[\lambda+\mu-\nu-1]_\mu X^\nu\psi_\nu \quad = \quad [\mu+\nu]_\mu[\nu-\lambda]_\mu X^\nu\psi_\nu\end{aligned}$$

**Satz B.4** *(Clebsch–Gordon–Formel [F&H])*
*Sei $S$ ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, aufgefaßt als Darstellung der Liegruppe $\mathbf{SL}\,S \cong \mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Dann zerfällt das Tensorprodukt $\mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$ für alle $k,\, l \geq 0$ als $\mathbf{SL}\,S$–Darstellung in:*

$$\mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S \;=\; \bigoplus_{\nu=0}^{k\wedge l} \mathrm{Sym}^{k+l-2\nu} S$$

*wobei $k \wedge l$ für $\min\{k,l\}$ steht. Insbesondere zerfallen $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k S)$ und $\Lambda^2(\mathrm{Sym}^k S)$ in:*

$$\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k S) \;=\; \bigoplus_{\nu=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Sym}^{2k-4\nu} S \qquad\qquad \Lambda^2(\mathrm{Sym}^k S) \;=\; \bigoplus_{\nu=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \mathrm{Sym}^{2k-2-4\nu} S$$

**Beweis:** Weil $S$ zweidimensional ist, induziert die Determinante eine $\mathbf{SL}\,S$–invariante symplektische Form $\omega = \det$ auf $S$ mit zwei zugehörigen, inversen Isomorphismen $\sharp : S \longrightarrow S^*$, $s \longmapsto \omega(s,\cdot)$ und $\flat : S^* \longrightarrow S$. Für eine „kanonische“ Basis $p$, $q$ von $S$ mit $\omega(p,q) = 1$ und dualer Basis $dp$, $dq$ gilt $\omega = dp \wedge dq \in \Lambda^2 S^*$. Entsprechend wird der kanonische Bivektor $\Lambda := \omega^\flat = p \wedge q \in \Lambda^2 S$ zu $\omega$ definiert. $\omega$ und $\Lambda$ induzieren $\mathbf{SL}\,S$–invariante, diagonale Kontraktions– bzw. Multiplikationsoperatoren $\omega\lrcorner := dp\lrcorner \otimes dq\lrcorner - dq\lrcorner \otimes dp\lrcorner$ und $\Lambda\,\cdot := p\cdot \otimes q\cdot - q\cdot \otimes p\cdot$ auf $\mathrm{Sym}\,S \otimes \mathrm{Sym}\,S$, die auf $\mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$ die Kommutatorrelation erfüllen:

$$[\Lambda\,\cdot, -\omega\lrcorner] \;=\; k+l+2$$

Somit erzeugen $\Lambda\cdot$ und $-\omega\lrcorner$ zusammen mit $H := [\Lambda\cdot, -\omega\lrcorner] = k+l+2$ auf $\mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$ eine $\mathfrak{sl}_2$–Algebra. Nach der Projektionsformel B.2 hat deshalb jedes $\psi \in \mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$ eine Darstellung der Form

$$\psi = \psi_0 \,+\, \Lambda\cdot\psi_1 \,+\, (\Lambda\cdot)^2\psi_2 \,+\ldots+\, (\Lambda\cdot)^{k\wedge l}\psi_{k\wedge l}$$

mit $\psi_\nu \in \mathrm{Kern}\,\omega\lrcorner$. Nach Bemerkung B.3 ist $(\omega\lrcorner)^\mu(\Lambda\cdot)^\mu$ für $\mu > 0$ auf $\mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $[\nu+\mu]_\mu\,[k+l+1+\mu-\nu]_\mu > 0$ für $\nu = 0,\ldots,k\wedge l$, und die obige Zerlegung von $\psi$ ist gerade die Zerlegung von $\psi$ in Eigenvektoren. Deshalb ist jedes $(\Lambda\cdot)^\nu\psi_\nu$ eindeutig bestimmt. Weil die Operatoren $(\omega\lrcorner)^\mu(\Lambda\cdot)^\mu$ aber für alle $\mu > 0$ sogar invertierbar sind, ist $(\Lambda\cdot)^\mu$ stets injektiv und $(\omega\lrcorner)^\mu$ entsprechend surjektiv, das heißt auch die $\psi_\nu$ sind eindeutig.

