Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität
Bonn

# Diracoperatoren auf Symmetrischen Räumen vom Rang 1

Diplomarbeit
von
Gregor Weingart

27. März 1995

# Inhaltsverzeichnis



# 1 Symmetrische Räume

RIEMANNsche Symmetrische Räume sind RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten, in denen die Punktspiegelung $x \mapsto -x$ in jedem Tangentialraum sich zu einer global definierten Isometrie fortsetzen läßt. Die Isometriegruppe einer solchen Mannigfaltigkeit operiert dann transitiv und ist eine endlichdimensionale LIEgruppe $G$, so daß jeder Symmetrische Raum ein homogener Raum $G/_K$ ist. Im folgenden wird diese Konstruktion für Symmetrische Räume vom nichtkompakten Typ skizziert, die Quotienten von halbeinfachen, nichtkompakten LIEgruppen

$G$ sind. Dabei erhält man eine Beschreibung aller geometrischen, das heißt allein durch die RIEMANNsche Struktur definierten Vektorbündel. Einige dieser Bündel tragen eine CLIFFORDstruktur und ermöglichen so die Definition von elliptischen, formal selbstadjungierten Differentialoperatoren, den geometrischen DIRACoperatoren. Zum Schluß werden noch einige Beispiele für Symmetrische Räume konstruiert, namentlich die hyperbolischen Räume, die bereits alle Symmetrischen Räume vom Rang 1 mit Ausnahme der CAYLEYebene enthalten.

## 1.1 Konstruktion Symmetrischer Räume

Sei $G$ eine nichtkompakte, halbeinfache LIEgruppe mit endlichem Zentrum, $\mathfrak{g}$ die LIEalgebra der linksinvarianten Vektorfelder mit nichtausgearteter KILLINGform:

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, B(X,Y) = \operatorname{tr} \mathbf{ad}_X \circ \mathbf{ad}_Y$$

Sei $K$ eine maximale, kompakte Untergruppe in $G$, dann gibt es einen involutiven Automorphismus von $G$, die CARTANinvolution $\Theta$, so daß $K$ gerade die fixierte Untergruppe von $G$ ist. Die Unteralgebra $\mathfrak{k}$ ist dann der Eigenraum zum Eigenwert 1 des ebenfalls mit $\Theta$ bezeichneten Differentials. Dies erhält als ein involutiver Automorphismus von $\mathfrak{g}$ die KILLINGform, so daß die aufscheinende Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ in Eigenräume zu Eigenwerten $\pm 1$ orthogonal ist und die folgenden Relationen erfüllt:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

Die LIEalgebra $\mathfrak{k}$ einer maximalen, kompakten Untergruppe $K$ ist nun ein maximal negativ definiter Unterraum zur KILLINGform $B$, so daß $\mathfrak{p}$ sich als komplementärer maximal positiv definiter Unterraum erweist. Durch $B(X, -\Theta Y)$ wird deswegen ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ erklärt, bezüglich dessen alle $\mathbf{ad}_X, X \in \mathfrak{p}$, symmetrisch operieren. Wählt man dann eine maximal ABELsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$, so zerlegt sich die ganze LIEalgebra $\mathfrak{g}$ in die Summe der Eigenräume zu den Wurzeln $\alpha \in \mathfrak{a}^*$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{mit} \quad [A, X_\alpha] = \alpha(A) X_\alpha \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{a}, X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$$

Die Involution $\Theta$ bildet dabei $\mathfrak{g}_\alpha$ nach $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ ab, während $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ sofort aus der JACOBIidentität folgt. Die KILLINGform erfüllt somit $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ falls $\alpha + \beta \neq 0$. Wählt man nun in $\mathfrak{a}$ einen Vektor $A$, auf dem keine Wurzel verschwindet, dann ist jede Wurzel entweder positiv $\alpha(A) > 0$ oder negativ und die Summe

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann ist auch $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ eine Unteralgebra nach Konstruktion und diese Unteralgebra erweist sich wie $\mathfrak{p}$ als Komplement von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$.

Damit hat man die infinitesimale Form der IWASAWAzerlegung, deren globale Form

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k} \qquad G = NAK$$

für die $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ entspechenden Untergruppen $A$ bzw. $N$ ein Diffeomorphismus mit dem direkten Produkt $N \times A \times K$ ist.
Der Quotient $G/_K$, diffeomorph zu $NA$, erweist sich nun als Symmetrischer Raum. Zunächst betrachte man dazu einmal das Differential der Projektion in einem Punkt $g \in G$. Ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ bestimmt dort den Tangentialvektor $\frac{d}{dt} g e^{tX}$ mit Projektion $\frac{d}{dt} g e^{tX} K$. Der Kern des Differentials ist damit $\mathfrak{k}$ und der Tangentialraum an $G/_K$ kann im Punkt $gK$ mit $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$ identifiziert werden. Ändert man jedoch $g$ in $gk$, $k \in K$, so ändert sich auch diese Identifizierung in:

$$\frac{d}{dt} g e^{tX} K = \frac{d}{dt} gk(k^{-1} e^{tX} k) k^{-1} K = \frac{d}{dt} gk e^{t \mathbf{Ad}_{k^{-1}} X} K$$

Somit beschreiben $X$ in $g$ und $\mathbf{Ad}_{k^{-1}} X$ in $gk$ denselben Tangentialvektor in $gK$. Ein Vektorfeld auf $G/_K$ entspricht also einer Funktion $s : G \to \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$ invariant unter der $K$-Darstellung:

$$\Gamma T(G/_K) = C^\infty(G, \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}})_K \quad \text{mit} \quad (k * s)(g) := \mathbf{Ad}_k \, s(gk)$$

Hier operiert $K$ wegen $\mathbf{Ad}_K \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ vermöge $\mathbf{Ad}$ auf $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$. Man kann also $G$ als $K$-Prinzipalbündel auf $G/_K$ auffassen, das eine Reduktion des Rahmenbündels ist, weil man das Tangentialbündel als assoziiertes Vektorbündel erhalten kann. Wählt man einen Punkt $o$ in $G/_K$ und einen Rahmen $\{E_s\}$ in $o$, so kann man die Einbettung $G \hookrightarrow GL(G/_K)$ direkt durch $g \to g_*\{E_s\}$ beschreiben. Die orthogonale Projektion $\mathbf{pr}_{\mathfrak{p}}$ ist nun wohldefiniert auf $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$, so daß man für alle $\kappa > 0$ eine positiv definite Metrik

$$\langle , \rangle : \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \langle X + \mathfrak{k}, Y + \mathfrak{k} \rangle = \kappa B(\mathbf{pr}_p X, \mathbf{pr}_{\mathfrak{p}} Y) = \frac{1}{2} \kappa B(X - \Theta X, Y)$$

definieren kann. Die Invarianz der KILLINGform stellt sicher, daß $K$ orthogonal operiert, so daß man eine RIEMANNsche Metrik auf $G/_K$ erhält durch:

$$\langle s, s' \rangle (gK) = \langle s(g), s(g) \rangle \quad \text{für alle} \quad s, s' \in \Gamma T(G/_K) = C^\infty(G, \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}})_K$$

Die CARTANinvolution $\Theta$ definiert dann globale Isometrien in jedem Punkt $gK$ durch $\tilde{g}K \to g\Theta(g^{-1}\tilde{g})K$, deren Differential im Fixpunkt $gK$ gerade die Punktspiegelung am Ursprung ist. Somit ist $G/_K$ ein Symmetrischer Raum.
Auf $G$ hat man in leichter Abwandlung der MAURER-CARTAN-Form eine $\mathfrak{k}$-wertige Linearform, die einfach jedes linksinvariante Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ orthogonal auf $\mathfrak{k}$ projeziert $\omega(X) = \mathbf{pr}_{\mathfrak{k}} X$. Dann verschwindet für jedes $X \in \mathfrak{k}$ und

jedes Vektorfeld $s \in C^\infty(G, \mathfrak{g}/_\mathfrak{k})_K$ der Ausdruck:

$$\begin{aligned}(\nabla s)_g(X) &= (ds + (\mathbf{ad} \circ \omega)s)_g\ (X) \\ &:= \frac{d}{dt}s(ge^{tX}) + \mathbf{ad}_{\omega_g(\frac{d}{dt}ge^{tX})}s(g) \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{Ad}_{e^{-tX}}s(g) + \mathbf{ad}_X s(g)\end{aligned}$$

Deswegen ist $(\nabla_{s'}s)(g) = (\nabla s)_g(s(g))$ für je zwei Vektorfelder $s$, $s'$ wohldefiniert und ist selbst ein Vektorfeld. $\mathbf{Ad}_{k^{-1}}$ ist nämlich ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ und kommutiert mit $\mathbf{pr}_\mathfrak{k}$. Sind dann $X$ und $\mathbf{Ad}_{k^{-1}}X$ Repräsentanten von $s'(g)$ bzw. $s'(gk)$ in $\mathfrak{g}$, so folgt:

$$\begin{aligned}(\nabla_{s'}s)(gk) &= \frac{d}{dt}s(gke^{t\mathbf{Ad}_{k^{-1}}X}) + \mathbf{ad}_{\mathbf{pr}_\mathfrak{k}\mathbf{Ad}_{k^{-1}}X}\mathbf{Ad}_{k^{-1}}s(g) \\ &= \frac{d}{dt}s(ge^{tX}k) + \mathbf{Ad}_{k^{-1}}\mathbf{ad}_{\mathbf{pr}_\mathfrak{k}X}s(g) \\ &= \mathbf{Ad}_{k^{-1}}(\nabla_{s'}s)(g)\end{aligned}$$

Es wird sich zeigen, daß $\nabla$ der Levi-Civitià-Zusammenhang auf $G/_K$ ist. Die Iwasawazerlegung definiert nun einen Schnitt des $K$-Prinzipalbündels $G$, das Tangentialbündel ist trivial. Speziell kann man die konstanten Vektorfelder in dieser Trivialisierung betrachten:

$$X(nak) = \mathbf{Ad}_{k^{-1}}X \in C^\infty(G, \mathfrak{g}/_\mathfrak{k}) \quad \text{für beliebiges} \quad X \in \mathfrak{g}/_\mathfrak{k}$$

Diese Vektorfelder operieren auf den Funktionen $C^\infty G/_K \cong C^\infty NA$ genau wie ihre Repräsentant in $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$, aufgefaßt als linksinvariantes Vektorfeld auf $NA$:

$$(Xf)(nak) = \frac{d}{dt}f(nake^{t\mathbf{Ad}_{k^{-1}}X}) = \frac{d}{dt}f(nae^{tX}k)$$

Der Symmetrische Raum $G/_K$ ist deshalb sogar isometrisch zum Gruppenraum $NA$, ausgestattet mit der linksinvarianten Metrik $\langle,\rangle$ auf $\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}\times\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}$. Der Kommutator zweier konstanter Vektorfelder ist deswegen das konstante Vektorfeld, das zum Kommutator ihrer Repräsentanten in $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ gehört. Bezeichnet man mit $\mathbf{pr}_{\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}}$ die $\mathfrak{g}/_\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}$ identifizierende Projektion in $\mathfrak{g}$, so verkürzt sich der Ausdruck für den Zusammenhang zweier konstanter Vektorfelder zu:

$$\nabla_X Y \equiv [\mathbf{pr}_\mathfrak{k}\mathbf{pr}_{\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}}X, Y] \bmod \mathfrak{k}$$

Die Metrizität dieses Zusammenhangs ist klar, weil die Killingform invariant unter der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{k}$ ist, die mit $\mathbf{pr}_\mathfrak{p}$ kommutiert. Nun folgt aber auch die Torsionsfreiheit, denn mit

$$[\mathbf{pr}_\mathfrak{k}X, Y] \equiv [\mathbf{pr}_\mathfrak{k}X, \mathbf{pr}_\mathfrak{p}Y] \equiv [X, \mathbf{pr}_\mathfrak{p}Y] \bmod \mathfrak{k}$$

folgt für $X$, $Y \in \mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}$:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [\mathbf{pr}_\mathfrak{k}X, Y] - [\mathbf{pr}_\mathfrak{k}Y, X] \equiv [X, Y] \bmod \mathfrak{k}$$

Damit ist $\nabla$ der LEVI-CIVITÀ-Zusammenhang auf $G/_K$. Insbesondere gilt $\nabla_A \equiv 0$ für $A \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ wegen $\mathbf{pr}_{\mathfrak{k}} A = 0$. Für den RIEMANNschen Krümmungstensor erhält man also für $A \in \mathfrak{a}$ und $N \in \mathfrak{n}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} R_{A,N}N &= \nabla_A(\ldots) - \nabla_N \nabla_A(\ldots) - \nabla_{[A,N]}N \\ &\equiv -[\mathbf{pr}_{\mathfrak{k}}[A,N],N] \bmod \mathfrak{k} \end{aligned}$$

und da $A \in \mathfrak{a}$ senkrecht auf $\mathfrak{k}$ steht, folgt die Gleichheit:

$$\begin{aligned} \langle R_{A,N}N, A\rangle &= -\kappa B([\mathbf{pr}_{\mathfrak{k}}[A,N],N],A) \\ &= \kappa B(\mathbf{pr}_{\mathfrak{k}}[A,N],[A,N]) \\ &= -\kappa B(\mathbf{pr}_{\mathfrak{p}}[A,N],[A,N]) \\ &= -\langle [A,N],[A,N]\rangle \\ &= -\langle [A,[A,N]],N\rangle \end{aligned}$$

Dabei verschwindet $\kappa B$ auf $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$, da $\mathfrak{n}$ ganz im Raum der positiven Wurzeln liegt, und deswegen gilt:

$$\kappa B([A,N],[A,N]) = 0 = \kappa B(\mathbf{pr}_{\mathfrak{k}}[A,N],[A,N]) + \kappa B(\mathbf{pr}_{\mathfrak{p}}[A,N],[A,N])$$

Diese Aussage beschreibt die Schnittkrümmung der linksinvarianten Metrik $\langle,\rangle$ im Rang 1 Fall vollständig, denn man kann $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ immer so wählen, daß $A$ ein beliebiger Einheitstangentialvektor ist. Ein dazu orthogonaler Einheitstangentialvektor wird dann im Rang 1 Fall durch ein $N \in \mathfrak{n}$ repräsentiert. $\mathbf{Ad}_A^2$ ist nun auf $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ selbstadjungiert bezüglich $\langle,\rangle$ und nimmt die Eigenwerte $\alpha(A)^2$ und $4\alpha(A)^2$ an, so daß das RAYLEIGHprinzip die folgende Abschätzung für die Schnittkrümmung ergibt:

$$-4\alpha(A)^2 \leq \langle R_{A,N}N, A\rangle \leq -\alpha(A)^2$$

## 1.2 Geometrische DIRACoperatoren

Auf dem $K$-Prinzipalbündel $G$ mit Zusammenhang $\omega$ kann man nun die Konstruktion des Tangentialbündels verallgemeinern und zu jeder Linksdarstellung $* : K \to Aut\,V$ von $K$ ein assoziiertes Vektorbündel $\mathfrak{V} = G \times_* V$ mit Zusammenhang konstruieren. Die Schnitte von $\mathfrak{V}$ sind dann die Funktionen aus $C^\infty(G,V)$, die invariant unter der $K$-Linksdarstellung sind

$$(k \cdot \psi)(g) := k * \psi(gk)$$

also $\psi(gk) = k^{-1} * \psi(g)$ erfüllen, so daß die formale Multiplikation „$g * \psi(g)$", die im Falle des Tangentialbündels durchaus Sinn macht, konstant auf den $K$-Orbiten ist. Das Bündel ist damit bereits auf $G/_K$ definiert und hat zu $V$ isomorphe Fasern. Der Zusammenhang wird nun für einen Schnitt $\psi \in C^\infty(G,V)_K$ wie vorher definiert durch:

$$\nabla\psi = d\psi + \omega * \psi$$

Trivialisiert man durch Wahl einer Untergruppe $NA$, so kann man $V$ als Raum der konstanten, das heißt eigentlich $NA$-invarianten Schnitte auffassen. Der Raum aller Schnitte erscheint dann als topologisches Tensorprodukt $C^\infty NA \otimes V$. Der Zusammenhang ist bereits auf den konstanten Schnitten definiert:

$$\nabla_X v = (\mathbf{pr}_{\mathfrak{k}} \mathbf{pr}_{\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}} X) * v \quad \text{für alle} \quad X \in \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}} \quad \text{und} \quad v \in V$$

Diese Formeln machen nun auch für eine infinitesimale Darstellung $V$ von $\mathfrak{k}$ Sinn, sie beschreiben dann einfach ein triviales Bündel auf $NA$ mit einem nicht-trivialen Zusammenhang $\nabla$. Tatsächlich aber hängt dieses Bündel nicht von der Trivialisierung ab! Eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{k}$ gehört nämlich stets zu einer tatsächlichen Darstellung einer geeigneten, etwa der universellen Überlagerungsgruppe $\widehat{K}$ von $K$, die gleichzeitig eine zentrale Erweiterung von $K$ ist, denn der Kern $Z$ der Projektion ist ein diskreter Normalteiler in $\widehat{K}$. Er kann mit der Decktransformationsgruppe identifiziert werden. Da nun $G$ zu $K$ homotop ist, gibt es aber eine Überlagerung $\widehat{G}$ von $G$, ebenfalls zentrale Erweiterung und mit derselben Decktransformationsgruppe $Z$, so daß das volle Urbild von $K$ in $\widehat{G}$ mit $\widehat{K}$ isomorph ist. Deswegen erhält man den Symmetrischen Raum auch als:

$$G/_K = \widehat{G}/_{\widehat{K}}$$

Nach Voraussetzung hat man eine nun wohldefinierte Darstellung $\widehat{*}$ von $\widehat{K}$ auf $V$ und somit ein assoziiertes Bündel $\mathfrak{V}$. Trivialisiert man nun das $\widehat{K}$-Prinzipalbündel $\widehat{G}$ mit der gelifteten Einbettung $NA \hookrightarrow \widehat{G}$ der einfach zusammenhängenden Untergruppe $NA$ von $G$, so erhält man wieder die obige Darstellung der Schnitte und des Zusammenhangs auf $\mathfrak{V}$.

So erhält man auch für infinitesimale Darstellungen wohldefinierte assoziierte Vektorbündel auf $G/_K$, die ganz allgemein Spinorbündel genannt werden. Die wichtigsten Beispiele sind die automorphen Formen zu rationalem Gewicht auf $\mathbf{SL}_2\mathbb{R}/_{\mathbf{SO}_2\mathbb{R}}$, die zu endlichen Überlagerungen von $\mathbf{SO}_2\mathbb{R} = \mathbf{S}^1$ gehören, und die eigentlichen Spinorbündel der Spindarstellungen von $\mathfrak{so}\,\mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$.

Ernsthafte Schwierigkeiten können erst auftreten, wenn man Quotienten $_\Gamma\backslash G/_K$ Symmetrischer Räume betrachtet, weil dann die globale Trivialisierung fortfällt. Im allgemeinen sind die Schnitte eines Bündels auf dem Quotienten nämlich einfach die $\Gamma$-invarianten Schnitte auf $G/_K$, das heißt die $\Gamma$-linksin- und $K$-rechtsäquivarianten Funktionen $_\Gamma C^\infty(G,V)_K$ auf $G$, was bei einer infinitesimalen Darstellung keinen Sinn macht, weil die Schnitte Funktionen auf $\widehat{G}$ sind. Invarianz unter dem vollen Urbild $\widehat{\Gamma}$ von $\Gamma$ in $\widehat{G}$ hingegen ist eine zu starke Bedingung, denn $\widehat{\Gamma}$ enthält auch den Kern $Z$ der Projektion von $\widehat{G}$ nach $G$. $Z$ liegt nun im Zentrum von $\widehat{G}$ und $Z$-Linksinvarianz ist damit im allgemeinen nicht zu vereinbaren mit der Aktion von $Z \subset \widehat{K}$ von rechts. Im allgemeinen Fall kommt man deshalb nur weiter mit einem Schnitt der exakten Sequenz:

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \widehat{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

Verschiedene Schnitte definieren im allgemeinen nichtisomorphe Bündel auf dem Quotienten und unter Umständen findet man überhaupt keine Schnitte. Die Wahl eines Schnittes definiert deshalb eine weitere Struktur auf dem Quotienten, die Spinstruktur. Zwei verschiedene Spinstrukturen $s, s' : \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ unterscheiden sich dann um den Homomorphismus $s^{-1} \cdot s' : \Gamma \to Z$. Die $s(\Gamma)$-invarianten Schnitte, das heißt die Schnitte von $\mathfrak{V}$ auf dem Quotienten mit der Spinstruktur $s$ erscheinen dann auf dem Quotienten mit der Spinstruktur $s'$ als als mehrwertige Schnitte, deren stetige Fortsetzung entlang geschlossener Kurven durch obigen Homomorphismus bestimmt wird.

Das eigentliche Thema dieser Arbeit sind nun Vektorbündel $\mathfrak{V}$, assoziiert an Darstellungen $V$ von $K$ oder $\mathfrak{k}$, ausgestattet mit einer invarianten Metrik, die wie im Fall $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$ mit $\langle , \rangle$ bezeichnet werde, und einer äquivarianten CLIFFORD-multiplikation

$$\cdot : \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}} \times V \to V, \quad (X, v) \mapsto X \cdot v$$

mit den Eigenschaften

- **CLIFFORDregel:** $X \cdot Y \cdot v + Y \cdot X \cdot v = -2\langle X, Y\rangle v$
- **Metrizität:** $\langle X \cdot v, w\rangle = -\langle v, X \cdot w\rangle$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$ und alle $v, w \in V$. Die Äquivarianz garantiert, daß sich die CLIFFORDmultiplikation auf Schnitte der assoziierten Vektorbündel $TG/_K$ und $\mathfrak{V}$ fortsetztten läßt via $(X \cdot \psi)(g) = X(g) \cdot \psi(g)$ für $X \in C^\infty(G, \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}})_K$ und $\psi \in C^\infty(G, V)_K$. Aus demselben Grund trägt $\mathfrak{V}$ eine Metrik und den oben definierten metrischen Zusammenhang. Auf einem solchen CLIFFORDbündel $\mathfrak{V}$ ist ein formal selbstadjungierter Differentialoperator, der DIRACoperator, durch

$$D\psi = \sum E_s \cdot \nabla_{E_s}\psi \quad \text{für eine lokale ONB} \quad E_s \quad \text{und} \quad \psi \in C^\infty(G, V)_K$$

definiert, so daß für alle $f \in C^\infty G/_K$ gilt:

$$D(f\psi) = \sum E_s \cdot (E_s f)\psi + E_s \cdot f\nabla_{E_s}\psi = (grad\, f) \cdot \psi + fD\psi$$

Das Symbol von $D$ ist für einen Kotangentialvektor $df$ also gerade die CLIFFORDmultiplikation mit $grad\, f = df^\flat$, die aber nach CLIFFORDregel invertierbar ist für $df \neq 0$. Somit ist $D$ elliptisch. Die obige Formel weist auch den richtigen Weg, wenn man $\mathfrak{V}$ durch Wahl einer Untergruppe $NA$ trivialisiert. Man summiert dann zweckmäßigerweise über eine ONB konstanter Schnitte von $TG/_K$. Dann wird evident, daß $D$ die konstanten Schnitte $V$ von $\mathfrak{V}$ auf sich abbildet und auf $C^\infty(G, V)_K \cong C^\infty NA \otimes V$ gilt

$$D(f \otimes v) = grad\, f \cdot v + f \otimes Dv$$

wo $grad\, f$ als Element von $C^\infty NA \otimes \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$ aufgefaßt wird.