Es bleibt die Zerlegung von $\mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$ in Eigenräume der Operatoren $(\omega\lrcorner)^\mu(\Lambda\cdot)^\mu$ mit der angegebenen Zerlegung zu identifizieren. Dazu benutzt man die Komultiplikation $\Delta : \mathrm{Sym}^{k+l} S \longrightarrow \mathrm{Sym}^k S \otimes \mathrm{Sym}^l S$, die injektiv und $\mathbf{SL}\,S$–äquivariant nach Konstruktion ist und die $\mathrm{Sym}^{k+l} S$ offensichtlich in den Kern von $\omega\lrcorner$ abbildet. Ein Dimensionsvergleich zeigt dann, daß der Kern von $\omega\lrcorner$ isomorph zu $\mathrm{Sym}^{k+l} S$ ist. Die Zerlegungen von $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k S)$ und $\Lambda^2(\mathrm{Sym}^k S)$ folgen sofort, wenn man $k = l$ setzt und beachtet, daß das Bild der Komultiplikation nach Definition in $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^k S)$ liegt und $\Lambda\cdot$ den Unterraum $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^{k-1} S)$ nach $\Lambda^2(\mathrm{Sym}^k S)$ abbildet und umgekehrt. $\square$

# Anhang C

# Die Standardimmersionen

Die Moduli der Standardimmersionen der Einheitssphären $S_V$ von Takahashi sind nach Satz 3.2 als Skalarprodukte auf $H^kV$ ein Vielfaches der Einschränkung des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Sym}^kV}$ von $\mathrm{Sym}^kV$ auf $H^kV$. In diesem Anhang wird dieses Vielfache ohne den Umweg über das $L^2$–Skalarprodukt direkt bestimmt. Die sich dabei ergebenden Konstanten werden in Satz 4.28 bei der Konstruktion der Multiplikation

$$\Psi:\ \mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^{n_1}\ \times\ \mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^{n_r}\quad\longrightarrow\quad \mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_r}$$

auf der disjunkten Vereinigung der Modulräume $\mathcal{M}_k^{(d)}\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, benötigt, genau wie zur expliziten Bestimmung der höheren Fundamentalformen der Standardimmersionen. Schließlich kann man den Ansatz dieser Rechnung auch für ein elementares Argument dafür benutzen, daß die homogenen, harmonischen Polynome $H^kV^*$, aufgefaßt als Raum von Funktionen, für ungerades bzw. gerades $k$ die Punkte der Sphäre $S_V$ oder des projektiven Raums $\mathbb{P}V$ trennen. Etwas gewichtiger formuliert ist dies der Satz von Li [Li], daß alle erzeugenden minimalen isometrischen Immersionen der Sphäre $S_V$ als Bild eine eingebettete Sphäre oder einen eingebetteten projektiven Raum besitzen. In der Rechnung selbst braucht man im wesentlichen nur die binomische Formel für die faktorielle Polynome $[x]_k := x(x-1)\ldots(x-k+1)$, die einfach durch Induktion bewiesen werden kann:

**Lemma C.1**

$$[x+y]_k\ =\ \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}[x]_\nu[y]_{k-\nu}\qquad k\geq 0$$

**Satz C.2** *(Explizite Form der Standardlösung)*
*Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $\dim V =: n\geq 2$. Der Modul $G$ der Standardimmersion der Einheitssphäre $S_V$ zum $k$–ten Eigenwert $\lambda_k$, $k\geq 1$, ist das Skalarprodukt*

$$G(\cdot,\cdot)\quad=\quad k!\,\frac{n-1}{\lambda_k}\,\frac{[\frac{n-4}{2}+k]_\kappa}{[\frac{n-3}{2}+\kappa]_\kappa}\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathrm{Sym}^kV}\quad=\quad (k-1)!\,\frac{[\frac{n-4}{2}+k]_{\tilde\kappa}}{[\frac{n-1}{2}+\tilde\kappa]_{\tilde\kappa}}\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{\mathrm{Sym}^kV}$$

*eingeschränkt auf $H^kV$, wobei $\kappa := \lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ und $\tilde\kappa := \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor$. Mit etwas Geduld kann man sich davon überzeugen, daß beide Darstellungen wegen $\lambda_k = k(n+k-2)$ übereinstimmen.*