Mit Hilfe dieser Trivialisierung kann man nun zeigen, daß $D$ formal selbstadjungiert ist. Sei dazu $E_s$ eine ONB konstanter Vektorfelder und der WEYLvektor definiert durch

$$R := \frac{1}{2}\sum_s \nabla_{E_s} E_s = -\frac{1}{2}\sum_{s,t}\langle E_s, \nabla_{E_s} E_t\rangle E_t$$

was nicht von der Wahl der ONB abhängt. Die zweite Gleichung zeigt, daß $div\, X = -2\langle R, X\rangle$ für jedes konstante Vektorfeld $X$. Der formal adjungierte Operator zu $\nabla_{E_s}$ ist deshalb wie in jedem Vektorbündel mit metrischem Zusammenhang $-\nabla_{E_s} + 2\langle R, E_s\rangle$, so daß

$$\begin{aligned}\left(\sum E_s \cdot \nabla_{E_s}\right)^* &= \sum\left(-\nabla_{E_s} + 2\langle R, E_s\rangle\right)\left(-E_s\right)\\ &= \sum\left(\nabla_{E_s} E_s \cdot + E_s \cdot \nabla_{E_s} - 2\langle R, E_s\rangle E_s \cdot\right)\\ &= \sum E_s \cdot \nabla_{E_s} + 2R \cdot -2R\cdot\end{aligned}$$

$D$ formal selbstadjungiert ist. Das gleiche Argument zeigt aber auch, daß $D$ im allgemeinen nicht selbstadjungiert auf den konstanten Schnitten $V$ ist. Der tatsächlich adjungierte Operator zu $\nabla_{E_s}$ auf $V$ ist nämlich $-\nabla_{E_s}$, weil der Zusammenhang metrisch ist, und $D + 2R\cdot$ somit adjungiert zu $D$. Im Fall $R \neq 0$ ist die Volumenform auf $G/_K$ jedoch gerade das totale Differential:

$$d\left(-\frac{R}{2\langle R, R\rangle} \perp vol\right) = -\left(div \frac{R}{2\langle R, R\rangle}\right) vol = vol$$

so daß kein Widerspruch besteht. Eine kleine Modifikation scheint angebracht, die obige Rechnung zeigt nämlich auch, daß der modifizierte lineare Operator $D_{lin} = D + R\cdot : V \to V$ auf den konstanten Schnitten selbstadjungiert und somit orthogonal diagonalisierbar ist. Das Studium seiner Eigenwerte und Eigenvektoren auf $V$ ist der erste Schritt, um das Spektrum des Operators $D$ zu verstehen.

## 1.3 Beispiele für Symmetrische Räume

Eine Klasse von Beispielen für Symmetrische Räume stellen die hyperbolischen Räume dar, die einheitlich konstruiert werden können. Diese Beispiele umfassen bereits alle nichtkompakten Symmetrischen Räume vom Rang 1 bis auf eine Ausnahme, die CAYLEYebene, deren Konstruktion wesentlich schwieriger ist.
Dazu betrachte man einen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ und den Rechtsvektorraum $\mathbb{K}^{s+t}$ der Spaltenvektoren, auf dem die Matrizen $M_{s+t,s+t}\mathbb{K}$ in üblicher Weise von links operieren und sich so - und nur so - mit den $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen identifizieren lassen. Auf diesem Vektorraum hat man standardmäßig eine HERMITEsche Bilinearform der Signatur $(s, t)$ definiert durch:

$$\langle x, y\rangle := x^H \begin{pmatrix} 1_s & 0 \\ 0 & -1_t \end{pmatrix} y \quad \text{für} \quad x, y \in \mathbb{K}^{s+t}$$

Hier bezeichnet die Konjugation $x \mapsto x^H$ die Transposition von Matrizen, gefolgt von der - in $\mathbb{R}$ trivialen - Konjugation $x \mapsto \bar{x}$ in $\mathbb{K}$. Alle Matrizen werden im folgenden entsprechend der Summe $\mathbb{K}^{s+t} = \mathbb{K}^s \oplus \mathbb{K}^t$ wie oben zerlegt. Zunächst betrachte man die Gruppe aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $M$ aus $M_{s+t,s+t}\mathbb{K}$, die diese Bilinearform erhalten, das heißt:

$$M^H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Zentrum dieser Gruppen ist besonders im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu groß und man stellt je nach Körper noch zusätzliche Bedingungen um zu einfachen, zusammenhängenden Untergruppen $G_{s,t}\mathbb{K}$ zu kommen:

- $G_{s,t}\mathbb{R}$**:** die Gruppe $\mathbf{SO}_{s,t}$ der Matrizen mit Determinate 1
- $G_{s,t}\mathbb{C}$**:** die Gruppe $\mathbf{SU}_{s,t}$ der Matrizen mit komplexer Determinante 1
- $G_{s,t}\mathbb{H}$**:** die Gruppe $\mathbf{Sp}_{s,t}$ der Matrizen mit reeller Determinante 1

Die LIEalgebra $\mathfrak{g}_{s,t}\mathbb{K}$ dieser Gruppen ist dann der Vektorraum aller Matrizen der Form:

$$\begin{pmatrix} k_1 & p \\ p^H & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} k_1 = -k_1^H \in M_{s,s}\mathbb{K} \\ k_2 = -k_2^H \in M_{t,t}\mathbb{K} \end{matrix} \quad \text{und} \quad p \in M_{s,t}\mathbb{K}$$

Der Realteil der Spur verschwindet stets, nur im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhält man also die Spurfreiheit $\operatorname{tr} k_1 = -\operatorname{tr} k_2$ als zusätzliche Bedingung. Nun ist die Bilinearform positiv definit auf $\mathbb{K}^s \oplus 0$, negativ definit auf $0 \oplus \mathbb{K}^t$, deshalb bilden die Abbildungen in $G_{s,t}\mathbb{K}$ , die obige Zerlegung von $\mathbb{K}^{s+t}$ respektieren, kompakte Untergruppen

- $K_{s,t}\mathbb{R}$**:** die Untergruppe $\mathbf{S}(\mathbf{O_s} \times \mathbf{O_t})$
- $K_{s,t}\mathbb{C}$**:** die Untergruppe $\mathbf{S}(\mathbf{U_s} \times \mathbf{U_t})$
- $K_{s,t}\mathbb{H}$**:** die Untergruppe $\mathbf{Sp}_s \times \mathbf{Sp}_t$

mit zugehörigen Unteralgebren

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} k_1 = -k_1^H \\ k_2 = -k_2^H \end{matrix}$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zusätzlich $\operatorname{tr} k_1 = -\operatorname{tr} k_2$. Die Matrizen $M$ dieser Untergruppen kommutieren nach Definition mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, erfüllen deshalb $M^H M = 1$ und sind somit fix unter der CARTANinvolution:

$$\Theta : G \to G, \quad M \mapsto M^{-H} \quad \text{mit Differential} \quad \Theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad M \mapsto -M^H$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $-1$ in $\mathfrak{g}$ ist dann das Komplement $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p^H & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p \in M_{s,t}$$

Nun kann man sich überlegen, daß die Dimension eines maximal ABELschen Unterraums in $\mathfrak{p}$ das Minimum von $s$ und $t$ sein muß, also sind

$$\mathbb{K}H^{n+1} = G_{n+1,1}\mathbb{K}/K_{n+1,1}\mathbb{K}$$

Symmetrische Räume vom Rang 1. Um die Struktur dieser Räume näher zu beschreiben, zerlege man die Matrizen der Summe $\mathbb{K}^{n+1} \oplus \mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}$ entsprechend noch weiter. Ein maximal ABELscher Unterraum in $\mathfrak{p}$ ist dann:

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}$$

In dieser Darstellung von $\mathfrak{a}$ ordne die Linearform $\alpha$ jeder Matrix in $\mathfrak{a}$ die Koordinate $a$ zu. Der Vektorraum aller Matrizen zerfällt dann in die direkte Summe von Eigenräumen unter $\mathbf{ad}\,\mathfrak{a}$:

| **Eigenwert** $0$ | **Eigenwert** $\pm\alpha$ | **Eigenwert** $\pm 2\alpha$ |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_3 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_3 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 \\ m_2 & 0 & \mp m_2 \\ 0 & \pm m_1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \mp m_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm m_1 & 0 & -m_1 \end{pmatrix}$ |

Zu positiven Eigenwerten gehören in $\mathfrak{g}$ also die Matrizen:

$$\underline{\mathfrak{n}_\alpha :} \quad \begin{pmatrix} 0 & x^H & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & x^H & 0 \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{K}^n} \qquad \underline{\mathfrak{n}_{2\alpha} :} \quad \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{z} & 0 & z \end{pmatrix}_{z \in Im\,\mathbb{K}}$$

Gemäß der JACOBIidentität kann dann die einzige nichttriviale Klammer in $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_\alpha \oplus \mathfrak{n}_{2\alpha}$ der Kommutator von $x \in \mathfrak{n}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{n}_\alpha$ in $\mathfrak{n}_{2\alpha}$ sein:

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & x^H & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & x^H & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y^H & 0 \\ -y & 0 & y \\ 0 & y^H & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} * & * & x^H y - y^H x \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Die Metrik auf $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ ist durch die KILLINGform und die orthogonale Projektion auf $\mathfrak{p}$ gegeben. Die KILLINGform auf $\mathfrak{g}$ zu bestimmen ist etwas umständlich, aber da $G$ sich als einfach erweist, kann man auch die Bilinearform $\frac{1}{2} Re\,\mathrm{tr}\,XY$ nehmen, denn sie ist invariant, weil der Kommutator zweier Elemente in $\mathbb{K}$ in $Im\,\mathbb{K}$ liegt, und damit Vielfaches der KILLINGform. Das Skalarprodukt ist dann:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} Re\,\mathrm{tr}\,(X - \Theta X)Y$$

Weil $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ symmetrisch operiert, ist die Zerlegung in Eigenräume notwendigerweise orthogonal und das Skalarprodukt verschwindet bis auf:

$$\begin{aligned}
\langle a_1, a_2 \rangle &= a_1 a_2 \\
\langle x_1, x_2 \rangle &= \frac{1}{2} Re(\mathrm{tr}\, b_1 b_2^H + b_1^H b_2) = Re\, b_1^H b_2 \\
\langle z_1, z_2 \rangle &= \frac{1}{2} Re(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = Re\, \bar{z}_1 z_2
\end{aligned}$$

Damit nimmt die kurze Wurzel $\alpha$ auf einen orthonormalen Vektor den Wert 1 an, die Schnittkrümmung liegt deshalb zwischen -1 und -4. Die Metrik entspricht damit den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^n$ und $Im\,\mathbb{K}$. Für spätere Rechnungen sei deshalb die Standard-ONB $A$, $X_s^\mu$, $s = 1, \ldots, n$ und $Z^\nu$ eingeführt, wo $\mu$ bzw. $\nu$ eine ONB-Basis von $\mathbb{K}$ bzw. $Im\,\mathbb{K}$ durchlaufen, etwa 1 plus $i, j, k$ für $\mathbb{H}$, wobei im $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ für $X_s^1$, $X_s^i$ und $Z^i$ nur $X_s$, $Y_s$ bzw. $Z$ geschrieben wird. In dieser Basis lauten die Strukturgleichungen:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\langle A, A \rangle &=& 1 & \qquad & [A, X_s^\mu] &=& X_s^\mu \\
\langle X_s^\mu, X_t^\nu \rangle &=& \delta_{s,t} Re\,\bar{\mu}\nu & & [A, Z^\nu] &=& 2Z^\nu \\
\langle Z^\mu, Z^\nu \rangle &=& Re\,\bar{\mu}\nu & & [X_s^\mu, X_t^\nu] &=& 2\delta_{s,t} Z^{Im\,\bar{\mu}\nu}
\end{array}$$

Alle Matrizen in $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\alpha \oplus \mathfrak{n}_{2\alpha}$ haben nun gemeinsam, daß ihre oberen und unteren Zeilen gleich, ihre linken und rechten Spalten aber invers zueinander sind. Deswegen gibt es nur ein nichttriviales Produkt unter Matrizen in $\mathfrak{n}$

$$\begin{pmatrix} 0 & x^H & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & x^H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y^H & 0 \\ -y & 0 & y \\ 0 & y^H & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^H y & 0 & x^H y \\ 0 & 0 & 0 \\ -x^H y & 0 & x^H y \end{pmatrix}$$

und das Produkt einer solchen Matrix mit einer Matrix aus $\mathfrak{n}$ verschwindet ebenfalls. Deshalb bricht die Expotentialreihe für Matrizen aus $\mathfrak{n}$ sofort ab:

$$\exp \begin{pmatrix} -z & x^H & z \\ -x & 0 & x \\ -z & x^H & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z - \frac{1}{2}x^H x & x^H & +z + \frac{1}{2}x^H x \\ -x & 1 & x \\ -z - \frac{1}{2}x^H x & x^H & 1 + z + \frac{1}{2}x^H x \end{pmatrix}$$

Mit den gleichen Argumenten kann man auch das Produkt zweier solcher Matrizen als Summen der Form $1 + z + x - \frac{1}{2}x^H x$ einfach bestimmen und erhält einen Spezialfall der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel:

$$\exp X \exp Y = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y])$$

Damit kann man auf $\mathfrak{n}$ ein Gruppengesetz einführen

$$\bullet : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n} \quad (X, Y) \mapsto X \bullet Y \quad \text{mit} \quad X \bullet Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$$

so daß die Expotentialabbildung wie oben angegeben nicht nur ein Diffeomorphismus auf $N \subset G$ sondern auch ein Homomorphismus von Gruppen ist und $N$ mit $\mathfrak{n}$ identifiziert.

# 2 Geometrische CLIFFORDbündel

Die Trivialisierung $NAK$ des $K$-Prinzipalbündels $G$ trivialisiert wie gesehen auch alle geometrischen Vektorbündel auf $G/_K$, die also nur durch den Vektorraum der $NA$-linksinvarianten „konstanten" Schnitte und die darauf gegebene Darstellung der LIEalgebra $\mathfrak{k}$ vollständig beschrieben werden. Man kann nun insbesondere diejenigen geometrischen Vektorbündel betrachten, die auf jeder RIEMANNschen Mannigfaltigkeit definiert werden können, solange keine topologischen Hindernisse auftreten. In diesen Bündeln zieht man eine Darstellung von $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/_{\mathfrak{k}}$ über die definierende Darstellung $\mathbf{ad} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ des Tangentialbündels nach $\mathfrak{k}$ zurück.
Es werden so zunächst zwei geometrische Vektorbündel konstruiert, das Bündel der Multivektoren, die mit Hilfe der RIEMANNschen Metrik mit den Differentialformen identifiziert werden können, und das Bündel der prinzipalen Spinoren, das im obigen Sinne im allgemeinen die Wahl einer Spinstruktur erfordert. Der Vektorraum der konstanten Schnitte ist in beiden Fällen $\Lambda\mathfrak{s}$, auf dem $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{k}$ im ersten Fall einfach durch Derivationen operiert. Die Konstruktion der zweiten Darstellung benötigt eine veränderte Algebrastruktur auf $\Lambda\mathfrak{s}$, die CLIFFORDalgebra $\mathcal{C}\!\ell\,\mathfrak{s}$. Dabei wird auch eine CLIFFORDmultiplikation mit Vektoren aus $\mathfrak{s}$ erklärt, die $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$-äquivariant für beide Darstellungen auf $\Lambda\mathfrak{s}$ ist, so daß beide Bündel CLIFFORDbündel sind.
Danach wird $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ identifiziert, so daß man zusätzlich die Struktur einer LIEalgebra auf $\mathfrak{s}$ erhält. Damit kann man das Bild der Zusammenhangsformen in $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ bestimmen, denn diese induzieren den LEVI-CIVITÀ-Zusammenhang auf $G/_K$ bzw. auf der dazu isometrischen LIEgruppe $NA$. Schließlich wird der lineare DIRACoperator auf dem endlichdimensionalen Vektorraum der konstanten Schnitte für beide Bündel berechnet.

## 2.1 Äußere Algebren und CLIFFORDalgebren

Auf der Äußeren Algebra $\Lambda\mathfrak{s}$ eines euklidischen Vektorraumes $\mathfrak{s}$ ist ein Skalarprodukt $\langle , \rangle$ definiert, daß auf zerlegbaren Elementen gleichen Grades durch die GRAMsche Determinante gegeben ist:

$$\langle A_1 \wedge \ldots \wedge A_k, B_1 \wedge \ldots \wedge B_k \rangle = det \begin{pmatrix} \langle A_1, B_1 \rangle & \langle A_2, B_1 \rangle & \cdots & \langle A_k, B_1 \rangle \\ \langle A_1, B_2 \rangle & \langle A_2, B_2 \rangle & \cdots & \langle A_k, B_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_1, B_k \rangle & \langle A_2, B_k \rangle & \cdots & \langle A_k, B_k \rangle \end{pmatrix}$$

Damit wird $\Lambda\mathfrak{s}$ mit seinem Dual $\Lambda\mathfrak{s}^*$ identifiziert, den man andererseits als Vektorraum der alternierenden Formen auf $\mathfrak{s}$ auffassen kann. Die einem Multivektor $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$ zugeordnete Form ist dabei:

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)(X_1, \ldots, X_k) = \langle A_1 \wedge \ldots \wedge A_k, X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \rangle$$

Die Adjungierte $X \perp$, $X \in \mathfrak{s}$, der äußeren Multiplikation $X\wedge$ entspricht unter dieser Identifizierung also dem Einsetzen des Vektors $X$ an die erste Argumentstelle. Zu dieser Interpretation paßt auch, daß $\mathbf{1}$ senkrecht auf **Bild** $X\wedge$ steht und damit $X \perp \mathbf{1} = 0$ gilt. Ansonsten erhält man eine explizite Formel, wenn man obige Determinante etwa nach einer Spalte entwickelt

$$X \perp A_1 \wedge \ldots \wedge A_k = \sum_s (-1)^{s-1} \langle X, A_s \rangle A_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_s \wedge \ldots \wedge A_k$$

wobei die markierten Faktoren $\widehat{A}_s$ hier und im folgenden weggelassen werden. Analog kann man durch Entwickeln obiger Determinante in Shuffles Formeln für die Adjungierte $\omega \perp$ der äußeren Multiplikation mit homogenen Multivektoren herleiten, etwa für $\omega \in \Lambda^2\mathfrak{s}$:

$$\omega \perp A_1 \wedge \ldots \wedge A_k = \sum_{s<t} (-1)^{s+t-1} \langle \omega, A_s \wedge A_t \rangle A_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_s \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_t \wedge \ldots \wedge A_k$$

Für zerlegbare Multivektoren gilt natürlich $(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) \perp = X_k \perp \ldots X_1 \perp$, was dem Einsetzen der $X_1, \ldots, X_k$ in dieser Reihenfolge an die ersten $k$ Argumentstellen entspricht. Dann gilt für Vektoren $(X \wedge Y) \perp = Y \perp X \perp = -X \perp Y \perp$ und somit $(X \perp)^2 = 0$. Die explizite Formel zeigt, daß $X \perp$ eine Superderivation von $\Lambda\mathfrak{s}$ ist:

$$X \perp (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = (X \perp \mathcal{A}) \wedge \mathcal{B} + (-1)^{|\mathcal{A}|} \mathcal{A} \wedge (X \perp \mathcal{B})$$

Dieser Superfaktor hebt sich in der Kombination $X \wedge X \perp$ wieder auf, man erhält eine Derivation. Speziell für die Summe über eine ONB $E_s$ ist dann $\sum E_s \wedge E_s \perp$ eine Derivation, die auf $\mathfrak{s}$ die Identität ist und folglich $\Lambda^k\mathfrak{s}$ mit $k$ multipliziert, obige Summe wird deswegen FERMIonischer Zahloperator genannt und realisiert die Algebragraduierung auf der Äußeren Algebra.
Nach Definition sind dann $X\wedge$ und $X \perp$ graduierte Operatoren auf $\Lambda\mathfrak{s}$ vom Grad 1 bzw. -1. Insbesondere bestimmt jeder Bivektor $\mathcal{A} \in \Lambda^2\mathfrak{s}$ einen Endomorphismus von $\mathfrak{s}$:

$$\mathcal{A} : \quad \mathfrak{s} \to \mathfrak{s} \qquad X \mapsto X \perp \mathcal{A}$$

Umgekehrt läßt sich für jeden Endomorphismus $\mathcal{A}$ von $\mathfrak{s}$ die Bilinearform $\langle \mathcal{A}(\cdot), \cdot \rangle$ genau dann zu einer Linearform auf $\Lambda^2\mathfrak{s}$ fortsetzen, wenn $\mathcal{A} \in \mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ ist, genau dann gibt es also $\mathcal{A} \in \Lambda^2\mathfrak{s}$, so daß für alle $X, Y \in \mathfrak{s}$ gilt:

$$\langle \mathcal{A}(X), Y \rangle = \langle \mathcal{A}, X \wedge Y \rangle = \langle X \perp \mathcal{A}, Y \rangle$$

Also sind $\Lambda^2\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ kanonisch isomorph. Die LIEklammer ist der Kommutator der zugehörigen Endomorphismen, das heißt für Bivektoren:

$$\begin{aligned} [A_1 \wedge A_2, B_1 \wedge B_2] \quad = \quad & \langle A_1, B_1 \rangle A_2 \wedge B_2 - \langle A_1, B_2 \rangle A_2 \wedge B_1 \\ & - \langle A_2, B_1 \rangle A_1 \wedge B_2 + \langle A_2, B_2 \rangle A_1 \wedge B_1 \end{aligned}$$

Neben $X\wedge$ und $X\perp$ kann man auch deren Differenz $X\cdot = X\wedge - X\perp$ betrachten, die nach Definition schiefadjungiert ist. Benutzt man $X\perp$ als Superderivation, so erkennt man die definierende Eigenschaft der CLIFFORDmultiplikation:

$$\begin{aligned} X\cdot Y\cdot + Y\cdot X\cdot &= -X\perp Y\wedge - Y\wedge X\perp - Y\perp X\wedge - X\wedge Y\perp \\ &= -\langle X,Y\rangle + Y\wedge X\perp - Y\wedge X\perp - \langle Y,X\rangle + \ldots - \ldots \\ &= -2\langle X,Y\rangle \end{aligned}$$

Insbesondere ist $X\cdot$ invertierbar und $(X\cdot)^{-1} = -\frac{X\cdot}{\|X\|^2}$ Die Operatoren $X\cdot$ erzeugen eine Algebra von Operatoren auf $\Lambda\mathfrak{s}$, die CLIFFORDalgebra $\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$. Eine Basis von $\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$ bilden die Polynome in einer ONB von $\mathfrak{s}$, in denen jeder Basisvektor höchstens einmal vorkommt, und in dieser Basis sieht man sofort, daß

$$\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s} \to \Lambda\mathfrak{s} \qquad \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}\cdot\mathbf{1}$$

ein natürlicher Isomorphismus von $\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$ mit $\Lambda\mathfrak{s}$ ist. Im folgenden wird die CLIFFORDalgebra deshalb als Vektorraum mit Skalarprodukt mit $\Lambda\mathfrak{s}$ identifiziert. Nur die Multiplikation „$\cdot$“ ist dann anders, so daß die direkte Identifizierung $A_1\wedge\ldots\wedge A_k = A_1\cdot\ldots\cdot A_k$ nur dann gelingt, wenn die $A_s$ alle orthogonal zueinander sind! Damit kann man nun den Funktor $\Lambda$, der einem Vektorraum seine Äußere Algebra zuordnet, zu einem Funktor $\mathcal{C}\ell$ umschreiben. Allerdings ist die Fortsetzung $\mathcal{C}\ell\,f$ eines Morphismus $f$ nur dann ein Algebrahomomorphismus, wenn $f$ eine Isometrie ist!
In der komplexifizierten CLIFFORDalgebra $\mathbb{C}\ell\,\mathfrak{s} = \mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}\otimes\mathbb{C}$ definiert zum Beispiel die Einschränkung von $\mathcal{C}\ell\,i$ einen linearen Isomorphismus der obigen „negativen“ mit einer „positiven“ CLIFFORDalgebra, die oft bevorzugt wird, da in ihr die Vektoren $X\star = X\wedge + X\perp$ selbstadjungierte Operatoren sind.
Nun ist $(-id)$ eine Isometrie von $\mathfrak{s}$ und der zugehörige Algebrahomomorphismus $\mathcal{C}\ell\,(-id)$ definiert neben der $\mathbb{Z}$-Graduierung als Vektorraum, die $\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$ von $\Lambda\mathfrak{s}$ erbt, noch eine $\mathbb{Z}_2$-Algebragraduierung nach Eigenräumen,

$$\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s} = \mathcal{C}\ell^{\,even}\mathfrak{s} \oplus \mathcal{C}\ell^{\,odd}\mathfrak{s}$$

die einfach die $\mathbb{Z}$-Graduierung $\bmod 2$ ist. So entsteht die Struktur einer Superalgebra mit dem Superkommutator:

$$\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} := \mathcal{A}\mathcal{B} - (-1)^{|A||B|}\mathcal{B}\mathcal{A}$$

Die Supervariante der JACOBIidentität zeigt, daß $\{X,\cdot\}$ eine Superderivation von $\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$ ist, die auf $\mathfrak{s}$ mit der Superderivation $-2X\perp$ der Äußeren Algebra $\Lambda\mathfrak{s}$ übereinstimmt. Somit gilt für alle $\mathcal{A}\in\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$ und $X\in\mathfrak{s}$

$$X\perp\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\{X,\mathcal{A}\}$$

denn beide Algebren werden bereits durch die ihnen gemeinsamen Mononome $A_1\wedge\ldots\wedge A_k = A_1\cdot\ldots\cdot A_k$ in paarweise orthogonalen Vektoren $A_s$ aufgespannt.