**Beweis:** Die Konstruktion von Takahashi zeigt, daß die Standardlösung ein Vielfaches der zum $L^2$–Skalarprodukt auf $H^kV^*$ dualen Metrik auf $H^kV$ ist. Das $L^2$–Skalarprodukt ist aber $\mathbf{SO}\,V$ invariant, also nach dem Lemma von Schur ein Vielfaches der Einschränkung von $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Sym}^kV^*}$ auf $H^kV^*$. Infolgedessen ist auch die Standardlösung ein Vielfaches der Metrik $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Sym}^kV}$ eingeschränkt auf $H^kV$. Um dieses Vielfache zu bestimmen, muß man zunächst die Diracschen Deltafunktionale $\delta_p\in\mathrm{Sym}^kV$ für $p\in V$ auf den Raum $H^kV^*$ einschränken, oder alternativ orthogonal auf $H^kV$ projezieren. Gemäß den Konventionen aus Anhang A entsprechen diese Deltafunktionale unter der kanonischen Paarung von $\mathrm{Sym}\,V$ mit $\mathrm{Sym}\,V^*$ den formalen Expotentialsummen $\delta_p:=\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{\nu!}p^\nu$. Anstatt nun die orthogonale Projektion direkt auszurechnen, führt man wie im Kapitel 4 die Operatorenalgebra $H$, $M$ und $-K$ auf $\mathrm{Sym}\,V$ für den dualen euklidischen Vektorraum $V^*$ ein, und benutzt dann die Projektionsformel der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2$ aus Satz B.2:

$$(\delta_p)_0\ =\ \sum_{\nu=0}^{\kappa}(-1)^\nu\frac{M^\nu K^\nu}{\nu!\,[\frac{n}{2}+k-2]_\nu}\delta_p\qquad\qquad \text{mit } \kappa:=\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$$

Diese Projektion ist selbstadjungiert bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Sym}^kV}$ und wegen $K\delta_p=\frac{\langle p,p\rangle}{2}\delta_p$ folgt:

$$\langle(\delta_p)_0,\,\delta_p\rangle_{\mathrm{Sym}^kV}\ =\ \sum_{\nu=0}^{\kappa}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,[\frac{n-4}{2}+k]_\nu}\langle K^\nu\delta_p,\,K^\nu\delta_p\rangle\ =\ \sum_{\nu=0}^{\kappa}\frac{(-1)^\nu}{4^\nu\nu![\frac{n-4}{2}+k]_\nu}\frac{\langle p,\,p\rangle^k}{(k-2\nu)!}$$

Der schwierigste Schritt besteht nun darin, eine explizite Formel für diese merkwürdige Summe zu finden. Je nachdem ob $k$ gerade $(-)$ oder ungerade $(+)$ ist, gilt zunächst die folgende Identität:

$$\frac{k!}{4^\nu\nu!(k-2\nu)!}\ =\ \frac{\kappa!}{\nu!(\kappa-\nu)!}\,\frac{[\kappa\mp\frac{1}{2}]_\kappa}{[\kappa-\nu\mp\frac{1}{2}]_{\kappa-\nu}}\ =\ \binom{\kappa}{\nu}[\kappa\mp\tfrac{1}{2}]_\nu$$

Die binomische Formel C.1 für die faktoriellen Polynome $[x]_\nu=(-1)^\nu[-x+\nu-1]_\nu$ impliziert:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\kappa}\frac{(-1)^\nu}{4^\nu\nu!(k-2\nu)![\frac{n-4}{2}+k]_\nu}\ &=\ \frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{\kappa}(-1)^\nu\binom{\kappa}{\nu}\frac{[\kappa\mp\frac{1}{2}]_\nu[\frac{n-4}{2}+k-\nu]_{\kappa-\nu}}{[\frac{n-4}{2}+k]_\kappa}\\ &=\ \frac{(-1)^\kappa}{k![\frac{n-4}{2}+k]_\kappa}\sum_{\nu=0}^{\kappa}\binom{\kappa}{\nu}[\kappa\mp\tfrac{1}{2}]_\nu[-\tfrac{n-1}{2}-\kappa\pm\tfrac{1}{2}]_{\kappa-\nu}\\ &=\ \frac{(-1)^\kappa}{k![\frac{n-4}{2}+k]_\kappa}[-\tfrac{n-1}{2}]_\kappa\ =\ \frac{[\frac{n-3}{2}+\kappa]_\kappa}{k![\frac{n-4}{2}+k]_\kappa}\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis vereinfacht sich die obige Darstellung von $\langle(\delta_p)_0,\,\delta_p\rangle$ zu:

$$\langle(\delta_p)_0,\,\delta_p\rangle\ =\ \frac{[\frac{n-3}{2}+\kappa]_\kappa}{k!\,[\frac{n-4}{2}+k]_\kappa}\langle p,\,p\rangle^k$$