Die äußere Multiplikation $X\wedge$ mit $X \in \mathfrak{s}$ kann man entsprechend in einen Superantikommutator umformulieren:

$$X \wedge \mathcal{A} = (X \cdot + X \perp)\mathcal{A} = X\mathcal{A} - \frac{1}{2}\Big(X\mathcal{A} - (-1)^{|\mathcal{A}|}\mathcal{A}X\Big) =: \frac{1}{2}\{X, \mathcal{A}\}_+$$

Für ein $\mathcal{A}$, das $\{X, \mathcal{A}\} = 0$ für alle $X \in \mathfrak{s}$ erfüllt, folgt zum Beispiel $\mathcal{A} \in \mathbb{R}\mathbf{1}$ aus $\langle\{X, \mathcal{A}\}, \mathcal{B}\rangle = -2\langle\mathcal{A}, X \wedge \mathcal{B}\rangle$. In ähnlicher Weise folgert man, daß $\mathcal{A} \mapsto \langle\mathcal{A}, \mathbf{1}\rangle$ eine Spur auf $\mathcal{C}\ell\, \mathfrak{s}$ ist, denn für gerades $\mathcal{A}$ ist $\langle X \cdot \mathcal{A}, \mathbf{1}\rangle = 0 = \langle\mathcal{A} \cdot X, \mathbf{1}\rangle$ und sonst formuliert man $2\langle X \wedge \mathcal{A}, \mathbf{1}\rangle = 0$ um zu:

$$\langle X \cdot \mathcal{A}, \mathbf{1}\rangle = -(-1)^{|\mathcal{A}|}\langle\mathcal{A} \cdot X, \mathbf{1}\rangle$$

Zum Beispiel gilt für ein $\omega \in \mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ und alle $X \in \mathfrak{s}$ wie gehabt $\{\frac{1}{2}\omega, X\} = X \perp \omega$, und mit der JACOBIidentität - hier ohne Superfaktoren - folgt

$$\{\{\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2\}, X\} = \{\frac{1}{2}[\omega_1, \omega_2], X\}$$

oder die Gleichheit

$$\{\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2\} = \frac{1}{2}[\omega_1, \omega_2]$$

modulo $\mathbb{R}\mathbf{1}$. Aber beide Seiten stehen senkrecht auf $\mathbb{R}\mathbf{1}$, die linke als Kommutator, die rechte als Element von $\Lambda^2\mathfrak{s}$. Die Abbildung $\Lambda^2\mathfrak{s} \to \mathcal{C}\ell^{\,even}\,\mathfrak{s}$, $\omega \mapsto \frac{1}{2}\omega$ ist somit ein LIEalgebrahomomorphismus. Mit $A \cdot B = A \wedge B - \langle A, B\rangle$ nach Definition läßt sich das auch einfach nachrechnen.
Man kann nun auch einen bemerkenswerten linearen Isomorphismus zwischen der oben erwähnten „positiven" und der hier benutzten „negativen" CLIFFORDalgebra angeben, der belegt, daß beide vollkommen gleichberechtigt sind. Denn nach Definition wird die positive Algebra erzeugt durch die Operatoren:

$$\begin{aligned} X \star \mathcal{A} &= (X \wedge + X \perp)\mathcal{A} \\ &= \frac{1}{2}\{X, \mathcal{A}\}_+ - \frac{1}{2}\{X, \mathcal{A}\} \\ &= (-1)^{|\mathcal{A}|}\mathcal{A} \cdot X \end{aligned}$$

Iteriert man diese Formel, so gelangt man in $\Lambda\mathfrak{s}$ zur Gleichung:

$$X_1 \star \ldots \star X_k = (-1)^{\frac{k}{2}(k-1)} X_k \cdot \ldots \cdot X_1$$

Weil die $X\star$ nach Definition selbstadjungiert sind, erweist sich nun auch die CLIFFORDmultiplikation mit $X \in \mathfrak{s}$ von rechts als schiefsymmetrisch, denn haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gleiche Parität, so gilt trivialerweise $\langle\mathcal{A}X, \mathcal{B}\rangle = 0 = -\langle\mathcal{A}, \mathcal{B}X\rangle$ und sonst folgt die Schiefsymmetrie aus:

$$\langle X \star \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle - \langle\mathcal{A}, X \star \mathcal{B}\rangle = 0 = (-1)^{|\mathcal{A}|}\langle\mathcal{A}X, \mathcal{B}\rangle - (-1)^{|\mathcal{B}|}\langle\mathcal{A}, \mathcal{B}X\rangle$$

Schreibt man $A \wedge B \in \Lambda^2\mathfrak{s}$ wie oben als Superantikommutator $\frac{1}{2}(AB - BA)$, erkennt man, daß Links- und Rechtsmultiplikation und damit auch Kommutator mit $\omega \in \mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ schiefsymmetrisch sind. So erhält man zwei orthogonale Linksdarstellungen $\times$ von $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ auf $C\ell\,\mathfrak{s}$:

- **die Spinordarstellung:** $\omega \times \mathcal{A} = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{A}$
- **die Standarddarstellung:** $\omega \times \mathcal{A} = \{\frac{1}{2}\omega, \mathcal{A}\}$

Im ersten Fall ist $\times$ nämlich gerade der oben beschriebene Homomorphismus von LIEalgebren, während man im zweiten Fall noch die JACOBIidentität bemühen muß, um zu zeigen, daß $\times$ eine Darstellung ist.
Weil die Multiplikationen mit $\frac{1}{2}\omega$ von rechts und $X\cdot$ von links offenbar vertauschen, vertragen sich beide Darstellungen mit der CLIFFORDmultiplikation:

$$\omega \times \big(X\mathcal{A}\big) = \{\frac{1}{2}\omega, X\}\mathcal{A} + X\big(\omega \times \mathcal{A}\big)$$

Deswegen hat man auf den zugehörigen trivialen Vektorbündeln mit der Metrik und dem induzierten Zusammenhang die Struktur von CLIFFORDbündeln, auf denen die DIRACoperatoren definiert, elliptisch und formal selbstadjungiert sind. Das nächste Ziel ist es, die Wirkung dieser beiden Differentialoperatoren auf linksinvarianten Schnitten zu beschreiben.
Jede Darstellung der CLIFFORDalgebra $C\ell\,\mathfrak{s}$ auf einem Vektorraum $V$ mit Metrik $\langle,\rangle$, bezüglich der jedes $X \in \mathfrak{s}$ schiefadjungiert operiert, ermöglicht die Konstruktion weiterer orthogonaler Darstellungen von $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$, die sich nach Konstruktion ebenfalls mit der CLIFFORDmultiplikation vertragen. Auf diese Weise erhält man die Familie der Spinorbündel mit zugehörigen DIRACoperatoren. Die Bedingung an die Metrik stellt dann sicher, daß eine solche Darstellung nach Komplexifizierung äquivalent zu einer orthogonalen Summe von minimalen Linksidealen in $\mathbb{C}\ell\,\mathfrak{s}$ ist.
Insofern ist die Linksdarstellung von $C\ell\,\mathfrak{s}$ auf $\mathbb{C}\ell\,\mathfrak{s}$ die prinzipale Spinordarstellung. Fragt man nach Eigenwerten und Eigenspinoren, so reicht es vollkommen aus, sich nur auf dieses Spinorbündel zu konzentrieren, denn multipliziert man ein Element eines Linksideals aufgefaßt als konstanten Schnitt von links mit einem solchen Eigenspinor, so erhält man Eigenspinoren im zugehörigen Spinorbündel. Lediglich die Multiplizitäten erfordern darüber hinausgehende Überlegungen.
Um minimale Linksideale der komplexifizierten CLIFFORDalgebra zu beschreiben, wähle man eine orthogonale komplexe Struktur $J$ auf $\mathfrak{s}$ oder einer Hyperebene $\{E_0\}^\perp$, $\| E_0 \| = 1$, falls $\mathfrak{s}$ gerade bzw. ungerade Dimension $2N$ oder $2N+1$ hat. Dann gibt es in $\mathfrak{s}$ bzw. $\{E_0\}^\perp$ ON-Basen der Form $E_1, JE_1, \ldots, E_N, JE_N$. Die „holomorphen“ Volumenformen

$$vol = (E_1 - iJE_1) \cdot \cdots \cdot (E_N - iJE_N)$$

oder im Fall ungerader Dimension

$$vol_\pm = (E_0 \pm i)(E_1 - iJE_1) \cdot \cdots \cdot (E_N - iJE_N)$$

sind dann unabhängig von der Wahl einer ONB dieser Form und erzeugen minimale Linksideale in $\mathcal{C}\ell\, \mathfrak{s}$, die als Vektorräume isomorph sind zu der Äußeren Algebra oder CLIFFORDalgebra der isotropen Unterräume „antiholomorpher" Vektoren, aufgespannt von den $E_s + iJE_s$ ( FULTON & HARRIS [2] ).
Ist die Dimension von $\mathfrak{s}$ gerade, so kann man dieses Linksideal ferner in die zwei Halbspinräume $\mathcal{C}\ell^{\,even}\mathfrak{s} \cdot vol$ und $\mathcal{C}\ell^{\,odd}\mathfrak{s} \cdot vol$ der links- bzw. rechtshändigen Spinoren unterteilen; bei ungerader Dimension scheitert diese Unterscheidung an $E_0 \cdot vol_\pm = \pm i\ vol_\pm$. Der DIRACoperator bildet dann die linkshändigen Spinoren in die rechtshändigen ab und umgekehrt. Er wurde von DIRAC um 1932 bschrieben und ist damit der Urvater aller anderen DIRACoperatoren. Eine genaue Übersicht der irreduzibelen Spinorbündel findet sich zum Beispiel in LAWSON & MICHELSOHN [7].

## 2.2 EUKLIDische LIEalgebren

Nun sei $\mathfrak{s}$ nicht nur EUKLIDischer Vektorraum wie bisher, sondern trage auch die Struktur einer LIEalgebra mit Klammer $[,] : \Lambda^2\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}, X \wedge Y \mapsto [X, Y]$. Alle Informationen über das Verhältnis von Metrik und Klammer sind dann in der Koklammer $\Delta : \mathfrak{s} \to \Lambda^2\mathfrak{s}, Z \mapsto \Delta Z$, der Adjungierten zur Klammer, enthalten:

$$\langle \Delta Z, X \wedge Y \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad X \perp \Delta Z = \langle Z, [X, \cdot] \rangle^\flat$$

$\Delta$ ist offenbar linear und hat eine Expansion in eine ONB von $\Lambda^2\mathfrak{s}$ der Form:

$$\Delta Z = \sum_{s<t} \langle Z, [E_s, E_t] \rangle E_s \wedge E_t = \frac{1}{2} \sum_{s,t} \langle Z, [E_s, E_t] \rangle E_s \wedge E_t$$

In Algebren $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$, die wie oben beschrieben zu einem symmetrischen Raum gehören, summiert man zweckmäßigerweise über eine ONB $A_s, N_\gamma$, die an die orthogonale Zerlegung in Eigenräume zu positiven Wurzeln von $\mathfrak{a}$ adaptiert ist. Dann kann man die Koklammer für $Z_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha$ wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \Delta Z_\alpha &= \sum_{s,\gamma} \langle Z_\alpha, [A_s, N_\gamma] \rangle A_s \wedge N_\gamma + \sum_{\gamma<\delta} \langle Z_\alpha, [N_\gamma, N_\delta] \rangle N_\gamma \wedge N_\delta \\ &= \sum_{s,\gamma=\alpha} \gamma(A_s) A_s \wedge \langle Z_\alpha, N_\gamma \rangle N_\gamma + \Delta_\mathfrak{n} Z_\alpha \\ &= \alpha^\flat \wedge Z_\alpha + \Delta_\mathfrak{n} Z_\alpha \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathfrak{n}$ eine EUKLIDische Unteralgebra mit eigener Koklammer $\Delta_\mathfrak{n}$, die aber im Rang 1 Fall nur auf $\mathfrak{n}_{(2)}$ ungleich 0 ist wegen $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}_{(2)}$.

Diese Überlegung ermöglicht es, die Koklammer auf $\mathfrak{s}$ schnell zu bestimmen:

$$\begin{array}{llcll}
\underline{\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}:} & \Delta A & = & 0 & \\
 & \Delta X_s & = & A \wedge X_s & s = 1, \dots, n \\[1em]
\underline{\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}:} & \Delta A & = & 0 & \\
 & \Delta X_s & = & A \wedge X_s & s = 1, \dots, n \\
 & \Delta Y_s & = & A \wedge Y_s & \\
 & \Delta Z & = & 2A \wedge Z + 2\sum_s X_s \wedge Y_s & \\[1em]
\underline{\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}:} & \Delta A & = & 0 & \\
 & \Delta X_s^\lambda & = & A \wedge X_s^\lambda & s = 1, \dots, n, \lambda = 1, i, j, k \\
 & \Delta Z^\lambda & = & 2A \wedge Z^\lambda + \sum_{s,\mu} X_s^\mu \wedge X_s^{\mu\lambda} & \lambda = i, j, k
\end{array}$$

Der scheinbare Unterschied zwischen $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ und $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$ verschwindet, wenn man auf dem $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$ noch weiter addiert, zum Beispiel:

$$\Delta Z^i = 2A \wedge Z^i + 2\sum_s \left(X_s^1 \wedge X_s^i - X_s^j \wedge X_s^k\right)$$

Nun ist auf einer EUKLIDischen LIEalgebra der LEVI-CIVITÀ-Zusammenhang durch die KOSZULformel definiert mit den Eigenschaften:

- **Metrizität:** $\langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0$
- **Torsionsfreiheit:** $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Die Metrizität impliziert, daß $\nabla_Z : X \mapsto \nabla_Z X$ in $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ liegt, also durch die Zusammenhangsform $\omega_Z \in \Lambda^2\mathfrak{s}$ beschrieben werden kann:

$$\nabla_Z X = X \perp \omega_Z \quad \text{wobei} \quad \langle \omega_Z, X \wedge Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle$$

Eine explizite Formel für die $\omega_Z$ läßt sich angeben, wenn man die KOSZULformel umformuliert. Dazu definiert man zunächst zwei Elemente der Äußeren Algebra $\Lambda\mathfrak{s}$, die auch später immer wieder auftreten werden und dann die Vorfaktoren rechtfertigen:

- KOSZUL**trivektor:** $\Omega = \frac{1}{4}\sum E_s \wedge \Delta E_s$
- WEYL**vektor:** $R = \frac{1}{2}\sum \nabla_{E_s} E_s = \frac{1}{2}\sum E_s \perp \omega_{E_s}$

Der KOSZULtrivektor repräsentiert bis auf einen Faktor die 3-Form, die durch Alternieren aus der Trilinearform $\langle X, [Y, Z]\rangle$ entsteht:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \mathbf{Alt}\,(\langle X, [Y, Z]\rangle) &= \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle \\
&= \sum \big(\langle E_s, X\rangle\langle \Delta E_s, Y \wedge Z\rangle + \langle E_s, Y\rangle\langle \Delta E_s, Z \wedge X\rangle \\
&\qquad + \langle E_s, Z\rangle\langle \Delta E_s, X \wedge Y\rangle\big) \\
&= \sum \langle \Delta E_s, E_s \perp (X \wedge Y \wedge Z)\rangle \\
&= \langle 4\Omega, X \wedge Y \wedge Z\rangle
\end{aligned}$$

womit die KOSZULformel sich umschreiben läßt zu:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_Z, X \wedge Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle\Big) \\
&= -\langle Z, [X, Y]\rangle + \frac{1}{2}\Big(\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle\Big) \\
&= \langle -\Delta Z, X \wedge Y\rangle + \langle 2\Omega, X \wedge Y \wedge Z\rangle \\
&= \langle -\Delta Z + Z \perp 2\Omega, X \wedge Y\rangle
\end{aligned}$$

Insbesondere kann man den WEYLvektor auch schreiben als

$$R = \frac{1}{2}\sum E_s \perp \Big(-\Delta E_s + E_s \perp 2\Omega\Big) = -\frac{1}{2}\sum E_s \perp \Delta E_s$$

Im Fall $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{n}$ strikt positiv, orthogonal graduiert, und deswegen gilt $N_\gamma \perp \Delta_{\mathfrak{n}} N_\gamma = 0$ für $N_\gamma \in \mathfrak{n}_\gamma$. Somit ist für die EUKLIDische LIEalgebra $\mathfrak{n}$ selbst $R_{\mathfrak{n}} = 0$, und obige Zerlegung der Koklammer $\Delta$ auf $\mathfrak{s}$ führt zu

$$R = -\frac{1}{2}\sum N_\gamma \perp \big(\gamma^\flat \wedge N_\gamma\big) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma > 0} \gamma^\flat$$

das heißt $R$ entspicht der halben Summe aller positiven Wurzeln. Auch den KOSZULtrivektor kann man in diesem Fall leichter beschreiben, wegen $\Delta = 0$ auf $\mathfrak{a}$ braucht man nur über eine ONB von $\mathfrak{n}$ zu summieren und alle Terme der Form $\gamma^\flat \wedge N_\gamma \wedge N_\gamma$ fallen weg, so daß $\Omega = \Omega_{\mathfrak{n}}$! In den obigen Beispielen berechnet man dann:

$\underline{\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}:}$ $\quad R = \frac{n}{2}A \qquad \Omega = 0$

$\underline{\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}:}$ $\quad R = (n+1)A \qquad \Omega = \frac{1}{2}\sum_s Z \wedge X_s \wedge Y_s$

$\underline{\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}:}$ $\quad R = (2n+3)A \qquad \Omega = \frac{1}{4}\sum_{s,\mu,\lambda} Z^\lambda \wedge X_s^\mu \wedge X_s^{\mu\lambda}$

## 2.3 Die linearen DIRACoperatoren

Als erstes Beispiel betrachte man den linearen DIRACoperator $D_\Lambda$, der zur Standarddarstellung von $\mathfrak{so}\,\mathfrak{s}$ auf den Multivektoren $\Lambda\mathfrak{s}$ gehört. Dazu formuliere man zunächst den Superkommutator mit $X \cdot Y$ in der CLIFFORDalgebra um zu einem Operator auf $\Lambda\mathfrak{s}$, indem man $\mathcal{A} \cdot X \cdot Y = (-1)^{|\mathcal{A}|}(X \star \mathcal{A}) \cdot Y = -Y \star X \star \mathcal{A}$ benutzt:

$$\{XY, \quad\} = X \cdot Y \cdot + Y \star X \star = \ldots = 2Y \wedge X \perp - 2X \wedge Y \perp$$

Nach kleiner Umstellung folgt:

$$\begin{aligned} X\{\frac{1}{2}YZ,\ \} \quad &= \quad -(X \wedge Y \wedge Z \perp + Z \wedge X \wedge Y \perp) + (\langle X, Y\rangle Z \perp - \langle Z, X\rangle Y \perp) \\ &\quad + (Z \wedge X \perp Y \perp + Y \wedge Z \perp X \perp) \end{aligned}$$

so daß man erhält:

$$\begin{aligned} &-X\{\frac{1}{2}YZ,\ \} + Y\{\frac{1}{2}ZX,\ \} + Z\{\frac{1}{2}XY,\ \} \\ &= \quad -2Y \wedge Z \wedge X \perp + 2X \wedge Y \perp Z \perp - 2\langle X, Y\rangle Z \perp + 2\langle Z, X\rangle Y \perp \\ &= \quad -2(Y \wedge Z) \wedge X \perp - 2X \wedge (Y \wedge Z) \perp - 2(X \perp (Y \wedge Z)) \perp \end{aligned}$$

Damit kann man nun den Operator $D_\Lambda$ zusammensummieren:

$$\begin{aligned} D_\Lambda &= \sum_s E_s\{\frac{1}{2}\omega_{E_s},\ \} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{s,t,r}\langle \omega_{E_s}, E_t \wedge E_r\rangle E_s\{\frac{1}{2}E_tE_r,\ \} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{s,t,r}\Big(-\langle \Delta E_s, E_t \wedge E_r\rangle + \langle \Delta E_t, E_r \wedge E_s\rangle + \langle \Delta E_r, E_s \wedge E_t\rangle\Big)E_s\{\frac{1}{2}E_tE_r,\ \} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{s,t,r}\langle \Delta E_s, E_t \wedge E_r\rangle\Big(-E_s\{\frac{1}{2}E_tE_r,\ \} + E_t\{\frac{1}{2}E_rE_s,\ \} + E_r\{\frac{1}{2}E_sE_t,\ \}\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{s,t,r}\langle \Delta E_s, E_t \wedge E_r\rangle\Big((E_t \wedge E_r) \wedge E_s \perp + E_s \wedge (E_t \wedge E_r) \perp + E_s \perp (E_t \wedge E_r)\Big) \\ &= -\sum_s\Big(\Delta E_s \wedge E_s \perp + E_s \wedge \Delta E_s \perp\Big) + 2R \perp \end{aligned}$$

In der dritten Zeile wurde dabei die KOSZULformel verwendet. Die in dieser Gleichung aufscheinenden Summen

$$d = -\sum_s \Delta E_s \wedge E_s \perp \quad \text{sowie} \quad d^* = -\sum_s E_s \wedge \Delta E_s \perp$$

sind jedermann in etwas anderer Form bekannt. Benutzt man nämlich die Formel für die $\Delta E_s \perp, \Delta E_s \in \Lambda^2\mathfrak{s}$, so erkennt man in

$$\begin{aligned} & d^*(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \\ &= -\sum_{s,t<r} (-1)^{t+r-1} \langle \Delta E_s, A_t \wedge A_r \rangle E_s \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_t \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_r \wedge \ldots \wedge A_k \\ &= \sum_{t<r} (-1)^{t+r} [A_t, A_r] \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_t \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_r \wedge \ldots \wedge A_k \end{aligned}$$

den Randoperator der LIEalgebrahomologie und somit in seinen offensichtlich adjungierten Operator

$$\begin{aligned} d(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) &= -\sum_{s,t} (-1)^{t-1} \langle E_s, A_t \rangle \Delta E_s \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_t \wedge \ldots \wedge A_k \\ &= -\sum_{t} (-1)^{t-1} \Delta A_t \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{A}_t \wedge \ldots \wedge A_k \end{aligned}$$

das äußere Differential auf linksinvarianten Differentialformen. Der linearisierte DIRACoperator ist also im wesentlichen der Operator $d + d^*$, dessen Kern mit der LIEalgebrahomologie identifiziert werden kann.
Im Falle einer LIEalgebra $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ wie oben kommt es nun zu einer erheblichen Vereinfachung dieser Darstellung des DIRACoperators. Zunächst braucht man wegen $\Delta A = 0, A \in \mathfrak{a}$ nur über eine ONB $E_\gamma$ von $\mathfrak{n}$ summieren, die adaptiert an die orthogonale Zerlegung in Wurzelräume ist. Die Koklammer zerlegt sich dann wie gehabt und es folgt:

$$\begin{aligned} D_\Lambda &= -\sum_\gamma \Big( (\gamma^\flat \wedge E_\gamma + \Delta_\mathfrak{n} E_\gamma) \wedge E_\gamma \perp + E_\gamma \wedge (\gamma^\flat \wedge E_\gamma + \Delta_\mathfrak{n} E_\gamma) \perp \Big) + 2R \perp \\ &= -\sum_\gamma \Big( \gamma^\flat \wedge E_\gamma \wedge E_\gamma \perp + E_\gamma \wedge E_\gamma \perp \gamma^\flat \perp \Big) + 2R \perp - \\ &\qquad\qquad - \sum_\gamma \Big( \Delta_\mathfrak{n} E_\gamma \wedge E_\gamma \perp + E_\gamma \wedge \Delta_\mathfrak{n} E_\gamma \perp \Big) \end{aligned}$$