Nun muß für einen Einheitsvektor $\langle p,\,p\rangle=1$ in $V$ für die Standardlösung $G(\delta_p,\delta_p)=\frac{n-1}{\lambda_k}$ gelten. Diese Überlegung bestimmt den Faktor in der ersten behaupteten Formel für $G$. Die zweite Darstellung folgt mit dem gleichen Argument, zunächst gilt:

$$\langle (X\delta_p)_0,\, Y\delta_p\rangle \;=\; \sum_{\nu=0}^{\kappa} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,[\frac{n-4}{2}+k]_\nu}\langle K^\nu(X\delta_p),\, K^\nu(Y\delta_p)\rangle$$

Nun sei $\langle X,\, p\rangle = 0 = \langle Y,\, p\rangle$ vorausgesetzt. Ist dann $k$ gerade, so verschwindet der $\nu = \kappa$–Summand, so daß man $\kappa$ in dieser Formel durch $\tilde\kappa = \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor$ ersetzen darf. Wenn man dann das vorherige Summationsergebnis einfach für $k-1$ und $n+2$ anwendet, so erhält man:

$$\begin{aligned}\langle (X\delta_p)_0,\, Y\delta_p\rangle &= \sum_{\nu=0}^{\tilde\kappa} \frac{(-1)^\nu}{4^\nu\nu!\,[\frac{n-2}{2}+(k-1)]_\nu}\,\frac{\langle X,\, Y\rangle\langle p,\, p\rangle^{k-1}}{(k-1-2\nu)!}\\ &= \frac{[\frac{n-1}{2}+\tilde\kappa]_{\tilde\kappa}}{(k-1)!\,[\frac{n-4}{2}+k]_{\tilde\kappa}}\langle p,\, p\rangle^{k-1}\langle X,\, Y\rangle \quad \square\end{aligned}$$

**Satz C.3** *(Satz von Li [Li])*
*Das Bild jeder erzeugenden minimalen isometrischen Immersion der Sphäre $S_V$ zum $k$–ten Eigenwert $\lambda_k$ ist für gerade $k$ diffeomorph zum reell–projektiven Raum $\mathbb{P}V$ und für ungerade $k$ zur Sphäre $S_V$.*

**Beweis:** Aufgrund ihrer universellen Eigenschaft liegt allen erzeugenden minimalen isometrischen Immersionen dieselbe differenzierbare Abbildung zugrunde, die $p \in S_V$ auf das Diracsche Deltafunktional $\delta_p \in E^*_\lambda$ schickt. Man muß also zeigen, daß dieses Funktional auf jedem Eigenraum $H^kV^*$ den Punkt $p$ bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt. Zu diesem Zweck betrachte man die durch die Einheitssphäre $S_{V^*}$ in $V^*$ parametrisierte Familie $(\frac{1}{k!}\alpha^k)_0$ harmonischer Polynome auf $V$, die wieder durch die Projektionsformel B.2 definiert werden. Wie zuvor ergibt dies für ein Polynom dieser Familie und $p \in S_V$ wegen $\langle\alpha,\, \alpha\rangle = 1 = \langle p,\, p\rangle$:

$$\langle (\frac{1}{k!}\alpha^k)_0,\, \delta_p\rangle \;=\; \sum_{\nu=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} \frac{(-1)^\nu}{4^\nu\nu!\,(k-2\nu)!\,[\frac{n-4}{2}+k]_\nu}\langle\alpha,\, p\rangle^{k-2\nu}$$