Weil $\gamma^\flat \perp, \gamma^\flat \in \mathfrak{a}$ mit $E_\gamma \wedge E_\gamma \perp, E_\gamma \in \mathfrak{n}$ kommutiert, kann man die erste Summe auch schreiben als

$$\sum_\gamma \gamma^\flat \star E_\gamma \wedge E_\gamma \perp$$

Dieser Operator ist ähnlich wie der FERMIonische Zahloperator gebaut und $\star$-multipliziert einen Multivektor $\mathcal{A} \wedge \mathcal{N} \in \Lambda\mathfrak{s} \cong \Lambda\mathfrak{a} \otimes \Lambda\mathfrak{n}$ mit dem zu seinem Gewicht unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{a}$ gehörenden Vektor $W \in \mathfrak{a}$, der nur von $\mathcal{N}$ abhängt $W = W_\mathcal{N}$. Die zweite Summe in der Darstellung von $D_\Lambda$ ist wegen $R_\mathfrak{n} = 0$ der DIRACoperator $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ der EUKLIDischen LIEalgebra $\mathfrak{n}$. Dieser

Operator wirkt nicht auf $\mathcal{A} \in \Lambda\mathfrak{a}$, sondern antikommutiert nur damit aufgrund der $E_\gamma\wedge$- bzw. $E_\gamma \perp$-Faktoren. Somit gilt

$$D_\Lambda(\mathcal{A} \wedge \mathcal{N}) = (2R \perp -W_\mathcal{N}\star)\mathcal{A} \wedge \mathcal{N} + (-1)^{|\mathcal{A}|}\mathcal{A} \wedge D_{\Lambda,\mathfrak{n}}\mathcal{N}$$

bzw. für den modifizierten linearen Operator $D_{\Lambda,lin} = D_\Lambda + R\cdot$

$$D_{\Lambda,lin}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{N}) = (R - W_\mathcal{N}) \star \mathcal{A} \wedge \mathcal{N} + (-1)^{|\mathcal{A}|}\mathcal{A} \wedge D_{\Lambda,\mathfrak{n}}\mathcal{N}$$

Bemerkenswerterweise tritt ganz natürlich die positive CLIFFORDmultiplikation auf, obwohl das Problem ursprünglich allein mit der negativen formuliert worden war. Der Übergang zwischen beiden Algebren vertauscht im wesentlichen Links- und Rechtsmultiplikation, so daß dieser Vorgang plausibel wird, wenn man bedenkt, daß der DIRACoperator auf Multivektoren auch von rechts mit der Zusammenhangsform multipliziert.
Einfacher sind die Rechnungen bei der Spinordarstellung. Hier ist der lineare DIRACoperator $D_\$$ die Linksmultiplikation mit dem Element:

$$\begin{aligned}
\sum E_s \cdot \frac{1}{2}\omega_{E_s} &= \frac{1}{2}\sum E_s \cdot \big(-\Delta E_s + E_s \perp 2\Omega\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum \big(-E_s \wedge \Delta E_s + E_s \perp \Delta E_s + E_s \wedge E_s \perp 2\Omega\big) \\
&= -2\Omega - R + 3\Omega \\
&= \Omega - R
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile tritt der FERMIonische Zahloperator auf, der hier $\Lambda^3\mathfrak{s} \ni \Omega$ mit 3 multipliziert. Der modifizierte lineare Operator $D_{\$,lin} = D_\$ + R\cdot$ ist also die Linksmultiplikation mit dem KOSZULtrivektor $\Omega$.

# 3 Die Eigenwerte der linearen Operatoren

Die beiden oben beschriebenen CLIFFORDbündel der Multivektoren und der prinzipalen Spinoren sind auf Symmetrischen Räumen trivial. Der Modul der globalen Schnitte ist somit das Tensorprodukt $C^\infty NA \otimes \Lambda\mathfrak{s}$, so daß man den endlichdimensionalen Vektorraum $\Lambda\mathfrak{s}$ mit den konstanten, das heißt eigentlich $NA$-linksinvarianten Schnitten $1 \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ identifizieren kann. Die beiden DIRACoperatoren $D_\Lambda$ bzw. $D_\$$ operieren bereits auf den konstanten Schnitten, und lassen sich deshalb wie folgt zerlegen:

$$D(f \otimes \mathcal{X}) = grad\ f \cdot \mathcal{X} + f \otimes D\mathcal{X}$$

so daß sie sich nur um den linearen Operator $D$ auf $\Lambda\mathfrak{s}$ unterscheiden, $grad\ f$ ist hier als Schnitt des Tangentialbündels $C^\infty NA \otimes \mathfrak{s}$ zu verstehen.
Die Modifikation $D + R\cdot$ des linearen Operators $D$ auf $\Lambda\mathfrak{s}$ ist wie bereits gesehen selbstadjungiert und deswegen orthogonal diagonalisierbar. In Kenntnis

seiner Eigenwerte und Eigenvektoren kann man mit der wichtigen Funktion $y \in C^\infty NA$ Eigenschnitte von $D$ konstruieren, die Verallgemeinerungen der Eigenfunktionen $y^z$, $z \in \mathbb{C}$, aller $G$-invarianten, skalaren Differentialoperatoren auf $G/_K$ sind. Im skalaren Fall bilden nach HARISH-CHANDRA bereits die Funktionen $y^{ir+\|R\|}$, $r \in \mathbb{R}$, zu allen Spitzen $NA$ des Symmetrischen Raums $G/_K$ ein vollständiges Distributionensystem auf $C_0^\infty G/_K$ und definieren die unitäre FOURIERtransformation von $L^2 G/_K$ in einen $L^2$-Raum über den Parametern „*Spitze* $\times\, \mathbb{R}$". Eine genauere Untersuchung der so konstruierten Eigenschnitte könnte somit zeigen, daß dieses System von Eigenschnitten ebenfalls vollständig ist. Mit diesen Eigenschnitten kann man dann etwa „EISENSTEINreihen" zum DIRACoperator $D$ definieren.
Danach werden deshalb die Eigenwerte und Eigenvektoren der modifizierten linearen Operatoren der Spinoren und Multivektoren auf den reell- und komplex-hyperbolischen Räumen, sowie der Spinoren auf den quaternional-hyperbolischen Räumen bestimmt. Der Operator der Multivektoren ist in diesen Räumen zu kompliziert, wie man am Beispiel des Spektrum auf der Ebene $\mathbb{HH}^2$ erkennt.

## 3.1 Lineare Eigenwerte und Spektrum

Sei $\mathfrak{V}$ ein geometrisches CLIFFORDbündel, assoziiert an eine orthogonale Darstellung von $\mathfrak{k}$ auf einem euklidischen Vektorraum $V$ und mit einer $\mathfrak{k}$-äquivarianten CLIFFORDmultiplikation $\cdot$ ausgestattet wie am Ende des ersten Kapitels. Dann gilt für den Zusammenhang $\nabla$ auf $\mathfrak{V}$, daß $\nabla_A = 0$ für alle konstanten Schnitte. Deswegen antikommutieren der lineare Operator $D : V \to V$ und die CLIFFORDmultiplikation mit $A$ beinahe:

$$\begin{aligned} DAv &= \sum E_s \cdot \nabla_{E_s}(A \cdot v) \\ &= \sum E_s \cdot A \cdot \nabla_{E_s} v + \sum E_s \cdot (\nabla_{E_s} A) \cdot v \\ &= -ADv - 2\nabla_A v - \left(\sum E_s \cdot [A, E_s]\right) \cdot v \end{aligned}$$

wo der zweite Term verschwindet und man $\nabla_{E_s} A - \nabla_A E_s = -[A, E_s]$ benutzt. Summiert man dann über eine adaptierte ONB $E_\alpha$, so erhält man für die letzte Summe $\sum_{\alpha>0} \alpha(A) = 2\langle R, A\rangle = -\{R, A\}$, damit gilt

$$\{D, A\} = -\{R, A\}$$

und schließlich $\{D_{lin}, A\} = 0$ für den modifizierten Operator $D_{lin} = D + R\cdot$. Nun muß man mindestens eine Funktion auf $NA$ kennen, um Eigenfunktionen des DIRACoperators zu bestimmen. Dazu betrachte man die Differentialgleichung $dt = \langle A, \cdot\rangle$, $t \in C^\infty NA$, die wegen $d\langle A, \cdot\rangle = -\Delta A = 0$ nach dem Lemma von POINCARÉ eine Lösung $t$ hat, eindeutig bis auf eine Konstante, die man etwa mit $t(e) = 0$ fixieren kann. Das Gradientenfeld $A$ von $t$ erzeugt dabei die Rechtsoperation von $A$ auf $NA$, so daß $t$ die Zeit mißt, die man braucht um aus

$N$ nach $Na$, $a \in A$, zu fließen, das heißt $t(ne^{sA}) = s$. Nützlicher ist $t$ nun in der Form $y = e^t \in C^\infty NA$, was im POINCARÉschen Halbraummodell der reell-hyperbolischen Räume $\mathbb{RH}^{n+1} \cong \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ gerade die $\mathbb{R}_+$-Halbraumkoordinate ist. Nach Konstruktion ist $y$ eine „Eigenfunktion" des Gradienten:

$$grad\ y = e^t grad\ t = yA \quad \text{mit} \quad y(ne^{sA}) = e^s$$

Also gilt $A(y^{z+\|R\|}) = (z+ \| R \|)y^{z+\|R\|}$ und die Zerlegung des DIRACoperators führt für einen konstanten Schnitt $v \in V$ zu:

$$D(y^{z+\|R\|}v) = y^{z+\|R\|}\big((z+ \| R \|)A \cdot v + D_{lin}v - R \cdot v\big) = y^{z+\|R\|}\big(zA \cdot v + D_{lin}y\big)$$

Für einen Eigenvektor $v \in V$ des symmetrischen, das heißt diagonalisierbaren, und mit $A$ antikommutierenden Operators $D_{lin}$ mit $D_{lin}v = Ev$ kann man deshalb die folgende Gleichung hinschreiben:

$$D\big(y^{z+\|R\|}\begin{pmatrix} v \\ Av \end{pmatrix}\big) = y^{z+\|R\|}\begin{pmatrix} E & z \\ -z & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ Av \end{pmatrix}$$

Die in dieser Gleichung aufscheinende Matrix, die den DIRACoperator auf dem Spann von $y^{z+\|R\|}v$ und $y^{z+\|R\|}Av$ beschreibt, ist für $z \neq \pm E$ oder $E = z = 0$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\pm\sqrt{E^2 - z^2}$ und Eigenzeilenvektoren

$$(\, E \pm \sqrt{E^2 - z^2} \quad z\,)\begin{pmatrix} E & z \\ -z & -E \end{pmatrix} = \pm\sqrt{E^2 - z^2}\,(\, E \pm \sqrt{E^2 - z^2} \quad z\,)$$

was im Fall $z = \pm E$ in einem Vektor des eindimensionalen Kerns zusammenfällt, sofern die Matrix nicht bereits völlig verschwindet. Diese Matrix ist typisch für die Beschreibung der Summe zweier antikommutierender Operatoren, und ebenso typisch ist die Form der Eigenwerte und Eigenvektoren, die auch bei ähnlichen, später betrachteten Matrizen zu bemerken ist. Auf diese Weise erhält man Eigenschnitte des DIRACoperators in der Form:

$$y^{z+\|R\|}\Big((E \pm \sqrt{E^2 - z^2})v + zAv\Big) \quad \text{zum Eigenwert} \quad \pm\sqrt{E^2 - z^2}$$

Weil das Spektrum des mit $A$ antikommutierenden Operators $D_{lin}$ symmetrisch zu 0 liegt, sind die kritischen Werte für $z$ gerade die von Null verschiedenen Eigenwerte von $D_{lin}$, für andere $z$ sind Schnitte der Form $y^{z+\|R\|}v$, $v \in V$, stets in Eigenschnitte zerlegbar. Insbesondere gilt dies für die interessantesten Werte $z = ir$, $r \in \mathbb{R}$, weil alle Eigenwerte von $D_{lin}$ reell sind. Ist $z \neq 0$ hingegen ein Eigenwert von $D_{lin}$, so ist $y^{z+\|R\|}v$ nur dann in Eigenschnitte zerlegbar, wenn $v$ in einen Unterraum von $V$ liegt, dessen Kodimension in $V$ die Multiplizität von $z$ ist.

Im folgenden werden die Eigenwerte und Eigenvektoren des modifizierten linearen DIRACoperators bestimmt, um diese interessante Familie von Eigenschnitten des DIRACoperators explizit angeben zu können. Im Falle des prinzipalen

Spinorbündels reduziert sich das auf das Problem, die Linksmultiplikation mit dem KOSZULtrivektor $\Omega$ zu diagonalisieren, wozu es im Gegensatz zu Vektoren und Bivektoren keine allgemeine Prozedur zu geben scheint. Noch weiter entfernt scheint ein allgemeines Vorgehen im Fall des Multivektorenbündels zu liegen. Diesen Fall kann man aber noch auf das Studium des linearen DIRACoperators $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ der EUKLIDischen Unteralgebra $\mathfrak{n}$ zurückführen, indem man den modifizierten linearen Operators $D_{\Lambda,lin}$ gemäß $\Lambda\mathfrak{s} = \Lambda\mathfrak{a} \otimes \Lambda\mathfrak{n}$ zerlegt:

$$D_{\Lambda,lin}\mathcal{A} \wedge \mathcal{N} = (R - W_{\mathcal{N}}) \star \mathcal{A} \wedge \mathcal{N} + (-1)^{|\mathcal{A}|}\mathcal{A} \wedge D_{\Lambda,\mathfrak{n}}\mathcal{N}$$

wo $W_{\mathcal{N}} \in \mathfrak{a}$ das Gewicht von $\mathcal{N}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{a}$ ist. $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ ist dabei analog zur Formel für $D_\Lambda$ nur mit Klammer und Koklammer auf $\mathfrak{n}$ konstruiert, beide aber respektieren die adjungierte Operation von $\mathfrak{a}$:

$$\Delta_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n}_\alpha \to \bigoplus_{\gamma+\delta=\alpha} \mathfrak{n}_\gamma \wedge \mathfrak{n}_\delta \quad \text{und} \quad [,] : \mathfrak{n}_\gamma \wedge \mathfrak{n}_\delta \to \mathfrak{n}_{\gamma+\delta}$$

Der Operator $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ operiert somit bereits auf den verschiedenen Eigenräumen von $\mathfrak{a}$ und ist außerdem selbstadjungiert wegen $R_{\mathfrak{n}} = 0$, besitzt also eine vollständige ONB von Eigenvektoren, die auch Eigenvektoren unter $\mathfrak{a}$ sind. Gilt dann für einen solchen Eigenvektor $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}\mathcal{N} = E\mathcal{N}$ zum Gewicht $W = W_{\mathcal{N}}$ etwa $W = R$, dann sind alle $\mathcal{A} \wedge \mathcal{N}$ mit homogenen $\mathcal{A}$ Eigenvektoren von $D_{\Lambda,lin}$ zum Eigenwert $(-1)^{|\mathcal{A}|}E$. Ansonsten gilt für homogene $\mathcal{A}$ mit $(R - W) \perp \mathcal{A} = 0$:

$$D_{\Lambda,lin}\begin{pmatrix} \mathcal{A} \wedge \mathcal{N} \\ (R - W) \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{|\mathcal{A}|}E & 1 \\ \| R - W \|^2 & -(-1)^{|\mathcal{A}|}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \wedge \mathcal{N} \\ (R - W) \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

so daß $D_{\Lambda,lin}$ in diesem zweidimensionalen Unterraum diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\pm\sqrt{E^2 + \| R - W \|^2}$ und Eigenvektoren:

$$\left((-1)^{|\mathcal{A}|}E \pm \sqrt{E^2 + \| R - W \|^2}\right)\mathcal{A} \wedge \mathcal{N} + (R - W) \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{N}$$

Das so konstruierte System von Eigenvektoren von $D_{\Lambda,lin}$ ist vollständig, da die homogenen Vektoren der Form $\mathcal{A}$ bzw. $(R - W) \wedge \mathcal{A}$ mit $(R - W) \perp \mathcal{A} = 0$ den ganzen Raum $\Lambda\mathfrak{a}$ aufspannen.

Um modifizierte lineare Operatoren auf Spinoren zu diagonalisieren, sind einige Rechenhandgriffe für CLIFFORDalgebren nützlich, die im folgenden erklärt werden. Sie sind hier nur für die negative CLIFFORDmultiplikation $\cdot$ angegeben, gelten mit geringen Abänderungen aber auch für die positive $\star$. Eine Basis der CLIFFORDalgebra $\mathcal{C}\ell\,\mathfrak{s}$ bilden wie erwähnt die Monome in einer ONB $E_s$, in der jeder Basisvektor höchstens einmal vorkommt. Ein solches Monom wird durch eine Teilmenge $S \subset \{1, \ldots, \dim \mathfrak{s}\}$ und eine Ordnung darauf beschrieben:

$$E_S = E_{s_1} \cdot \ldots \cdot E_{s_k} \quad \text{für} \quad S = \{s_1, \ldots s_k\}$$

Zwei solche Monome $E_S$ und $E_T$ kommutieren oder antikommutieren, je nachdem ob die Differenz $| S || T | - | S \cap T |$ gerade oder ungerade ist. In der Tat, man muß jeden Vektor $E_s$, $s \in S$, an jedem Vektor $E_t$, $t \in T$, vorbeitauschen und bekommt jedesmal einen Vorzeichenwechsel, es sei denn es ist $s = t$, was nach Voraussetzung genau $| S \cap T |$ mal passiert. Quadriert man ein Monom $E_S$, $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, mit $k \geq 1$ so erhält man

$$\begin{aligned}
E_S \cdot E_S &= E_{s_1} \cdot \ldots \cdot E_{s_k} \cdot E_{s_1} \cdot \ldots \cdot E_{s_k} \\
&= (-1)^{k-1} E_{s_1} \cdot E_{s_1} \cdot E_{s_2} \cdot \ldots \cdot E_{s_k} \cdot E_{s_2} \cdot \ldots \cdot E_{s_k} = \ldots \\
&= (-1)^{\frac{k}{2}(k+1)}
\end{aligned}$$

so daß $(E_S)^2 = 1$ oder $-1$ falls $| S | \equiv 3, 0 \bmod 4$ bzw. $| S | \equiv 1, 2 \bmod 4$. Im wesentlichen läuft es auf die dritte binomische Formel hinaus, wenn man diese Gleichung wie folgt schreibt

$$E_S \cdot \left(E_S \pm \sqrt{E_S^2}\right) = \pm\sqrt{E_S^2}\left(E_S \pm \sqrt{E_S^2}\right) \quad \text{mit} \quad \sqrt{E_S^2} := i^{\frac{|S|}{2}(|S|+1)}$$

was eventuell erst in der komplexifizierten CLIFFORDalgebra $\mathcal{C}\ell\ \mathfrak{s}$ Sinn macht. Die $E_S$ sind also vollständig diagonalisierbar und

$$\frac{1}{2 \| E_S \|}\left(E_S \pm \sqrt{E_S^2}\right)$$

sind komplementäre (!) Projektionen auf die Eigenräume zu den Eigenwerten $\pm\sqrt{E_S^2}$. Wählt man ein $s \in S$ aus, so kann man alle Basisvektoren der CLIFFORDalgebra als $E_T$ oder $E_s \cdot E_T$ mit $s \notin T$ schreiben und erhält so eine eindeutige Zerlegung der Form:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= E_s \cdot \mathfrak{X}' + \mathfrak{X}'' \\
&= E_S \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{E_{S\setminus\{s\}}^2}} E_{S\setminus\{s\}} \cdot \mathfrak{X}'\Big) + \mathfrak{X}'' \\
&= (E_S + \sqrt{E_S^2})\tilde{\mathfrak{X}}_+ + (E_S - \sqrt{E_S^2})\tilde{\mathfrak{X}}_-
\end{aligned}$$

mit eindeutig bestimmten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ bzw. $\tilde{\mathfrak{X}}_\pm$ aus $\mathcal{C}\ell\ \{E_s\}^\perp$, die Ordnung auf $S\setminus\{s\}$ ist dabei so gewählt, daß $E_S = E_s \cdot E_{S\setminus\{s\}}$. Die Eigenräume der Multiplikation mit $E_S$ sind also beide isomorph zu $\mathcal{C}\ell\ \{E_s\}^\perp$.
Sind $E_{S_i}$, $i = 1, \ldots, k$ nicht notwendigerweise kommutierende Monome, dann kann man das Argument iterieren, wenn man für jedes $i$ ein $s_i \in S_i$ so finden kann, daß $s_i \notin S_j$ für alle $j > i$, und erhält dann eine eindeutige Zerlegung von $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}\ell\ \mathfrak{s}$ in eine Summe von Elementen der Form:

$$(E_{S_1} \pm \sqrt{E_{S_1}^2}) \cdot \ldots \cdot (E_{S_k} \pm \sqrt{E_{S_k}^2}) \cdot \mathcal{C}\ell\ \{E_{s_1}, \ldots E_{s_k}\}^\perp$$

Die Voraussetzung an die Wahl der $s_i$ ist hierbei notwendig. Eine solche Wahl ist zum Beispiel beim dem modifizierten DIRACoperator auf den Spinoren der quaternional-hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}H^2$ nicht möglich. Obwohl die Monome in diesem Fall alle kommutieren, kann man deshalb mit diesem Argument keine Schlußfolgerung über die Dimension der gemeinsamen Eigenräume ziehen.

## 3.2 Die linearen Operatoren

### 3.2.1 Die Operatoren auf $\mathbb{R}H^{n+1}$

Der modifizierte lineare DIRACoperator auf Spinoren des $\mathbb{R}H^{n+1}$ ist Linksmultiplikation mit $\Omega = 0$, hat also den Eigenwert 0 der Multiplizität $2^{n+1}$. Da die Unteralgebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{(1)}$ in diesen Fall trivial ist, verschwinden Klammer und Koklammer und somit auch $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$, so daß der Eigenwert von $\mathcal{A} \wedge \mathcal{N}$ unter $D_{\Lambda,lin}$ allein vom Gewicht $W_{\mathcal{N}} = kA, \mathcal{N} \in \Lambda^k\mathfrak{n}$ abhängt. Mit $R = \frac{n}{2}A$ erhält man wie oben beschrieben Eigenwerte $\frac{n}{2} - k$ für $k = 1, \ldots, n$ mit Eigenvektoren

$$\mathcal{N} + A \wedge \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \in \Lambda^k\mathfrak{n} \quad \text{und} \quad \mathcal{N} - A \wedge \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \in \Lambda^{n-k}\mathfrak{n}$$

so daß der Eigenraum zum Eigenwert $\frac{n}{2} - k$ die Dimension $2\binom{n}{k}$ hat.