Die rechte Seite ist auf jeden Fall ein Polynom vom Grad $k$ in $\langle\alpha,\, p\rangle$ mit Leitkoeffizient $\frac{1}{k!}$. Somit sind die Niveaumengen von $\delta_p$ in der Parametermenge $S_{V^*}$ dieser Familie die Schnitte von $S_{V^*}$ mit höchstens $k$ affinen Hyperflächen modelliert nach $\{p\}^\perp$, bestimmen somit $\{p\}^\perp$ und folglich auch $\mathbb{R}p$. $\square$

# Literaturverzeichnis


[B&K] Becker, Andreas & Krämer, Manfred: *Fixraumdimensionen von Untergruppen bei Darstellungen der* $\mathbf{SO}(4)$, Bayreuther Mathematische Schriften 44 (1993), 1—52

[Ber] Berger, Marcel: *Geometry, Volume I,* Universitext, Springer, 1987

[BCGGG] Bryant, R. L., Chern S. S., Gardner, R. L., Goldschmidt, H. L. & Griffiths, P. A.: *Exterior Differential Systems,* Publications of the MSRI 18, Springer, 1991

[Cal] Calabi, Eugenio: *Minimal Immersions of Surfaces in Euclidean Spheres,* Journal of Differential Geometry 1 (1967), 111—125

[Car] Cartan, Élie: *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non–euclidien,* Bulletin de la Société Mathématique de France 47 (1919), 125—160 & 48 (1920), 132—208 oder Œuvres complètes III, 321—432

[DT&Z] DeTurck, Dennis & Ziller, Wolfgang: *Minimal Isometric Immersions of Spherical Space Forms in Spheres,* Commentarii Mathematici Helvetici 67 (1992), 428—458

[dC&W] Do Carmo, Manfredo P. & Wallach, Norman R.: *Minimal Immersions of Spheres into Spheres,* Annals of Mathematics 93 (1971), 43—62

[E&R] Eells, James & Ratto, Andrea: *Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries,* Annals of Mathematics Studies 130, Princeton, 1993

[F&H] Fulton, William & Harris, Joe: *Representation Theory, A First Course,* Graduate Texts in Mathematics 129 (RIM), Springer, New York, 1991

[G&T] Gauchman, Hillel & Toth, Gabor: *Fine Structure of the Space of Spherical Minimal Immersions,* Transactions of the American Mathematical Society 348, VI (1996), 2441—2463

[La] Lam, Kee Y.: *Some New Results on Composition of Quadratic Forms,* Inventiones Mathematicae 79 (1985), 467—474

[Li] Li, Peter: *Minimal Immersions of Compact Irreducible Homogeneous Riemannian Manifolds,* Journal of Differential Geometry 16 (1981), 105—115

[Ma] MASHIMO, KATSUYA: *Minimal Immersions of 3–dimensional Sphere into Spheres,* Osaka Journal of Mathematics 21 (1984), 721—732

[Mo] MOORE, JOHN D.: *Isometric Immersions of Space Forms in Space Forms,* Pacific Journal of Mathematics 40 (1972), 157—166

[Mu] MUTO, YOSIO: *The Space $W_2$ of Isometric Minimal Immersions of the Three–dimensional Sphere into Spheres,* Tokyo Journal of Mathematics 7 (1984), 337-358

[O] OTTO, MICHAEL: *Minimale Immersionen in Sphären,* Diplomarbeit an der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn, 1996

[Ta] TAKAHASHI, TSUNERO: *Minimal Immersions of Riemannian Manifolds,* Journal of the Mathematical Society of Japan 18 (1966), 380—385

[To1] TOTH, GABOR: *Harmonic Maps and Minimal Immersions through Representation Theory,* Perspectives in Mathematics 12, Academic Press, Boston, 1990

[To2] TOTH, GABOR: *Rigidity of Minimal Submanifolds in Spheres in Terms of Higher Fundamental Forms,* Michigan Journal of Mathematics 40 (1993), 493—505

[To3] TOTH, GABOR: *New Construction for Spherical Minimal Immersions,* Geometriae Dedicata 67 (1997), 187—196

[To4] TOTH, GABOR: *Eigenmaps and the Space of Minimal Immersions between Spheres,* erscheint im Indiana University Mathematical Journal

[T&Z] TOTH, GABOR & ZILLER, WOLFGANG: *Spherical Minimal Immersions of the 3–Sphere,* Vorabdruck, 1997

[W] WOOD, R.: *Polynominal Maps from Spheres to Spheres,* Inventiones Mathematicae 5 (1968), 163—168