### 3.2.2 Der Operator auf den Spinoren des $\mathbb{C}H^{n+1}$

Zum DIRACoperator der Spinoren auf dem komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{C}H^{n+1}$ gehört als modifizierter linearer Operator die Linksmultiplikation mit der Summe

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_s ZX_sY_s$$

in der die Summanden $ZX_sY_s$ wegen $3 \cdot 3 - 1$ gerade paarweise kommutieren und alle diagonalisierbar mit Eigenwerten $\pm 1$ sind. Ein gemeinsamer Eigenraum aller $ZX_sY_s$ ist somit von der Form

$$\Big(ZX_1Y_1 \pm 1\Big) \ldots \Big(ZX_nY_n \pm 1\Big) \;\; C\ell\,\{X_1, \ldots, X_n\}^\perp$$

mit der Dimension $2^{n+2}$. Auf $\binom{n}{N}$ dieser Räume hat $\Omega$ dann den Eigenwert $\frac{1}{2}(n - 2N) = \frac{n}{2} - N$ für $N = 0, \ldots, n$, nämlich genau auf den Räumen, wo der charakterisierende Ausdruck genau $N$ Minuszeichen enthält. Die Multiplizität dieses Eigenwerts ist also $\binom{n}{N}2^{n+2}$.

### 3.2.3 Der Operator auf den Multivektoren des $\mathbb{C}H^{n+1}$

Auf den Multivektoren der komplex-hyperbolischen Räume muß man zunächst den DIRACoperator $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ verstehen:

$$D_{\Lambda,\mathfrak{n}} = -\Delta_{\mathfrak{n}}Z \wedge Z \perp - Z \wedge \Delta_{\mathfrak{n}}Z \perp$$

wobei $\Delta_{\mathfrak{n}} Z = 2X_1 \wedge Y_1 + \cdots + 2X_n \wedge Y_n$. Entscheidend ist dabei eine Kommutatorrelation zwischen $\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge$ und $\Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp$. Der Kommutator kann nämlich in Summanden $4[Y_s \perp X_s \perp, X_t \wedge Y_t \wedge]$ zerlegt werden, die aber für $s \neq t$ verschwinden, weil alle Faktoren antikommutieren. Es bleibt also

$$\begin{aligned}
[\Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp, \Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge] &= 4\sum_s [Y_s \perp X_s \perp, X_s \wedge Y_s \wedge] \\
&= 4\sum_s (\langle X_s, X_s\rangle Y_s \perp Y_s \wedge - \langle Y_s, Y_s\rangle X_s \wedge X_s \perp) \\
&= 4n - 4\sum_s (X_s \wedge X_s \perp + Y_s \wedge Y_s \perp)
\end{aligned}$$

Die zweite Summe ist der FERMIonische Zahloperator in $\Lambda\mathfrak{n}_{(1)}$. Iteriert man diesen Kommutator, so findet man für $\mathcal{N} \in \Lambda^d \mathfrak{n}_{(1)} \cap \mathbf{Kern}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp$ und $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp (\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^{k+1}\mathcal{N} &= 4(n-2k-d)(\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^k\mathcal{N} + \Delta_{\mathfrak{n}} Z \wedge \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp (\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^k\mathcal{N} \\
&= \ldots = 4(k+1)(n-d-k)(\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^k\mathcal{N}
\end{aligned}$$

Das kleinste $k$, für das $(\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^{k+1}\mathcal{N}$ verschwinden kann, ist deswegen $k = n-d$ und man erhält eine Kette von Vektoren ungleich 0:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{N} & \Delta_{\mathfrak{n}} Z \wedge \mathcal{N} & (\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^2\mathcal{N} & \cdots & (\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^{n-d}\mathcal{N} \\
\text{in } \Lambda^d\mathfrak{n}_{(1)} & \text{in } \Lambda^{d+2}\mathfrak{n}_{(1)} & \text{in } \Lambda^{d+4}\mathfrak{n}_{(1)} & & \text{in } \Lambda^{2n-d}\mathfrak{n}_{(1)}
\end{array}$$

Jeder Unterraum $\Lambda^d\mathfrak{n}_{(1)}$ läßt sich nun orthogonal zerlegen in seinen Schnitt mit $\mathbf{Kern}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp$ und $\mathbf{Bild}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge$, weil die $\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge$ und $\Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp$ graduiert und adjungiert sind. In diesem Sinne kann man also ein $\mathcal{N} \in \Lambda^d\mathfrak{n}_{(1)}$ zerlegen in $\mathcal{N}_0 + \Delta_{\mathfrak{n}} Z \wedge \mathcal{N}'$ und dann mit $\mathcal{N}'$ so fortfahren, um schließlich die Darstellung

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \Delta_{\mathfrak{n}} Z \wedge \mathcal{N}_1 + (\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^2\mathcal{N}_2 + \cdots$$

mit $\mathcal{N}_s \in \mathbf{Kern}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp \cap \Lambda^{d-2s}\mathfrak{n}_{(1)}$ zu erhalten. Diese Darstellung ist eindeutig, denn wendet man $(\Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp)^k$ darauf an, erhält man nach obiger Formel ein bestimmtes Vielfaches von $\mathcal{N}_k$ als die eindeutige Komponente in $\mathbf{Kern}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp$. Diese Eindeutigkeit impliziert für $\mathcal{N}$ mit $\Delta_{\mathfrak{n}} Z \wedge \mathcal{N} = 0$ aber $(\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^{s+1}\mathcal{N}_s = 0$ für alle $s$ und damit $\mathcal{N}_s = 0$ falls $s > d-n$. Für $d \leq n$ ist deshalb die Abbildung $\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge : \Lambda^{d-2}\mathfrak{n}_{(1)} \to \Lambda^d\mathfrak{n}_{(1)}$ injektiv, das heißt:

$$\dim \mathbf{Kern}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp \cap \Lambda^d\mathfrak{n}_{(1)} = \binom{2n}{d} - \binom{2n}{d-2} \quad \text{für} \quad d \leq n$$

Außerdem ist $(\Delta_{\mathfrak{n}} Z\wedge)^{n-d}$ ein Isomorphismus von $\Lambda^d\mathfrak{n}_{(1)}$ nach $\Lambda^{2n-d}\mathfrak{n}_{(1)}$, in Graden $d > n$ existiert daher kein nichttriviales $\mathcal{N} \in \mathbf{Kern}\, \Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp$.

Die Multivektoren der Form $(\Delta_\mathfrak{n} Z\wedge)^k \mathcal{N}$ mit $\mathcal{N} \in \mathbf{Kern}\, \Delta_\mathfrak{n} Z \perp \cap \Lambda^d \mathfrak{n}_{(1)}$ mit $d = 0, \dots, n$ und $k = 0, \dots, n-d$ spannen also $\Lambda \mathfrak{n}_{(1)}$. Zu einem solchen Multivektor hat man dann für jedes $k = 0, \dots, n-d-1$ Eigenvektoren von $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ der Form

$$2\sqrt{(k+1)(n-k-d)}\, Z \wedge (\Delta_\mathfrak{n} Z\wedge)^k \mathcal{N} \pm (\Delta_\mathfrak{n} Z\wedge)^{k+1} \mathcal{N}$$

zum Eigenwert $\mp 2\sqrt{(k+1)(n-d-k)}$ und zusätzlich zwei Eigenvektoren $\mathcal{N}$ und $Z \wedge (\Delta_\mathfrak{n} Z\wedge)^{n-d} \mathcal{N}$ zum Eigenwert 0. Weist man den beiden letzten Fällen $k = -1$ bzw. $k = n-d$ zu, so ist das nicht nur konsistent mit der Formel für den Eigenwert, sondern auch mit der Formel für den Vektor $W = (d+2k+2)A$ zum Gewicht unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{a}$. Die Eigenvektoren von $D_{\Lambda,lin}$ kann man nun wie oben beschrieben direkt angeben. Obwohl sie dann etwas kompliziert aussehen, ist der Eigenwert wegen $R = (n+1)A$ einfach

$$\begin{aligned} E &= \pm\sqrt{(\mp 2\sqrt{(k+1)(n-k-d)})^2 + \parallel R - (d+2k+2)A \parallel^2} \\ &= \pm\sqrt{4(k+1)(n-d-k) + ((n-d-k)-(k+1))^2} \\ &= \pm(n-d+1) \end{aligned}$$

Für festes $\mathcal{N} \in \mathbf{Kern}\, \Delta_\mathfrak{n} Z \perp \cap \Lambda^d \mathfrak{n}_{(1)}$ erhält man so zu diesem Eigenwert jeweils einen Eigenvektor für $k = -1$ und $k = n-d$ und jeweils zwei für alle $k = 0, \dots, n-d-1$. Die Dimension des zugehörigen Eigenraums ist also

$$2(n-d+1)\left(\binom{2n}{d} - \binom{2n}{d-2}\right)$$

Die folgende Tabellle beschreibt das Spektrum auf den $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ für $1 \leq n \leq 6$:

| | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Anzahl gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$: | | | | | | 4 | 4 | | 4 | 4 | | | | | | 16 |
| $\mathbb{C}\mathrm{H}^3$: | | | | | 6 | 16 | 10 | | 10 | 16 | 6 | | | | | 64 |
| $\mathbb{C}\mathrm{H}^4$: | | | | 8 | 36 | 56 | 28 | | 28 | 56 | 36 | 8 | | | | 256 |
| $\mathbb{C}\mathrm{H}^5$: | | | 10 | 64 | 162 | 192 | 84 | | 84 | 192 | 162 | 64 | 10 | | | 1024 |
| $\mathbb{C}\mathrm{H}^6$: | | 12 | 100 | 352 | 660 | 660 | 264 | | 264 | 660 | 660 | 352 | 100 | 12 | | 4096 |
| $\mathbb{C}\mathrm{H}^7$: | 14 | 144 | 650 | 1664 | 2574 | 2288 | 858 | | 858 | 2288 | 2574 | 1664 | 650 | 144 | 14 | 16384 |

Um irgendeinen Eigenvektor explizit hinschreiben zu können, muß man nun noch den Raum $\mathbf{Kern}\,\Delta_{\mathfrak{n}} Z \perp \cap \Lambda^d \mathfrak{n}_{(1)}$ kennen. Ohne Beweis sei hier vermerkt, daß dieser Raum von Multivektoren der Form

$$(X_{s_1} \wedge Y_{s_1} - X_{s_2} \wedge Y_{s_2}) \wedge \ldots \wedge (X_{s_{2t+1}} \pm Y_{s_{2t+1}}) \wedge \ldots \wedge (X_{s_d} \pm Y_{s_d})$$

mit paarweise verschiedenen $s_1, \ldots, s_d$ aufgespannt wird.

### 3.2.4 Der Operator auf den Spinoren des $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$

Auf dem $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$ ist der modifizierte lineare Operator zu Spinoren die Linksmultiplikation mit

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_s \Big( Z^i X_s^1 X_s^i - Z^i X_s^j X_s^k + Z^j X_s^1 X_s^j - Z^j X_s^k X_s^i + Z^k X_s^1 X_s^k - Z^k X_s^i X_s^j \Big)$$

In dieser Summe kommutieren alle Summanden, die zu gleichem $s$ oder gleichem $Z^\mu$ gehören, alle anderen Summanden antikommutieren. Glücklicherweise kommutieren aber die Volumenelemente $Z^i Z^j Z^k$ von $\mathfrak{n}_{(2)}$ und $X_s^1 X_s^i X_s^j X_s^k$ mit $s = 1, \ldots, n$ der $n$ orthogonalen Kopien von $\mathbb{H}$ in $\mathfrak{n}_{(1)}$ mit allen Summanden von $\Omega$ und untereinander. Sie erfüllen außerdem die wichtigen Gleichungen

$$(Z^i X_s^1 X_s^i)(Z^j X_s^1 X_s^j)(Z^k X_s^1 X_s^k) = (Z^i Z^j Z^k)(X_s^1 X_s^i X_s^j X_s^k)$$

und zum Beispiel

$$(Z^i X_s^1 X_s^i)(X_s^1 X_s^i X_s^j X_s^k) = -Z^i X_s^j X_s^k$$

sowie ähnliche Formeln für $j$ und $k$. Weil die $X_s^1 X_s^i X_s^j X_s^k$ untereinander kommutieren und diagonalisierbar mit Eigenwerten $\pm 1$ sind, kann man $D_{\$,lin}$ auf den gemeinsamen Eigenräumen der Dimension $2^{3n+4}$ betrachten. Auf einem solchen gemeinsamen Eigenraum operiert $-Z^i X_s^j X_s^k$ gemäß der zweiten Gleichung wie $\pm Z^i X_s^1 X_s^i$, und ebenso operieren $-Z^j X_s^k X_s^i$ und $-Z^k X_s^i X_s^j$ wie $\pm Z^j X_s^1 X_s^j$ bzw. $\pm Z^k X_s^1 X_s^k$, so daß sich $D_{\$,lin}$ auf die Linksmultiplikation mit

$$\sum_s \Big( Z^i X_s^1 X_s^i + Z^j X_s^1 X_s^j + Z^k X_s^1 X_s^k \Big)$$

reduziert, wo die Summe nur noch über die $s$ geht, für die der Eigenwert unter $X_s^1 X_s^i X_s^j X_s^k$ gerade 1 ist. Interessant ist deshalb nur das Neuspektrum des Operators $D_{\$,lin}$ auf dem gemeinsamen Eigenraum $C\ell_{neu}\mathfrak{s}$ zum gemeinsamen Eigenwert 1, auf allen anderen gemeinsamen Eigenräumen geht die Summe nicht mehr über alle $s$, und Eigenvektoren lassen sich in Analogie zum Neuspektrum auf einem kleineren $\mathbb{H}\mathrm{H}^{k+1}$, $k < n$ konstruieren:

$$\text{Spektrum von } D_{\$,lin} \text{ auf } \mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1} = \bigoplus_{k=0}^{n} 2^{3(n-k)} \binom{n}{k} \text{Neuspektrum auf } \mathbb{H}\mathrm{H}^{k+1}$$

In dieser Formel enthält das Neuspektrum auf $\mathbb{H}\mathrm{H}^1$ den 16-fachen Eigenwert 0.

Auf $\mathcal{C}\!\ell_{neu}\mathfrak{s}$ kann man nun zunächst die kommutierenden Summanden $Z^iX_s^1X_s^i$ von $\Omega$ und $Z^iZ^jZ^k$ diagonalisieren, ein gemeinsamer Eigenraum hat dann Dimension $2^{2n+3}$. Weil die $Z^jX_s^1X_s^j$ aber mit den $Z^iX_t^1X_t^i$, $t \neq s$ antikommutieren induzieren sie Isomorphismen zwischen diese gemeinsame Eigenräumen. Für ein Monom $\mathcal{Z}_S := (Z^jX_{s_1}^1X_{s_1}^j)\cdots(Z^jX_{s_k}^1X_{s_k}^j)$, $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$ und einen Eigenvektor $\mathcal{N}$ zum gemeinsamen Eigenwert $\pm 1$ aller $Z^iX_s^1X_s^i$ gilt etwa

$$(Z^iX_s^1X_s^i)(\mathcal{Z}_S\mathcal{N}) = \left\{ \begin{array}{ll} \pm(-1)^{|S|} & \text{für} \quad s \notin S \\ -\pm(-1)^{|S|} & \text{für} \quad s \in S \end{array} \right\} (\mathcal{Z}_S\mathcal{N})$$

Ersetzt man $S$ durch sein Komplement $S^c$, so vertauschen sich die beiden Fälle und man bekommt einen zusätzlichen $(-1)^n$-Faktor. Deshalb haben $\mathcal{Z}_S\mathcal{N}$ und $\mathcal{Z}_{S^c}\mathcal{N}$ für ungerades $n$ gleiche, für gerades $n$ genau entgegengesetzte Eigenwerte unter allen $Z^iX_s^1X_s^i$.
Für gerades $n$ ist deshalb jeder gemeinsame Eigenraum der $Z^iX_s^1X_s^i$ Bild des gemeinsamen Eigenraums zum gemeinsamen Eigenwert 1, jedes Element von $\mathcal{C}\!\ell_{neu}\mathfrak{s}$ hat also in diesem Fall eine eindeutige Darstellung als Summe von Elementen der Form

$$\mathcal{Z}_S(Z^iX_1^1X_1^i+1)\cdots(Z^iX_n^1X_n^i+1)(Z^iZ^jZ^k \pm_z 1)$$
$$(X_1^1X_1^iX_1^jX_1^k+1)\cdots(X_n^1X_n^iX_n^jX_n^k+1)\mathcal{C}\!\ell\,\{X_s^i, X_s^k, Z^k\}^\perp$$

Die technische Voraussetzung an Existenz und Eindeutigkeit dieser Darstellung ist hier erfüllt, weil die $X_s^1X_s^iX_s^jX_s^k$ mit allen anderen Faktoren kommutieren und deshalb genausogut an erster Stelle geschrieben werden könnten.
Für ungerades $n$ kommutiert $(Z^iX_1^1X_1^i)\cdots(Z^iX_n^1X_n^i)$ mit allen $Z^jX_s^1X_s^j$, das Produkt der Eigenwerte der $Z^iX_s^1X_s^i$ bleibt also unter Multiplikation mit allen $\mathcal{Z}_S$ konstant. Deswegen erhält man nur eine eindeutige Darstellung als Summe von

$$\mathcal{Z}_S(Z^iX_1^1X_1^i \pm_x 1)\cdots(Z^iX_n^1X_n^i \pm_x 1)(Z^iZ^jZ^k \pm_z 1)$$
$$(X_1^1X_1^iX_1^jX_1^k+1)\cdots(X_n^1X_n^iX_n^jX_n^k+1)\mathcal{C}\!\ell\,\{X_s^i, X_s^k, Z^j, Z^k\}^\perp$$

Ein gemeinsamer Eigenraum der $Z^iX_s^1X_s^i$ ist nämlich in diesem Fall als Bild entweder des gemeinsamen Eigenraums zum gemeinsamen Eigenwert $+1$ oder $-1$. Dann ist aber die Zweideutigkeit $S \leftrightarrow S^c$ zu beachten. Als Mengen haben nun $S$ und $S^c$ ungleiche Parität, multipliziert man deshalb $\mathcal{Z}_S$ und $\mathcal{Z}_{S^c}$ aus, dann ist eins ein Element in $\mathcal{C}\!\ell\,\{X_s^i, X_s^k, Z^j, Z^k\}^\perp$ und das andere ein Element in $Z^j\cdot\mathcal{C}\!\ell\,\{X_s^i, X_s^k, Z^j, Z^k\}^\perp$; diese beiden Räume spannen wieder $\mathcal{C}\!\ell\,\{X_s^i, X_s^k, Z^k\}^\perp$ auf.
Auf einem gemeinsamen Eigenraum der $X_s^1X_s^iX_s^jX_s^k$, der $Z^iX_s^1X_s^i$ und $Z^iZ^jZ^k$ operiert nun $Z^kX_s^1X_s^k$ wie $\pm Z^jX_s^1X_s^j$, denn die erste der oben angegebenen Gleichungen kann man auch schreiben als

$$(Z^kX_s^1X_s^k) = (Z^jX_s^1X_s^j)(Z^iX_s^1X_s^i)(Z^iZ^jZ^k)(X_s^1X_s^iX_s^jX_s^k)$$

Insbesondere gilt für Vektoren $\mathcal{Z}_S\mathcal{N}$, in dem $\mathcal{N}$ wie oben Eigenvektor aller $(Z^iX_s^1X_s^i)\cdot$ zum Eigenwert $\pm_x 1$, von $(Z^iZ^jZ^k)\cdot$ zum Eigenwert $\pm_z 1$ ist:

$$(Z^kX_s^1X_s^k)(\mathcal{Z}_S\mathcal{N}) = \left\{ \begin{array}{ll} \pm_x \pm_z (-1)^{|S|} & \text{für} \quad s \notin S \\ -\pm_x \pm_z(-1)^{|S|} & \text{für} \quad s \in S \end{array} \right\} (Z^jX_s^1X_s^j)(\mathcal{Z}_S\mathcal{N})$$

und somit für $\pm_z \pm_x (-1)^{|S|} = 1$:

$$\Omega(\mathcal{Z}_S\mathcal{N}) = \pm_z(n-2 \mid S \mid)(\mathcal{Z}_S\mathcal{N}) + 2\sum_{s\notin S}(\mathcal{Z}_{S\cup\{s\}}\mathcal{N})$$

sowie für $\pm_z \pm_x (-1)^{|S|} = -1$:

$$\Omega(\mathcal{Z}_S\mathcal{N}) = -\pm_z (n-2 \mid S \mid)(\mathcal{Z}_S\mathcal{N}) + 2\sum_{s\in S}(\mathcal{Z}_{S\setminus\{s\}}\mathcal{N})$$

Schränkt man sich also auf gemeinsame Eigenräume der $Z^iX_s^1X_s^i$ und $Z^iZ^jZ^k$ ein, dann operieren die Summanden $Z^iX_s^1X_s^i$ von $D_{\$,lin}$ natürlich als Skalare, und die Beiträge der $Z^jX_s^1X_s^j$- und $Z^kX_s^1X_s^k$-Summanden heben sich entweder auf oder sind bereits gleich; im letzteren Fall wird der gemeinsame Beitrag durch die obigen Formeln beschrieben. Damit ist der entscheidende Schritt zur Diagonalisierung von $D_{\$,lin}$ getan.
Neben den Monomen $\mathcal{Z}_S$ muß man nun aber auch deren Summen betrachten, das heißt die von den $Z^jX_s^1X_s^j$ erzeugte, $2^n$-dimensionale Unteralgebra von $C\ell\,\mathfrak{s}$. Um obige Formeln für alle Elemente dieser Algebra zu formulieren, benötigt man noch die Graduierung dieser Algebra nach $\mid S \mid$, sowie die beiden graduierten Operatoren vom Grad 1 bzw. $-1$

$$\Delta_E(\mathcal{Z}_S) = \sum_{s\notin S}\mathcal{Z}_{S\cup\{s\}} \quad \text{und} \quad \Delta_V(\mathcal{Z}_S) = \sum_{s\in S}\mathcal{Z}_{S\setminus\{s\}}$$

die man als Summen BOSonischer Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren auf der Potenzmenge auffassen kann. Die Bezeichnung soll an die enge Verwandtschaft dieser Operatoren mit $\Delta_\mathfrak{n}Z\wedge$ und $\Delta_\mathfrak{n}Z\ \lrcorner$ auf dem $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ erinnern, obwohl es keine offensichtlichen Zusammmenhänge gibt. Weil die $\mathcal{Z}_S$ eine ONB dieser Unteralgebra bilden, sind $\Delta_E$ und $\Delta_V$ adjungiert zueinander, so daß man die oben ausgeführte Argumentation einfach übernehmen kann. Die einzige Kommutatorrelation

$$\begin{aligned} [\Delta_V, \Delta_E]\mathcal{Z}_S &= \sum_{s\notin S}\sum_{t\in S\cup\{s\}}\mathcal{Z}_{(S\cup\{s\})\setminus\{t\}} - \sum_{t\in S}\sum_{s\notin S\setminus\{t\}}\mathcal{Z}_{(S\setminus\{t\})\cup\{s\}} \\ &= (n-2 \mid S \mid)\mathcal{Z}_S \end{aligned}$$

zeigt also für ein $\mathcal{Z} \in \mathbf{Kern}\,\Delta_V$ vom Grad $d$ zunächst

$$\Delta_V\Delta_E^{k+1}\mathcal{Z} = (n-2d-2k)\Delta_E^k\mathcal{Z} + \Delta_E\Delta_V\Delta_E^k\mathcal{Z} = \ldots = (k+1)(n-2d-k)\Delta_E^k\mathcal{Z}$$

Danach folgert man, daß sich jedes Element der Unteralgebra in eindeutiger Weise schreiben läßt als Summe von Elementen der Form $\Delta_E^k \mathcal{Z}$ mit $d = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $k = 0, \dots, n-2d$ und $\mathcal{Z} \in \mathbf{Kern}\, \Delta_V$ vom Grad $d$ - diese Bedingungen an die $\mathcal{Z}$ werden auf einem Unterraum der Dimension $\binom{n}{d} - \binom{n}{d-1}$ erfüllt, der aufgespannt wird von der Elementen der Form

$$(Z^j X^1_{s_1} X^j_{s_1} - Z^j X^1_{s_2} X^j_{s_2}) \cdot \dots \cdot (Z^j X^1_{s_{2d-1}} X^j_{s_{2d-1}} - Z^j X^1_{s_{2d}} X^j_{s_{2d}})$$

mit paarweise verschiedenen $s_1, \dots, s_{2d}$. Die Zahlen $\binom{n}{d} - \binom{n}{d-1}$ sind Verallgemeinerungen der CATALÁNzahlen und zählen die Pfade auf dem Koordinatengitter, die stets nach oben oder rechts gehend vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(n-d, d)$ gelangen, ohne jemals die Diagonale zu überqueren. Diese Analogie kann man nutzen, um aus den oben angegebenen Elementen eine Basis dieses Unterraums auszuwählen.
Für ein $\mathcal{Z}$ in $\mathbf{Kern}\, \Delta_V$ vom Grad $d = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ein $k = 0, \dots, n-2d-1$ und einen Eigenvektor $\mathcal{N}$ von allen $Z^i X^1_s X^i_s$ und $Z^i Z^j Z^k$ zum Eigenwert $\pm_x 1$ bzw. $\pm_z 1$ mit $\pm_z \pm_x (-1)^{k+d} = 1$ kann man nun die Linksmultiplikation mit $\Omega$ auf dem von $\Delta_E^k \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N}$ und $\Delta_E^{k+1} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N}$ erzeugten 2-dimensionalen Unterraum schreiben als

$$\Omega \begin{pmatrix} \Delta_E^k \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N} \\ \Delta_E^{k+1} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm_z (n-2d-2k) & 2 \\ 2(k+1)(n-2d-k) & \mp_z (n-2d-2k-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_E^k \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N} \\ \Delta_E^{k+1} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\begin{aligned} E &= \pm_z 1 \pm \sqrt{1 + (n-2d-2k)(n-2d-2k+2) + 4(k+1)(n-2d-k)} \\ &= \pm_z 1 \pm (n-2d+1) \end{aligned}$$

mit zugehörigen Eigenvektoren:

$$\Big(\pm_z (\frac{n-1}{2} - k - d) \pm (\frac{n+1}{2} - d)\Big) \Delta_E^k \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N} + \Delta_E^{k+1} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N}$$

Wegen $\frac{n+1}{2} - d > 0$ läßt sich ein $\Delta_E^k \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N}$ als Linearkombination der so konstruierten Eigenvektoren darstellen, wenn entweder $k$ oder $k-1$ alle oben genannten Bedingungen erfüllt. Das ist nur für $k = 0$ oder $k = n-2d$ unter Umständen nicht der Fall, unter der Bedingung $\pm_z \pm_x (-1)^d = -1$ bzw. $\pm_z \pm_x (-1)^{n-d} = 1$ erhält man dann zusätzliche Eigenvektoren

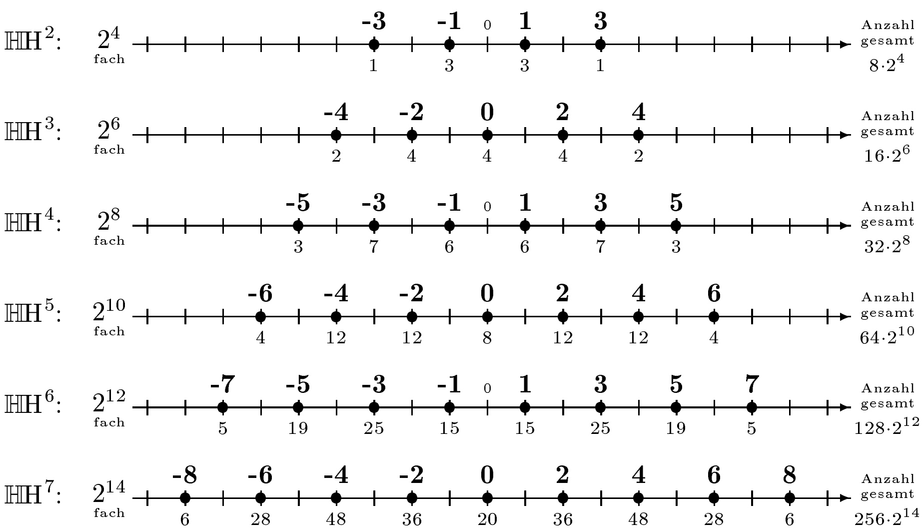
$$\mathcal{Z} \cdot \mathcal{N} \quad \text{und} \quad \Delta_E^{n-2d} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{N}$$

zum Eigenwert $\mp_z (n-2d)$. Die oben gefundenen Eigenwerte schreibt man also besser als $\mp_z (n-2d)$ und $\pm_z (n-2d+2)$.

Für ungerades $n$ ist es nun einfach, die Multiplizitäten dieser beiden Eigenwerte zu bestimmen, weil man $\pm_x$ stets geeignet wählen kann. Deshalb gibt es zu jedem $0 \leq k < n-2d$ je einen Eigenvektor zu den Eigenwerten $\mp_z(n-2d)$ und $\pm_z(n-2d+2)$, sowie zwei zusätzliche Eigenvektoren zum Eigenwert $\mp_z(n-2d)$, mit den Wahlmöglichkeiten der $\mathcal{N}$ und $\mathcal{Z}$ insgesamt also:

$$\begin{array}{ccc} 2^{2n+2}(n-2d)\left(\binom{n}{d}-\binom{n}{d-1}\right) & \text{mal den Eigenwert} & \pm_z(n-2d+2) \\ 2^{2n+2}(n-2d+2)\left(\binom{n}{d}-\binom{n}{d-1}\right) & & \mp_z(n-2d) \end{array}$$

für $d = 0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dasselbe Ergebnis erhält man nach einigen Fallunterscheidungen auch für gerades $n$. Das Neuspektrum liegt also in den Eigenräumen unter $Z^i Z^j Z^k$ nicht mehr symmetrisch zum Ursprung, diese Symmetrie stellt sich erst wieder ein, wenn man noch über $\pm_z$ summiert. Dann wird das Ergebnis aber noch komplizierter, so daß hier darauf verzichtet wird. Stattdessen ist für $1 \leq n \leq 6$ das Neuspektrum des linearen Operators auf den Spinoren des $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$ in folgendem Diagramm dargestellt:




Die Multiplizitäten summieren sich jeweils zu $2^{3n+4}$, der Dimension von $\mathcal{C}\ell_{neu}\mathfrak{s}$. Das gesamte Spektrum auf $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$ enthält dann das Neuspektrum von $\mathbb{H}\mathrm{H}^{k+1}$ genau $2^{3(n-k)}\binom{n}{k}$ mal, das Neuspektrum auf $\mathbb{H}\mathrm{H}^1$ enthält dabei nach Definition nur 0 mit Multiplizität 16.

### 3.2.5 Der Operator auf den Multivektoren des $\mathbb{H}\mathrm{H}^2$

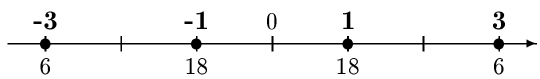
Das Studium des DIRACoperators auf den Multivektoren der quaternional-hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}\mathrm{H}^2$ zeigt die im allgemeinen Fall zu erwartenden Probleme und gibt außerdem Gelegenheit, das Vorgehen auf den komplex-hyperbolischen Räumen $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ in einen allgemeineren Rahmen zu stellen. Bei den Multivektoren ist das eigentliche Problem der Operator:

$$D_{\Lambda,\mathfrak{n}} = - \sum_{\nu=i,j,k} \left( \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\nu \wedge Z^\nu \perp + Z^\nu \wedge \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\nu \perp \right)$$

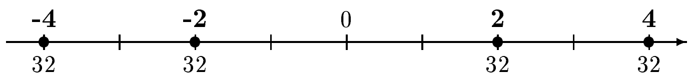
Die von den $\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\nu \wedge$ und $\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\nu \perp$ erzeugte Operatorenalgebra ist nun selbstadjungiert, und $\Lambda\mathfrak{n}_{(1)}$ erweist sich deshalb als orthogonale Summe irreduzibeler Darstellungen dieser Algebra:

$$\Lambda\mathfrak{n}_{(1)} = \mathbf{1}_i \oplus \mathbf{1}_j \oplus \mathbf{1}_k \oplus \mathbf{5} \oplus \mathbf{8}$$

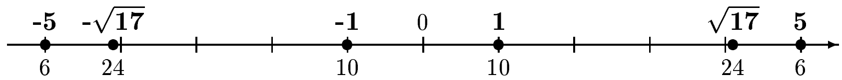
Ist $V$ eine dieser Darstellungen, dann operiert $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ bereits in $\Lambda\mathfrak{n}_{(2)} \otimes V$ und respektiert dabei das Gewicht unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{a}$. Deshalb kann man $\Lambda\mathfrak{n}_{(2)} \otimes V$ noch weiter in die orthogonale Summe der Eigenräume zum Gewicht $\langle kA, \cdot \rangle$ - kurz $k$ - zerlegen, und $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ dann auf jedem dieser Unterräume getrennt betrachten. Mit $R = 5A$ erhält man dann auch die Eigenwerte von $D_{\Lambda,lin}$ auf den zugehörigen Unterräumen von $\Lambda\mathfrak{a} \otimes \Lambda\mathfrak{n}_{(2)} \otimes V$.
Die Darstellungen $\mathbf{1}_i$, $\mathbf{1}_j$ und $\mathbf{1}_k$ sind eindimensional und werden von $X^1X^i + X^jX^k$, $X^1X^j + X^kX^i$ bzw. $X^1X^k + X^iX^j$ aufgespannt. Sie bilden den gemeinsamen Kern aller Operatoren $\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\nu \wedge$ und $\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\nu \perp$. Somit verschwindet auch $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ auf $\Lambda\mathfrak{n}_{(2)} \otimes (\mathbf{1}_i \oplus \mathbf{1}_j \oplus \mathbf{1}_k)$. Dieser Unterraum enthält Vektoren vom Gewicht $2, 4, 6$ und $8$, sodaß für das Spektrum von $D_{\Lambda,lin}$ auf dem zugehörigen Unterraum von $\Lambda\mathfrak{a} \otimes \Lambda\mathfrak{n}$ folgt:




Die Darstellung $\mathbf{8}$ ist der achtdimensionale Unterraum $\Lambda^{odd}\mathfrak{n}_{(1)}$. $\Lambda\mathfrak{n}_{(2)} \otimes \mathbf{8}$ enthält Vektoren vom Gewicht $1, 3, 5, 7$ und $9$, und bis auf den 24-dimensionalen Unterraum zum Gewicht 5 sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ leicht zu bestimmen. Auf dem zugehörigen Unterraum von $\Lambda\mathfrak{a} \otimes \Lambda\mathfrak{n}$ hat $D_{\Lambda,lin}$ dann die Eigenwerte




Die Darstellung $\mathbf{5}$ ist fünfdimensional und wird von den Vektoren $1$, $X^1X^iX^jX^k$ und $X^1X^i - X^jX^k$, $X^1X^j - X^kX^i$ sowie $X^1X^k - X^iX^j$ aufgespannt, $\Lambda\mathfrak{n}_{(2)} \otimes \mathbf{5}$ enthält dann Vektoren vom Gewicht $0, 2, 4, 6, 8$ und $10$. Auf dem zugehörigen Unterraum von $\Lambda\mathfrak{a} \otimes \Lambda\mathfrak{n}$ hat $D_{\Lambda,lin}$ dann die Eigenwerte:



Dabei sind die Eigenwerte $\pm\sqrt{17}$ eine Überraschung, denn alle anderen Eigenwerte modifizierter linearer Operatoren in dieser Arbeit sind (halb-)ganzzahlig. Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten kommen etwa von den Eigenvektoren von $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ zum Eigenwert $\mp 2\sqrt{2}$ und Gewicht 2 her:

$$\sqrt{2}Z^i \pm (X^1X^i - X^jX^k)$$

In den höherdimensionalen quaternional-hyperbolischen Räumen $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$, $n > 1$, kann man $\Lambda\mathfrak{n}_{(1)}$ mit dem $n$-fachen Tensorprodukt von $\Lambda\mathfrak{n}_{(1)}$ zu $n = 1$ identifizieren. Die Operatoren $\Delta_\mathfrak{n} Z^\nu\wedge$ und $\Delta_\mathfrak{n} Z^\nu \perp$ sind dann einfach die als Derivationen auf dieses Tensorprodukt fortgesetzten Operatoren $\Delta_\mathfrak{n} Z^\nu\wedge$ und $\Delta_\mathfrak{n} Z^\nu \perp$ zu $n = 1$. Die Darstellungen $\mathbf{1}_i$, $\mathbf{1}_j$, $\mathbf{1}_k$, $\mathbf{5}$ und $\mathbf{8}$ bzw. ihre $n$-fachen Tensorprodukte spielen deshalb auch bei der Diagonalisierung von $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ auf den $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$, $n > 1$, eine Rolle. Die Vielzahl unterschiedlicher, irreduzibeler Darstellungen, die in diesen Tensorprodukten zu erwarten sind, sollte das Hauptproblem bei der Diagonalisierung von $D_{\Lambda,\mathfrak{n}}$ zu sein.

# 4 Das Symbol der Diracoperatoren

Geometrische Diracoperatoren auf Symmetrischen Räumen sind die Summe ihres modifizierten linearen Operators und ihres „Symbols". Dieser Differentialoperator erster Ordnung hängt nur von der Cliffordmultiplikation des Bündels ab und realisiert in der Zerlegung $C^\infty(NA, \Lambda\mathfrak{s}) = C^\infty NA \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ die Multiplikation mit dem Gradienten:

$$D_{Symbol} = \sum_{\mathfrak{s}} E_s \otimes E_s \cdot -1 \otimes R\cdot$$

$E_s$ durchläuft dabei eine ONB von $\mathfrak{s}$ und $-1 \otimes R\cdot$ hebt den Korrektursummanden im modifizierten linearen Operator auf. Weil die Cliffordmultiplikationen auf den Spinoren und den Multivektoren übereinstimmen, haben beide zugehörigen Diracoperatoren dasselbe Symbol $D_{Symbol}$.
Die Gruppenmultiplikation ermöglicht es nun, $C^\infty NA$ vermöge des Diffeomorphismus $N \times A \to NA$ als geeignet vervollständigtes Tensorprodukt $C^\infty N \otimes C^\infty A$ darzustellen. Auf einem Symmetrischen Raum vom Rang 1 führt diese Separation der Variablen zu einer Zerlegung des Symbols in eine gewichtete Summe von paarweise antikommutierenden Operatoren

$$D_{Symbol} = D_{(0)} + yD_{(1)} + y^2 D_{(2)}$$

in der $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$ nur noch auf $C^\infty N \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ operieren. In diesem Sinne sind sie dann aber Linearkombinationen von Operatoren $X \otimes X\cdot$ für linksinvariante Vektorfelder $X$ auf $N$. Faßt man diese Vektorfelder nun als die inifinitesimalen Generatoren der regulären Rechtsdarstellung von $N$ auf $L^2N$ auf, so kann man $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$ zu jeder unitären Darstellung $\pi$ von $N$ auf $\pi \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ definieren. Jede unitäre Darstellung läßt sich aber als direktes Integral von irreduzibelen Darstellungen auffassen, so daß es genügt, sich diese beiden Operatoren in einfachen Modellen $L^2_{N^+}N$ solcher Darstellungen $\pi_\eta$ anzuschauen.

## 4.1 Die Zerlegung des Symbols

Nach Definition ist das Symbol die Summe über eine beliebige ONB von $\mathfrak{s}$, die man insbesondere auch angepaßt an die orthogonale Zerlegung $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_{(1)} \oplus \mathfrak{n}_{(2)}$ wählen kann:

$$\begin{aligned} D_{Symbol} &= \sum_{\mathfrak{a}} E_s \otimes E_s \cdot + \sum_{\mathfrak{n}_{(1)}} E_s \otimes E_s \cdot + \sum_{\mathfrak{n}_{(2)}} E_s \otimes E_s \cdot -1 \otimes R \cdot \\ &= (A - \| R \|) \otimes A \cdot + \sum E_{(1)} \otimes E_{(1)} \cdot + \sum E_{(2)} \otimes E_{(2)} \cdot \end{aligned}$$

Problematisch an dieser Darstellung ist, daß die Differentialoperatoren $A$, $E_{(1)}$ und $E_{(2)}$ nicht kommutieren. Man kann dieses Problem umgehen, wenn man die Variablen separiert mit Hilfe des Diffeomorphismus $N \times A \cong NA, (n, a) \mapsto na$, so daß nach geeigneter Komplettierung gilt $C^\infty NA = C^\infty N \otimes C^\infty A$.
Mit dieser Zerlegung erhält man mit $A = 1 \otimes A$ kommutierende $\tilde{X} := X \otimes 1$, $X \in \mathfrak{n}$, zu denen auf $NA$ die Vektorfelder gehören:

$$(\tilde{X} f)(na) = \frac{d}{dt} f(ne^{tX}a) = \frac{d}{dt} f(nae^{t\mathbf{Ad}_{a^{-1}}X}) = (\mathbf{Ad}_{a^{-1}}Xf)(na)$$

Für $X_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha$ gilt nun:

$$\mathbf{Ad}_{e^{-tA}} X_\alpha = e^{\alpha(-tA)} X_\alpha = (e^t)^{-\alpha(A)} X$$

Obige Gleichung läßt sich deshalb mit der Funktion $y$ wie im dritten Kapitel $y(ne^{tA}) = e^t$ auf ganz $NA$ umformulieren zu

$$\tilde{X}_\alpha = y^{-\alpha(A)} X_\alpha$$

was man in obige Zerlegung des Symbols einsetzen kann, um

$$D_{Symbol} = D_{(0)} + yD_{(1)} + y^2 D_{(2)}$$

zu erhalten, wobei:

$$\begin{aligned} D_{(0)} &:= (A - \| R \|) \otimes A \cdot \\ D_{(1)} &:= \sum \tilde{E}_{(1)} \otimes E_{(1)} \cdot \\ D_{(2)} &:= \sum \tilde{E}_{(2)} \otimes E_{(2)} \cdot \end{aligned}$$

Als Differentialoperatoren auf $N$ kommutieren nun die in $\mathfrak{n}$ zentralen $\tilde{E}_{(2)}$ mit allen $\tilde{E}_{(1)}$. Deshalb kommutieren die Differentialoperatoren in den verschiedenen Summanden, wohingegen die CLIFFORDmultiplikationen antikommutieren,

so daß die $D_\alpha$ paarweise antikommutieren. Weil $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$ beide mit dem Operator $A$ der CLIFFORDmultiplikation mit dem konstanten Vektorfeld $A$ antikommutieren, ist es für praktische Zwecke günstiger, das Paar kommutierender Operatoren $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ zu betrachten.
Die von $NA$ zurückgezogene Volumenform ist nun nicht die Volumenform auf dem Produkt $N \times A$. Nach Konstruktion entsprechen nämlich die Vektorfelder $X \in \mathfrak{n}_\alpha$ auf $N \times A$ den Vektorfeldern $\tilde{X} = y^{-\alpha(A)}X$ auf $NA$. Deswegen nimmt die Volumenform auf $NA$ auf dem Bild einer positiv orientierten ONB von Vektorfeldern $A$, $E_s$ auf $N \times A$ den Wert $y^{-2\|R\|}$ an. Die $L^2$-Norm einer Funktion $f$ auf $NA$ berechnet sich daher nach partieller Integration auf $N \times A$ durch:

$$\| f \|^2_{L^2 NA} = \int_A \| f(- \cdot a) \|^2_{L^2 N} \, y^{-2\|R\|} \frac{dy}{y} \quad \text{mit} \quad \frac{dy}{y} = \langle A, \cdot \rangle$$

Diese Formel überträgt sich sofort auf alle die Vektorbündel, deren konstante Schnitte auch über $NA$ konstantes Skalarprodukt haben. Insbesondere gilt sie für alle hier betrachteten CLIFFORDbündel.
Betrachtet man die vorausgehende Herleitung, so erscheint es vielleicht einfacher, den anderen Diffeomorphismus $A \times N \cong AN$, $(a, n) \mapsto an$ zu benutzen, um die Variablen zu separieren. In der Tat fallen dann die $y$-Faktoren weg, aber dafür wirkt das linksinvariante Vektorfeld $A$ nicht mehr ausschließlich auf dem $C^\infty A$-Faktor. Außerdem wird es so schwieriger, zu lokal Symmetrischen Räumen ${}_\Gamma\backslash G/_K$ überzugehen, deren Enden diffeomorph zu Enden der Quotienten ${}_{\Gamma_N}\backslash NA$, $\Gamma_N = \Gamma \cap N$ der Spitzen $NA$ von ${}_\Gamma\backslash G/_K$ sind.
Inspiriert durch WEITZENBÖCKformel ziehe man nun den skalaren LAPLACEoperator auf Funktionen zum Vergleich heran:

$$\begin{aligned} \Delta &:= \sum (E_s^2 - \nabla_{E_s} E_s) \\ &= (A^2 - 2R) + \sum_{\mathfrak{n}_{(1)}} E^2_{(1)} + \sum_{\mathfrak{n}_{(2)}} E^2_{(2)} \end{aligned}$$

Separiert man nun wieder die Variablen, ersetzt also die linksinvarianten Vektorfelder $X \in \mathfrak{n}$ auf $NA$ durch die nur auf $N$ definierten Differentialoperatoren $\tilde{X}$ auf $C^\infty N$, so folgt

$$\Delta = (A^2 - 2R) + y^2 \Delta_{(1)} + y^4 \Delta_{(2)}$$

mit

$$\Delta_{(1)} = \sum_{\mathfrak{n}_{(1)}} \tilde{E}^2_{(1)} \quad \text{und} \quad \Delta_{(2)} = \sum_{\mathfrak{n}_{(2)}} \tilde{E}^2_{(2)}$$

Als Differentialoperatoren auf $N$ erfüllen die $\tilde{E}$ die LIEalgebra $\mathfrak{n}$. Deswegen kommutieren die $\tilde{E}_{(1)}$ mit den zentralen $\tilde{E}_{(2)}$ und somit auch $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$. Gemeinsame Eigenfunktionen dieser kommutierenden Operatoren werden etwa in KLINGHOLZ [5] beschrieben. Vergleicht man sie mit den den Quadraten der antikommutierenden Operatoren $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$

$$\begin{aligned}
D_{(1)}^2 &= \sum_{\mathfrak{n}_{(1)},s,t} \tilde{E}_s\tilde{E}_t \otimes E_s \cdot E_t \cdot \\
&= -\sum_{\mathfrak{n}_{(1)},s} \tilde{E}_s^2 \otimes 1 + \sum_{\mathfrak{n}_{(1)},s<t} [\tilde{E}_s, \tilde{E}_t] \otimes E_s \cdot E_t \cdot \\
&= -\sum_{\mathfrak{n}_{(1)},s} \tilde{E}_s^2 \otimes 1 + \sum_{\mathfrak{n}_{(2)},r} \sum_{\mathfrak{n}_{(1)},s<t} \tilde{E}_r \otimes \langle E_r, [E_s, E_t]\rangle E_s \cdot E_t \cdot \\
&= -\sum_{\mathfrak{n}_{(1)}} \tilde{E}_{(1)}^2 \otimes 1 + \sum_{\mathfrak{n}_{(2)}} \tilde{E}_{(2)} \otimes \Delta_{\mathfrak{n}} E_{(2)} \\
\text{und} \quad D_{(2)}^2 &= -\sum_{\mathfrak{n}_{(2)}} \tilde{E}_{(2)}^2 \otimes 1
\end{aligned}$$

sieht man sofort die Ähnlichkeit $D_{(2)}^2 = -\Delta_{(2)} \otimes 1$ und $D_{(1)}^2 = -\Delta_{(1)} \otimes 1 + \cdots$. Der störende zweite Summand erfordert es, gemeinsame Eigenfunktionen der $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$ nur mit dazu passenden $\mathcal{N} \in \Lambda\mathfrak{s}$ zu tensorieren, stellt dann aber kein Problem dar. Daher werden zunächst, KLINGHOLZ [5] folgend, gemeinsame Eigenfunktionen der Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$ beschrieben.
Wesentlich ist dabei die Beobachtung, daß sich die Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$ bereits für jede unitäre Darstellung $\pi$ von $N$ definieren lassen, weil die linksinvarianten Vektorfelder die infinitesimalen Generatoren der regulären Rechtsdarstellung von $N$ auf $L^2N$ sind. Eine unitäre Äquivalenz bildet entsprechende Generatoren aufeinander ab und somit auch die abgeleiteten Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$. Also genügt es, diese beiden Operatoren in einfachen Modellen aller Äquivalenzklassen irreduzibeler, unitärer Darstellungen zu betrachten. Die Unterscheidung zwischen den linksinvarianten Vektorfeldern $X \in \mathfrak{n}$ auf $NA$ und den zugehörigen Differentialoperatoren $\tilde{X}$ auf $N$, deren Wirkung auf den Funktionen auf $NA$ erst durch die Separation der Variablen erklärt wird, spielt dabei keine Rolle mehr und wird im folgenden fallengelassen.
Diese Äquivalenzklassen lassen sich nach KIRILLOV ( siehe [4] oder [10] ) für die einfach zusammenhängende, nilpotente LIEgruppe $N$ nach den Orbiten der koadjungierten Darstellung auf $\mathfrak{n}^*$ parametrisieren. Um diese Orbiten zu bestimmen, identifiziert man $N$ zunächst über die Expotentialabbildung mit der LIEalgebra $\mathfrak{n}$, auf der das Gruppengesetz die im ersten Kapitel angegebene Form

$$A \bullet B = A + B + \frac{1}{2}[A, B] \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathfrak{n} = N$$

der CAMPBELL-BAKER-HAUSDORFF-Formel hat. Dann ist $A^{-1} = -A$ und ganz allgemein ist $t \mapsto tA$, $A \in \mathfrak{n}$ eine Einparameteruntergruppe. Schließlich ist der Gruppenkommutator gleich der LIEklammer.

Deswegen sind adjungierte und koadjungierte Darstellung durch

$$\mathbf{Ad}_A X = X + [A, X] \quad \text{und} \quad (\mathbf{Ad}^*_A \eta)(X) = \eta(\mathbf{Ad}_{A^{-1}} X) = \eta(X - [A, X])$$

gegeben, doppelte Klammern sind in $\mathfrak{n}$ immer 0 und fallen bei diesen und ähnlichen Rechnungen sofort heraus. Zerlegt man nun $\eta \in \mathfrak{n}^*$ gemäß $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{(1)} \oplus \mathfrak{n}_{(2)}$ in $\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$, dann gehört zu $\eta_{(2)}$ der Vektor $Z^\eta \in \mathfrak{n}_{(2)}$ mit:

$$\eta[A, B] = \langle Z^\eta, [A, B] \rangle = \langle A \perp \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta, B \rangle \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathfrak{n}$$

Im Falle $\eta_{(2)} \neq 0$ bildet $\Delta_\mathfrak{n} Z^\eta$, in dieser Weise als Endomorphismus von $\mathfrak{n}$ aufgefaßt, $\mathfrak{n}_{(1)}$ in sich ab und ist als Endomorphismus von $\mathfrak{n}_{(1)}$ invertierbar! Auf den quaternional-hyperbolischen Räumen zum Beispiel bildet $\Delta_\mathfrak{n} Z^i$ den Vektor $X^\mu_s$ auf $2X^{\mu i}_s$ ab und $\Delta_\mathfrak{n} Z^j$ sowie $\Delta_\mathfrak{n} Z^k$ wirken analog. Insbesondere antikommutieren diese drei Endomorphismen, so daß mit der Linearität der Koklammer

$$(\Delta_\mathfrak{n} Z^\eta)^2 = -4 \parallel \eta_{(2)} \parallel \quad \text{auf} \quad \mathfrak{n}_{(1)}$$

folgt, was auch in den komplex-hyperbolischen Räumen gültig bleibt. Somit ist $\eta[\cdot, \cdot]$ für $\eta_{(2)} \neq 0$ eine symplektische Form auf $\mathfrak{n}_{(1)}$, so daß es genau einen Vektor $O \in \mathfrak{n}_{(1)}$ gibt, der $\eta[O^{-1}, \cdot] = \eta_{(1)}$ zunächst auf $\mathfrak{n}_{(1)}$, dann aber auch auf ganz $\mathfrak{n}$ erfüllt, denn beide Linearformen verschwinden auf $\mathfrak{n}_{(2)}$. Mit diesem Vektor gilt $\mathbf{Ad}^*_{O^{-1}} \eta = \eta_{(2)}$. Mehr kann man nicht erreichen, weil der Anteil $\eta_{(2)}$ bereits durch die Einschränkung von $\eta$ auf $\mathfrak{n}_{(2)}$ festgelegt und die adjungierte Darstellung dort trivial ist. Ist hingegen $\eta_{(2)} = 0$, so folgt für alle $A \in N$ stets $\mathbf{Ad}^*_A \eta = \eta - \eta_{(2)}[A, \cdot] = \eta$.
Somit gibt es in $\mathfrak{n}^*$ nur zwei verschiedene Typen von Orbiten, die Fixpunkte $\eta = \eta_{(1)}$ derjenigen Linearformen, die auf $\mathfrak{n}_{(2)}$ verschwinden, und die nichttrivialen Orbiten $\eta_{(2)} + \mathfrak{n}^*_{(1)}$, $\eta_{(2)} \neq 0$ aller Linearformen, die eingeschränkt auf $\mathfrak{n}_{(2)}$ übereinstimmen, dort aber nicht identisch 0 sind.

## 4.2 Modelle der irreduzibelen Darstellung $\pi_\eta$

Die unitäre Darstellung $\pi_\eta$, $\eta \in \mathfrak{n}^*$ wird nach Kirillov von einer eindimensionalen Darstellung einer Untergruppe $N^+$ von $N$ induziert, deren Liealgebra $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{n}$ eine Polarisierung von $\eta$ ist, das heißt zugleich maximal isotroper Unterraum der Bilinearform $\eta[\cdot, \cdot]$. Die Existenz einer Polarisierung ist nun für allgemeine Liegruppen nicht gesichert, kann aber für nilpotente Gruppen bewiesen werden. Dazu verallgemeinert man das in den hier betrachten Fällen $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{(1)} \oplus \mathfrak{n}_{(2)}$ einfache Argument, daß die symplektische Form $\eta[\cdot, \cdot]$, $\eta_{(2)} \neq 0$ auf $\mathfrak{n}_{(1)}$ stets maximale isotrope Unterräume, sogenannte Lagrangeunterräume $\mathfrak{n}^+_{(1)}$ besitzt, und daß dann $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}_{(2)} \oplus \mathfrak{n}^+_{(1)}$ maximal isotrope Unterräume und Unteralgebren sind, weil $\mathfrak{n}_{(2)}$ im Kern von $\eta[\cdot, \cdot]$ liegt und bereits alle Klammern enthält. Für $\eta_{(2)} = 0$ ist offenbar bereits $\mathfrak{n}$ eine Polarisierung.
Unter der Identifizierung von $N$ mit $\mathfrak{n}$ wird aus einer Unteralgebra $\mathfrak{n}^+$ die zugehörige Untergruppe $N^+ = \mathfrak{n}^+$ zur Multiplikation $\bullet$. Auf $N^+$ ist dann

$A \mapsto e^{2\pi i\eta(A)}$ ein unitärer Charakter, weil $\mathfrak{n}^+$ isotrop bezüglich $\eta[\cdot,\cdot]$ ist. Dahinter steckt das allgemeinere Argument, daß für eine linksinvariante Differentialform $\eta \in (\mathfrak{n}^+)^*$ auf einer LIEgruppe $N^+$ eine Lösung $\phi \in C^\infty N^+$ der Differentialgleichung $d\phi = \eta$, $\phi(1) = 0$ einen unitären Charakter $e^{2\pi i\phi}$ definiert. Damit eine solche Lösung aber existiert, muß $\eta$ zumindest geschlossen sein, das heißt $d\eta = -\eta[\cdot,\cdot] = 0$.
Zu diesem Charakter gehört eine eindimensionale unitäre Darstellung, die man nach $N$ induziert, in dem man Funktionen

$$L^2_{N^+}N = \{v : N \to \mathbb{C} : v(A^+ \bullet B) = e^{2\pi i\eta(A^+)}v(B) \text{ für alle } A^+ \in N^+\}$$

betrachtet, die bezüglich des bis auf einen skalaren Faktor eindeutigen $N$-rechtsinvarianten Maßes auf dem Quotienten ${}_{N^+}\backslash N$ quadratintegrabel sind, in dem Sinne, daß das Betragsquadrat einer solchen Funktion eine wohldefinierte Funktion auf dem Quotienten ist. Die unitäre Darstellung $\pi_\eta$ ist dann in dem Modell $L^2_{N^+}N$ die Rechtstranslation von $N$.
Die induzierte Darstellung $L^2_{N^+}N$ ist also auf dem HILBERTraum der quadratintegrabelen Schnitte des zur eindimensionalen unitären Darstellung von $N^+$ und dem prinzipalen $N^+$-Bündel $N$ assoziierten Bündels auf dem Quotienten ${}_{N^+}\backslash N$ definiert. Die ganze Konstruktion ist ein Spezialfall der geometrischen Quantisierung, die geeigneten POISSONunteralgebren von $C^\infty M$ einer symplektischen Mannigfaltigkeit $M$ unitäre Darstellungen auf dem HILBERTraum „polarisierter“ Schnitte eines Geradenbündels auf $M$ zuordnet, das sind Schnitte, die in gewissen Richtungen einer Differentialgleichung genügen. Die symplektische Mannigfaltigkeit $M$ ist hier der Orbit von $\eta$, den man als Quotient ${}_{N_\eta}\backslash N$ von $N$ zur Standgruppe $N_\eta$ von $\eta$ realisieren kann, und der deswegen ein wohldefiniertes Geradenbündel trägt, das an das prinzipale $N_\eta$-Bündel $N$ und die unitäre Darstellung $e^{2\pi i\eta}$ der Standgruppe assoziiert ist. $L^2_{N^+}N$ ist dann der Raum der entlang der $N^+$-Richtungen polarisierten Schnitte.
Bei den Linearformen $\eta \in \mathfrak{n}^*$ mit $\eta_{(2)} = 0$ ist bereits $N^+ = N$ eine Polarisierung, und das Modell $L^2_{N^+}N$ der zugehörigen unitären Darstellung ist der eindimensionale Raum der Vielfachen des zugehörigen Charakters $e^{2\pi i\eta}$ auf $N$. Alle Generatoren $X \in \mathfrak{n}$ operieren deshalb als Skalar $2\pi i\eta(X)$, so daß auch die abgeleiteten Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$ sowie $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ auf $\pi$ bzw. $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ eine ganz einfache Form haben.
Deshalb sei im folgenden $\eta_{(2)} \neq 0$ vorausgesetzt. Die zugehörigen Darstellungen spielen nur in den komplex- und quaternional-hyperbolischen Räumen eine Rolle, weil bereits $\mathfrak{n}_{(2)} = \{0\}$ in den reell-hyperbolischen Räumen verschwindet. In diesen Fällen läßt sich das Modell $L^2_{N^+}N$ der irreduzibelen Darstellung $\pi_\eta$ besser nach Wahl von Repräsentanten für die Nebenklassen ${}_{N^+}\backslash N$ verstehen. Dazu genügt die Wahl eines komplementären Unterraums $\mathfrak{n}^- = N^-$ von $\mathfrak{n}^+$ in $\mathfrak{n}$ oder äquivalent von $\mathfrak{n}^+_{(1)}$ in $\mathfrak{n}_{(1)}$, denn additive und multiplikative Zerlegung

von $N$ entsprechen sich eineindeutig:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^- \quad \text{ergibt} \quad A^+ + A^- = A = (A^+ - \frac{1}{2}[A^+, A^-]) \bullet A^- \quad \text{in} \quad N = N^+ \bullet N^-$$

Zwei solche komplementäre Unterräume $\mathfrak{n}^+$ und $\mathfrak{n}^-$ von $\mathfrak{n}$ haben in den komplex- und quaternional-hyperbolischen Räumen $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ und $\mathbb{H}\mathrm{H}^{n+1}$ die Dimension $n+1$ und $n$ bzw. $2n+3$ und $2n$.
Die Rechtsoperation von $B \in N$ auf dem Quotienten ${}_{N^+}\backslash N$ ist einfach die Translation $N^+ \bullet A^- \bullet B = N^+ \bullet (A^- + B^-)$ mit $B^-$, so daß das Volumenmaß auf dem EUKLIDischen Vektorraum $\mathfrak{n}^-$ bereits ein $N$-invariantes Maß ist. Beschränkt man sich im folgenden auf ebenfalls isotrope Komplemente $\mathfrak{n}^-$, die für die symplektische Form $\eta[\cdot, \cdot]$ stets existieren, so gilt für eine $N^+$-linksäquivariante Funktion $v$ auf $N$

$$v(A) = v((A^+ - \frac{1}{2}[A^+, A^-]) \bullet A^-) = e^{2\pi i \eta(A^+ - \frac{1}{2}[A^+, A^-])} v(A^-)$$

was $L^2_{N^+}N$ und $L^2\mathfrak{n}^-$ explizit identifiziert. In diesem Sinne operieren $N$ und $\mathfrak{n}$ auf dem Raum $L^2_{N^+}N$ als

$$\begin{aligned}(Bv)(A^-) &= v(A^- \bullet B) = v(B^+ + \frac{1}{2}[A^-, B] + A^- + B^-) \\ &= e^{2\pi i \eta(B^+ + \frac{1}{2}[A^-, B] - \frac{1}{2}[B^+, A^- + B^-])} v(A^- + B^-) \\ &= e^{2\pi i \eta(B^+ - \frac{1}{2}[B^+, B^-] + [A^-, B^+])} v(A^- + B^-)\end{aligned}$$

bzw.

$$(Xv)(A^-) = 2\pi i \eta(X^+ + [A^-, X^+]) v(A^-) + \frac{\partial v}{\partial X^-}(A^-)$$

wobei $\frac{\partial v}{\partial X^-}$ die Ableitung der auf dem Vektorraum $\mathfrak{n}^-$ definierten Funktion $v$ in Richtung $X^- \in \mathfrak{n}^-$ ist.
Sowohl der DIRACoperator $D_{(1)}$ als auch der LAPLACEoperator $\Delta_{(1)}$ summieren nun die infinitesimalen Generatoren der unitären Darstellung $\pi_\eta$ über eine ONB von $\mathfrak{n}_{(1)}$. Diese Generatoren operieren aber in besonders einfacher Weise, wenn sie aus $\mathfrak{n}^+$ oder $\mathfrak{n}^-$ kommen. Glücklicherweise ist in allen hier betrachteten Fällen das orthogonale Komplement von $\mathfrak{n}^+$ in $\mathfrak{n}$ isotrop, und kann deshalb als $\mathfrak{n}^-$ dienen. Denn als Endomorphismus von $\mathfrak{n}_{(1)}$ erhält $\Delta_\mathfrak{n} Z^\eta$ im wesentlichen die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta(X), \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta(Y) \rangle = -\langle (\Delta_\mathfrak{n} Z^\eta)^2(X), Y \rangle = 4 \parallel \eta_{(2)} \parallel \langle X, Y \rangle$$

bis auf diesen Faktor also auch die symplektische Form $\eta[\cdot, \cdot] = \langle \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta(\cdot), \cdot \rangle$. Das Bild des maximal isotropen Unterraums $\mathfrak{n}^+_{(1)}$ unter $\Delta_\mathfrak{n} Z^\eta$ ist damit isotrop und liegt im orthogonalen Komplement $\mathfrak{n}^-$, muß also aus Dimensionsgründen bereits ganz $\mathfrak{n}^-$ sein. Zu einer ONB $X_s^-$ von $\mathfrak{n}^-$ kann man nun eine passende ONB $X_s^+$ von $\mathfrak{n}_{(1)}^+$ definieren durch:

$$X_s^+ = \frac{1}{2 \parallel \eta_{(2)} \parallel} \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta (X_s^-)$$

Dann gilt zum Beispiel wegen $\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta (X_s^+) = -2 \parallel \eta_{(2)} \parallel X_s^-$

$$\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta = 2 \parallel \eta_{(2)} \parallel \sum_s X_s^- \wedge X_s^+$$

denn in jeder ONB $E_s$ von $\mathfrak{n}_{(1)}$ hat man die Expansion:

$$\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta = \frac{1}{2} \sum_{s,t} \langle \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta, E_s \wedge E_t \rangle E_s \wedge E_t = \frac{1}{2} \sum_s E_s \wedge \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta (E_s)$$

Die Generatoren $X_s^+$ operieren dann auf $L^2_{N^+}N$ durch Multiplikation mit der Funktion $x_s(A^-) = \langle X_s^-, A^- - O^- \rangle$, wobei $O \in \mathfrak{n}_{(1)}$ wie oben der eindeutig bestimmte Vektor ist, der $\eta[O^{-1}, \cdot] = \eta_{(1)}$ erfüllt:

$$\begin{aligned} 2\pi i \eta (X_s^+ + [A^-, X_s^+]) &= 2\pi i \eta [A^- + O^{-1}, X_s^+] \\ &= -2\pi i \langle \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta (X_s^+), A^- - O^- \rangle \\ &= 4\pi i \parallel \eta_{(2)} \parallel x_s(A^-) \end{aligned}$$

Somit definieren die affinen, orthogonalen Koordinaten $x_s$ auf $\mathfrak{n}^-$ mit Ursprung in $O^-$ eine Isometrie des $L^2\mathbb{R}^{\dim\ \mathfrak{n}^-}$ mit dem Modell $L^2_{N^+}N \cong L^2\mathfrak{n}^-$ der unitären Darstellung $\pi_\eta$, unter der die Generatoren $X_s^+$ in die Multiplikation mit den Ortskoordinaten $4\pi i \parallel \eta_{(2)} \parallel x_s$ übergehen, während die $X_s^-$ wegen $\frac{\partial x_s}{\partial X_t^-} = \delta_{s,t}$ den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_s}$ entsprechen. Die Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $D_{(1)}$ lassen sich also auf $\pi_\eta$ bzw. $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ beschreiben durch:

$$\Delta_{(1)} = \sum_s \Big( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - 16\pi^2 \parallel \eta_{(2)} \parallel^2 x_s^2 \Big)$$

und

$$D_{(1)} = \sum_s \Big( \frac{\partial}{\partial x_s} \otimes X_s^- \cdot + 4\pi i \parallel \eta(2) \parallel x_s \otimes X_s^+ \cdot \Big)$$

Die Operatoren $\Delta_{(2)}$ und $D_{(2)}$ sind einfacher, weil jeder Generator $Z$ aus $\mathfrak{n}_{(2)}$ nach Definition der Darstellung $\pi_\eta$ als Skalar $2\pi i \eta(Z)$ operiert:

$$\Delta_{(2)} = -4\pi^2 \parallel \eta_{(2)} \parallel^2 \quad \text{und} \quad D_{(2)} = 2\pi i \otimes Z^\eta \cdot$$

## 4.3 Einbettungen der Darstellungen $\pi_\eta$

Der Raum der quadratintegrabelen Funktionen auf $N$ ist nach KIRILLOV nun das direkte Integral

$$L^2N = \int_{N\backslash\mathfrak{n}^*}^{\oplus} \pi_\eta \ \text{PLANCHEREL}(d\eta)$$

der unitären irreduzibelen Darstellungen $\pi_\eta$ von $N$. Das PLANCHERELmaß hat keine Atome, so daß keine Darstellung $\pi_\eta$ tatsächlich ein direkter Summand in $L^2N$ ist. Deshalb läßt sich ein Vektor $v$ einer irreduzibelen Darstellung $\pi_\eta$ höchstens in einem verallgemeinerten Sinn als Element von $L^2N$ auffassen, er ist ja etwa im Modell $L^2_{N^+}N$ eine Funktion auf $N$, die aber von der Polarisierung $N^+$ abhängt. Über die explizite Form der Transformation in dieses direkte Integral scheint dementsprechend wenig bekannt zu sein.
Ganz anders liegt der Fall bei den quadratintegrabelen Funktionen auf Quotienten $_\Gamma\backslash N$, $\Gamma \subset N$ bezüglich diskreter, kokompakter Untergruppen $\Gamma$. Die reguläre Rechtsdarstellung von $N$ auf $L^2\ _\Gamma\backslash N$ läßt sich hier in die orthogonale Summe irreduzibeler Darstellungen zerlegen:

$$L^2\ _\Gamma\backslash N = \bigoplus_{\eta\in\ N\backslash\mathfrak{n}^*} \pi_\eta^{\oplus \text{PLANCHEREL}_\Gamma(\eta)}$$

Alle Darstellungen $\pi_\eta$ mit $\text{PLANCHEREL}_\Gamma(\eta) \neq 0$ werden dadurch - eventuell sogar mehrfach - zu direkten Summanden in $L^2\ _\Gamma\backslash N$, und die Vektoren $v \in \pi_\eta$ werden dadurch zu Funktionen $Fv \in L^2\ _\Gamma\backslash N$. Keine Darstellung kann aber unendlich oft in $L^2\ _\Gamma\backslash N$ erscheinen, weil etwa der skalare LAPLACEoperator unter diesen Voraussetzungen diskretes Spektrum mit endlichen Multiplizitäten hat.
Die zentrale Untergruppe $\Gamma_{(2)} = \Gamma \cap N_{(2)}$ operiert nun trivial in $L^2\ _\Gamma\backslash N$ und damit auch in allen Darstellungen $\pi_\eta$, die als direkte Summanden in $L^2\ _\Gamma\backslash N$ in Frage kommen. Deshalb ist es wichtig zu wissen, daß $\Gamma_{(2)}$ ein Gitter in der Vektorgruppe $N_{(2)} = \mathfrak{n}_{(2)}$ ist. Zunächst ist nämlich $[\mathfrak{n}_{(1)}, \mathfrak{n}_{(1)}] \to \mathfrak{n}_{(2)}$ surjektiv, weil die adjungierte Abbildung $\mathfrak{n}^*_{(2)} \to \mathfrak{n}^*_{(1)} \otimes \mathfrak{n}^*_{(1)}$ der Linearform $\eta_{(2)} \neq 0$ die symplektische Form $\eta_{(2)}[\cdot,\cdot]$ zuordnet und folglich injektiv ist. Die orthogonale Projektion $\Gamma_{(1)}$ der kokompakten Untergruppe $\Gamma \subset \mathfrak{n}$ auf $\mathfrak{n}_{(1)}$ spannt $\mathfrak{n}_{(1)}$ auf, so daß $[\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(1)}] = [\Gamma, \Gamma] \subset \Gamma_{(2)}$ bereits $N_{(2)}$ aufspannt. Übrigens muß für die diskrete Untergruppe $\Gamma$ dann auch $\Gamma_{(1)}$ ein Gitter im Vektorraum $\mathfrak{n}_{(1)}$ sein.
Wegen $C \bullet A = A + C$ für $C \in \Gamma_{(2)}$ sind die $\Gamma$-invarianten Funktionen auf $N$ zumindest auch $\Gamma_{(2)}$-periodisch. Somit zerfällt der Raum $L^2\ _\Gamma\backslash N$ nicht nur in irreduzibele Darstellungen von $N$, sondern auch in die orthogonale Summe über das zu $\Gamma_{(2)}$ duale Gitter $\Gamma^\vee_{(2)}$ in $\mathfrak{n}^*_{(2)}$:

$$L^2\ _\Gamma\backslash N = \bigoplus_{\eta_{(2)}\in\Gamma^\vee_{(2)}} (L^2\ _\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}}$$

Vergleicht man die Operation von zentralen Elementen $A \in N_{(2)}$ in den irreduzibelen Darstellungen $\pi_\eta$ und in $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}}$, so erkennt man sofort, daß $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_0$ die Summe aller eindimensionalen und $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}}$, $\eta_{(2)} \neq 0$ die Summe aller $\pi_{\eta_{(2)}}$-Darstellungen in $L^2\ {}_\Gamma\backslash N$ ist. Andere irreduzibele Darstellungen kann $L^2\ {}_\Gamma\backslash N$ nicht enthalten.
Die eindimensionalen Darstellungen $\pi_\eta$, $\eta_{(2)} = 0$ können aber nur auf eine Art und Weise in den $L^2\ {}_\Gamma\backslash N$ eingebettet sein, nämlich als Vielfache des zugehörigen Charakters $e^{2\pi i\eta}$ auf $N$, denn eine Einbettung $F$ verschränkt die $N$-Darstellungen und erfüllt somit $Fv(\Gamma \bullet A) = F(Av)(\Gamma \bullet 0)$. Ihre Bilder liegen im Raum der $N_{(2)}$-invarianten Funktionen $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_0$, in dem $\Gamma$-Invarianz schon $\Gamma_{(1)}$-Invarianz nach sich zieht:

$$(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_0 \cong vol(\ {}_{\Gamma_{(2)}}\backslash N_{(2)}\ )\ L^2\ {}_{\Gamma_{(1)}}\backslash \mathfrak{n}_{(1)} = vol(\ {}_{\Gamma_{(2)}}\backslash N_{(2)}\ ) \bigoplus_{\eta \in \Gamma_{(1)}^\vee} \pi_\eta$$

$\Gamma_{(1)}^\vee$ ist dabei das zu $\Gamma_{(1)}$ duale Gitter in $\mathfrak{n}_{(1)}^*$. Einen solchen Isomorphismus gibt es wegen $C \bullet A = (A_{(2)} + C_{(2)} + \frac{1}{2}[A, C]) + (A_{(1)} + C_{(1)})$ ganz allgemein

$$(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}} \cong vol(\ {}_{\Gamma_{(2)}}\backslash N_{(2)}\ )\ L^2\ {}_{\Gamma_{(1)}}\backslash \mathfrak{n}_{(1)}$$

aber seine Konstruktion erfordert für $\eta_{(2)} \neq 0$ die Auswahl eines Fundamentalbereichs von ${}_{\Gamma_{(1)}}\backslash \mathfrak{n}_{(1)}$. Die eine Richtung schränkt Funktionen aus $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}}$ auf diesen Fundamentalbereich ein, die Rückrichtung setzt Funktionen auf dem Fundamentalbereich mit 0 nach $\mathfrak{n}_{(1)}$ fort und multipliziert danach mit dem Faktor $e^{2\pi i\eta(A_{(2)})}$, um bereits $\Gamma_{(2)}$-invariante Funktionen auf $N_{(2)}$ zu erhalten. Zum Schluß werden diese noch über ${}_{\Gamma_{(2)}}\backslash\Gamma$ summiert.
Für geeignete $\eta_{(2)} \neq 0$ kann man diesen Isomorphismus nun dazu benutzen, die in Klingholz [5] angegebene Beschreibung der $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}}$ weiter auszuarbeiten. Es sind dies die $\eta_{(2)}$, für die es eine Polarisation $\mathfrak{n}^+$ und ein isotropes Komplement $\mathfrak{n}^-$ gibt, so daß gilt:

$$\Gamma_{(1)} = \Gamma_{(1)}^+ + \Gamma_{(1)}^- \quad \text{für} \quad \Gamma_{(1)}^+ = \Gamma_{(1)} \cap \mathfrak{n}_{(1)}^+ \quad \text{und} \quad \Gamma_{(1)}^- = \Gamma_{(1)} \cap \mathfrak{n}^-$$

Die $\Gamma_{(1)}^\pm$ sind dann ebenfalls Gitter in $\mathfrak{n}_{(1)}^+$ bzw. $\mathfrak{n}^-$. Sei $\Gamma^+$ das Urbild von $\Gamma_{(1)}^+$ in $\Gamma$. Jede Linearform $\eta \in \mathfrak{n}^*$ mit $\eta - \eta_{(1)} = \eta_{(2)}$ definiert dann einen Charakter $e^{2\pi i\eta}$ auf $\Gamma^+$. Im folgenden sind die Linearformen $\eta$ mit $\eta - \eta_{(1)} = \eta_{(2)}$ besonders wichtig, die auf $\mathfrak{n}^-$ verschwinden und auf $\Gamma^+$ ganzzahlig sind. Die Differenz zweier solcher Linearformen verschwindet auf $\mathfrak{n}_{(2)}$ und $\mathfrak{n}^-$ und liegt in diesem Sinne im dualen Gitter $(\Gamma_{(1)}^+)^\vee$ von $\Gamma_{(1)}^+$ in $(\mathfrak{n}_{(1)}^+)^*$. Nach Wahl von Erzeugern von $\Gamma_{(1)}^+$ und Repräsentanten in $\Gamma^+$ kann man leicht eine Ursprungslinearform $\eta$ in diesem „affinen Modul“ definieren, ist eine Linearform nämlich auf diesen Repräsentanten und auf $\Gamma_{(2)}$ ganzzahlig, dann muß der Charakter $e^{2\pi i\eta}$ auf $\Gamma^+$ trivial und $\eta$ damit auf $\Gamma^+$ ganzzahlig sein!

Die irreduzibele Darstellung $\pi_\eta$ besitzt mit dieser fest vorgegebenen Polarisation für jedes $\eta + \Delta\eta$, $\Delta\eta \in (\Gamma^+_{(1)})^\vee$ das Modell $L^2_{N^+}N$. Die Funktionen $v$ in diesem Raum sind nach Definition $\Gamma^+$-invariant und werden $\Gamma$-invariant durch Summation über ${}_{\Gamma^+}\backslash\Gamma$:

$$(Fv)(A) = \sum_{C \in {}_{\Gamma^+}\backslash\Gamma} v(C \bullet A) = \sum_{C^- \in \Gamma^-_{(1)}} v(C \bullet A)$$

Die letzte Gleichheit gilt erst nach Wahl von Repräsentanten $C \in \Gamma$ für die $C^- \in \Gamma^-_{(1)}$ und benutzt die dadurch mögliche Darstellung $\Gamma = \Gamma^+ \bullet \Gamma^-_{(1)}$. Wundersamerweise respektiert diese simple Summation nicht nur die Darstellungen von $N$ von rechts auf $L^2_{N^+}N$ und $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta(2)}$, sondern definiert bereits eine Einbettung von $\pi_\eta$ in diesen Raum! Die Summation kann man nämlich nach Definition von $L^2_{N^+}N$ umformulieren zu:

$$\begin{aligned}
(Fv)(A) &= \sum_{C^- \in \Gamma^-_{(1)}} v(C \bullet A) \\
&= \sum_{C^- \in \Gamma^-_{(1)}} e^{2\pi i(\eta+\Delta\eta)(C^+ + A^+ + [C^-,A^+] - \frac{1}{2}[C^+,C^-] - \frac{1}{2}[A^+,A^-])} v(A^- + C^-) \\
&= e^{2\pi i\eta(A^+ - \frac{1}{2}[A^+,A^-])} \sum_{C^- \in \Gamma^-_{(1)}} e^{2\pi i\eta(C^+)} e^{2\pi i(\Delta\eta(A^+) + \eta[C^-,A^+])} v(A^- + C^-)
\end{aligned}$$

Dabei verschwindet $\Delta\eta$ auf Klammern und auf $C^+$, denn $C$ erfüllt $C^+ = C_{(2)}$ als Repräsentant von $C^-$ in $\Gamma$. Um die einzelnen Teile dieses Ausdrucks zu interpretieren, betrachte man nun die Zerlegung $\mathfrak{n}_{(1)} = \mathfrak{n}^+_{(1)} \oplus \mathfrak{n}^-$, die einen Isomorphismus

$$L^2\ {}_{\Gamma_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}_{(1)} \cong L^2\ {}_{\Gamma^+_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^+_{(1)} \otimes L^2\ {}_{\Gamma^-_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^-$$

bestimmt. Lediglich das Skalarprodukt der rechten Seite ist dabei um den Faktor der GRAMschen Determinante der Projektion einer ONB des orthogonalen Komplements von $\mathfrak{n}^+$ auf $\mathfrak{n}^-$ zu groß. Der Raum $L^2\ {}_{\Gamma^+_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^+_{(1)}$ zerfällt nun in die orthogonale Summe seiner FOURIERmoden, die durch das duale Gitter $(\Gamma^+_{(1)})^\vee$ parametrisiert werden. In diesem Gitter liegen auch die Linearformen $\eta[C,\cdot]$, $C^- \in \Gamma^-_{(1)}$, die auf $\mathfrak{n}_{(2)}$ und $\mathfrak{n}^-$ verschwinden, nicht von der Auswahl eines Repräsentanten $C \in \Gamma$ abhängen und wegen $[C,\Gamma] \subset \Gamma_{(2)}$ auf ganz $\Gamma$ ganzzahlig sind. Diese Linearformen sind das Bild des Gitters $\Gamma^-_{(1)}$ unter der Identifizierung von $\mathfrak{n}^-$ mit $(\mathfrak{n}^+_{(1)})^*$ vermöge der symplektischen Form $\eta[\cdot,\cdot]$ und bilden somit ein Untergitter $\eta[\Gamma^-_{(1)},\cdot]$ von $(\Gamma^+_{(1)})^\vee$.

Die Essenz des oben angegebenen Isomorphismus ist es nun, daß man nur das Skalarprodukt der Einschränkung zweier $Fv$ und $Fw$ auf einen Fundamentalbereich von $_{\Gamma_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}_{(1)}$ berechnen muß, um ihr Skalarprodukt in $(L^2\ {}_\Gamma\backslash N)_{\eta_{(2)}}$ zu bestimmen. Bei der nötigen Integration spielt der Faktor $e^{2\pi i\eta(A^+-\frac{1}{2}[A^+,A^-])}$ vom Betrag 1 keine Rolle. Dann kann man in den Faktoren $e^{2\pi i(\Delta\eta(A^+)+\eta[C^-,A^+])}$ der Summanden von $Fv$ und $Fw$ FOURIERmoden von $_{\Gamma^+_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^+_{(1)}$ erkennen, denn $\Delta\eta$ liegt nach Definition in $(\Gamma^+_{(1)})^\vee$. Diese stehen für verschiedene $C^-$ aufeinander senkrecht, so daß sich auch der Faktor $e^{2\pi i\eta(C^+)}$ aufhebt und

$$\langle Fv,Fw\rangle = (vol\ {}_{\Gamma^+_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^+_{(1)}\ )\sum_{C^-\in\Gamma^-_{(1)}}\int \bar{v}(A^-+C^-)w(A^-+C^-)dA^-$$

verbleibt, wobei über einen Fundamentalbereich von $_{\Gamma^-_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^-$ integriert wird. Bis auf den Volumenfaktor ist dies genau das Skalarprodukt von $v$ und $w$ im Modell $L^2_{N^+}N$. Die Summation über $\Gamma^-_{(1)}$ verteilt sozusagen die Translate des Fundamentalbereichs auf die unterschiedlichen, „transversalen“ FOURIERmoden $\Delta\eta+\eta[\Gamma^-_{(1)},\cdot]$ von $_{\Gamma^+_{(1)}}\backslash\mathfrak{n}^+_{(1)}$. Der Raum $L^2\ {}_{\Gamma(1)}\backslash\mathfrak{n}_{(1)}$ kann somit vollständig mit irreduzibelen Darstellungen $\pi_\eta$ ausgeschöpft werden. Dazu muß man nur einen Repräsentanten $\Delta\eta$ für jede Nebenklasse $(\Gamma^+_{(1)})^\vee/_{\eta[\Gamma^-_{(1)},\cdot]}$ wählen und das zu $\eta+\Delta\eta$ gehörende Modell $L^2_{N^+}N$ einbetten:

$$\text{PLANCHEREL}_\Gamma(\eta) = \left[(\Gamma^+_{(1)})^\vee : \eta[\Gamma^-_{(1)},\cdot]\right]$$

Wie einschränkend ist die Forderung nach Existenz einer Polarisierung von $\eta_{(2)}$, die $\Gamma$ im obigen Sinne respektiert? Im komplex-hyperbolischen Raum existiert sie entweder für alle oder kein $\eta_{(2)}\neq 0$. Im quaternionial-hyperbolischen Raum können wohl selbst für festes $\Gamma$ je nach $\eta_{(2)}$ beide Fälle eintreten. KLINGHOLZ[5] schränkt sich deshalb von vorneherein auf die Klasse der „arithmetischen“ Untergruppen $\Gamma$ ein, die für alle $\eta_{(2)}$ Untergruppen $\tilde{\Gamma}$ vom endlichen Index besitzen, die diese Bedingung erfüllen.
Die ganze Analyse muß man etwas modifizieren, wenn man Spinstrukturen im Sinne Abschnitts **1.2** zuläßt. Die Untergruppe $\Gamma\subset N$ besitzt immer die triviale Spinstruktur $s:\Gamma\to\widehat{\Gamma}$, die von der Einbettung $NA\hookrightarrow\widehat{G}$ herkommt. Nur für diese Spinstruktur ist der Raum der $s(\Gamma)$-invarianten Schnitte in $C^\infty(\widehat{G},V)_{\widehat{K}}$ isomorph zu $C^\infty\ {}_\Gamma\backslash NA\otimes V - L^2\ {}_\Gamma\backslash N\otimes V$ also der relevante HILBERTraum. Alle anderen Spinstrukturen entstehen mit Hilfe eines Homomorphismus $\chi$ von $\Gamma$ in den zentralen Kern $Z$ der Projektion $\widehat{G}\to G$ aus $s$ durch $s'(\gamma)=\chi(\gamma)s(\gamma)$. Dann bedeutet $s'(\Gamma)$-Invarianz:

$$\psi(g)=\psi(\chi(\gamma)s(\gamma)g)=\psi(s(\gamma)g\chi(\gamma))=\chi(\gamma)^{-1}*\psi(s(\gamma)g)$$

Somit ist der richtigen HILBERTraum in diesem Fall:

$$L^2_\Gamma N \otimes V = \{f : N \to V : f(C \bullet A) = \chi(C) * f(A) \text{ für alle } C \in \Gamma\}$$

Integrieren kann man dabei über einen beliebigen Fundamentalbereich von ${}_\Gamma\backslash N$, denn die Darstellung $*$ ist orthogonal.
Diese Spinstrukturen treten beim DIRACoperator auf Spinoren ganz natürlich in Erscheinung, dort ist $Z = \mathbb{Z}_2$ und operiert als $\pm 1$ auf $\Lambda\mathfrak{s}$. Für eine nichttriviale Spinstruktur, charakterisiert durch $\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$, ist der DIRACoperator $D$ auf Spinoren dann in dem Raum $L^2_\Gamma N \otimes V$ definiert. In diesem Raum kann man aber auch den DIRACoperator auf Multivektoren definieren. Diese Möglichkeit wird relevant, wenn man das Multivektorbündel mit dem flachen Geradenbündel $L$ twistet, das über $\chi$ und die Darstellung $\pm 1$ von $\mathbb{Z}_2$ an das prinzipale $\Gamma$-Bündel $G/_K$ über ${}_\Gamma\backslash G/_K$ assoziiert ist.
Auf dem Gitter $\Gamma_{(2)}$ gibt es eine Linearform $\chi_{(2)} \in \mathfrak{n}^*_{(2)}$, die $\chi = e^{2\pi i \chi_{(2)}}$ erfüllt. Die Funktionen aus $L^2_\Gamma N$ sind dann im wesentlichen wieder $\Gamma_{(2)}$-periodisch, so daß man neben der Zerlegung in irreduzibele, unitäre $N$-Darstellungen wieder die Zerlegung

$$L^2_\Gamma N = \bigoplus_{\eta_{(2)} - \chi_{(2)} \in \Gamma^\vee_{(2)}} (L^2_\Gamma N)_{\eta_{(2)}}$$

angeben kann. Somit können die $L^2_\Gamma N$ nur für Spinstrukturen mit $\chi_{(2)} \in \Gamma^\vee_{(2)}$ überhaupt eindimensionale Darstellungen enthalten. Zwei $L^2_\Gamma N$, deren Homomorphismen $\chi$ auf $\Gamma_{(2)}$ nicht übereinstimmen, können ganz allgemein nur paarweise inäquivalente Darstellungen enthalten. Insbesondere für Untergruppen $\Gamma$ mit $\Gamma_{(2)} \neq [\Gamma, \Gamma]$ gibt es deswegen erhebliche Unterschiede in der Zerlegung in irreduzibele, unitäre Darstellungen von $N$, und damit auch im Spektrum der DIRACoperatoren.

# 5 Eigenschnitte des Symbols

Die Vektoren $v \in \pi_\eta$ lassen sich also als abstrakte Distributionen bzw. Funktionen in $L^2 N$ bzw. $L^2\ {}_\Gamma\backslash N$ auffassen. In diesem Sinne abstrakte Eigenfunktionen der Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$ werden zunächst als Eigenvektoren dieser Operatoren in den einfachen Modellen $L^2_{N^+} N$ der irreduzibelen Darstellungen $\pi_\eta$ beschrieben. Mit nur geringen Modifikationen erhält man dann abstrakte Eigenschnitte der kommutierenden Operatoren $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ in $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s}$.
Insbesondere hängen die Eigenwerte dieser Operatoren nicht von der Einbettung in einen $L^2 N$ oder $L^2\ {}_\Gamma\backslash N$ ab. Deshalb kann man auch die Frage nach der Fortsetzung der Eigenschnitte auf $N$ zu Eigenschnitten des Symbols auf $NA$ unabhängig von der Einbettung bereits in $\pi_\eta \otimes C^\infty A \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ stellen. Ist $\psi$ ein gemeinsamer Eigenvektor von $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ in $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s}$, so versucht man dazu einen Ansatz:

$$\tilde{\psi} = y^{\|R\|} f_1 \psi + y^{\|R\|} f_2 A \cdot \psi \quad \text{mit} \quad f_1, f_2 \in C^\infty A$$

Mit diesem Ansatz kann man für die FOURIERkoeffizienten $f_1$ und $f_2$ eine gewöhnliche Differentialgleichung herleiten, die von den Eigenwerten von $\psi$ unter $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ und dem gewünschten Eigenwert $E$ auf $NA$ abhängt. Diese Gleichung wird dann in zwei Spezialfällen gelöst.

## 5.1 Gemeinsame Eigenvektoren von $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$

Gemeinsame Eigenvektoren der Operatoren $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$ lassen sich in den zu den eindimensionalen unitären Darstellungen $\pi_\eta$, $\eta_{(2)} = 0$, gehörenden Räumen $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ leicht angeben. Weil nämlich jeder Generator $X \in \mathfrak{n}$ als Skalar $2\pi i\eta(X)$ operiert, folgt in diesen Fällen sofort $AD_{(2)} = 0$, und gehört zu $\eta = \eta_{(1)}$ der Vektor $P \in \mathfrak{n}_{(1)}$, so operiert $D_{(1)}$ durch CLIFFORDmultiplikation mit $2\pi iP$. Ein Eigenvektor von $D_{(1)}$ ist deshalb in $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s} \cong \Lambda\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$ von der Form

$$(P \pm i \parallel P \parallel) \cdot \mathcal{N}$$

und dazu gehört wegen $\parallel P \parallel = \parallel \eta \parallel$ der Eigenwert $\mp 2\pi \parallel \eta \parallel$. Die Operatoren $\Delta_{(1)}$ und $\Delta_{(2)}$ operieren auf $\pi_\eta$ durch Multiplikation mit $-4\pi^2 \parallel \eta \parallel^2$ bzw. 0.
In den unendlichdimensionalen Darstellungen $\pi_\eta$ mit $\eta_{(2)} \neq 0$ hingegen ist $\Delta_{(1)}$ im wesentlichen Summe von Operatoren der Form $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x^2}{\sigma^4}$ zur Varianz $\sigma^2$, $\sigma > 0$, auf dem $L^2\mathbb{R}$. Die Eigenwerte und Eigenwerte und Eigenfunktionen von Operatoren dieser Form sind in Verbindung mit der Quantisierung des harmonischen Oszillators bereits lange bekannt. Dazu definiert man zunächst die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$a := \frac{x}{\sigma} - \sigma\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad a^\dagger := \frac{x}{\sigma} + \sigma\frac{\partial}{\partial x}$$

der Oszillatormoden auf dem dichten Unterraum der SCHWARTZfunktionen. Die SCHWARTZfunktionen fallen nun zusammen mit allen ihren Ableitungen schneller als jedes Polynom, so daß $a$ und $a^\dagger$ diesen Unterraum in sich abbilden und dort adjungiert bezüglich der $L^2$-Metrik sind. Außerdem erfüllen sie auf diesem Raum die kanonische Vertauschungsrelation

$$[a^\dagger, a] = 2 \quad \text{wegen} \quad [\sigma\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x}{\sigma}] = 1$$

und deshalb

$$[a^\dagger, a^{k+1}] = \sum_{l=0}^{k} a^l [a^\dagger, a] a^{k-l} = 2(k+1)a^k$$

Die Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelation auf dem SCHWARTZraum wird nun durch das „Vakuum“ $\Phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ vervollständigt, in dem nichts mehr vernichtet werden kann, das heißt $a^\dagger\Phi = 0$.
Damit wird die Vertauschungsrelation zur Differentialgleichung

$$(a^\dagger a)a^k\Phi = [a^\dagger, a^{k+1}]\Phi + a^{k+1}a^\dagger\Phi = 2(k+1)a^k\Phi$$

für die HERMITEfunktionen $H_k = a^k \Phi$, $k \geq 0$, genauer:

$$\big(\frac{x^2}{\sigma^2} - \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\big) H_k = 2(k+1) H_k$$

Die klassischen HERMITEfunktionen erhält man für $\sigma = 1$

$$H_k = (x - \frac{\partial}{\partial x})^k e^{-\frac{x^2}{2}} = (-e^{\frac{x^2}{2}} \circ \frac{\partial}{\partial x} \circ e^{-\frac{x^2}{2}})^k e^{-\frac{x^2}{2}}$$

die anderen Fälle $\sigma \neq 1$ ergeben sich daraus durch die Substitution $\tilde{x} = \frac{x}{\sigma}$. Per Induktion zeigt man, daß $H_k$ das Produkt eines Polynoms genau $k$-ten Grades mit dem Vakuum $\Phi$ ist, so daß man Funktionen aus $C_0^\infty \mathbb{R} = \Phi^{-1} C_0^\infty \mathbb{R}$ und damit auch Funktionen aus $L^2\mathbb{R}$ im $L^2$-Sinne beliebig durch HERMITEfunktionen approximieren kann. Die HERMITEfunktionen $H_k$ sind somit ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2\mathbb{R}$, es gilt nämlich für $k \geq l$

$$\begin{aligned}
\langle H_k, H_l \rangle_{L^2\mathbb{R}} &= \langle a^k \Phi, a^l \Phi \rangle_{L^2\mathbb{R}} = \langle \Phi, (a^\dagger)^k a^l \Phi \rangle_{L^2\mathbb{R}} \\
&= 2l \, \langle \Phi, (a^\dagger)^{k-1} a^{l-1} \Phi \rangle_{L^2\mathbb{R}} = \ldots \\
&= 2^k k! \sqrt{2\pi} \sigma \delta_{k,l}
\end{aligned}$$

wegen $\langle \Phi, \Phi \rangle_{L^2\mathbb{R}} = \sqrt{2\pi}\sigma$. In diesem vollständigen Orthogonalsystem operiert $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x^2}{\sigma^4}$ diagonal mit einfachen Eigenwerten $-\frac{2k+1}{\sigma^2}$, $k \geq 0$.
Wählt man nun eine Polarisierung $N^+$ und eine ONB $X_s^+$ von $\mathfrak{n}_{(1)}^+$, passend zu einer ONB $X_s^-$ des orthogonalen Komplements $\mathfrak{n}^-$, so kann man das Modell $L^2_{N^+}N$ der unitären Darstellung $\pi_\eta$ über die orthogonalen Koordinaten $x_s$ mit dem $L^2\mathbb{R}^{\dim\ \mathfrak{n}^-}$ identifizieren; der Operator $\Delta_{(1)}$ nimmt dann die Form

$$\Delta_{(1)} = \sum_s \big( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - 16\pi^2 \parallel \eta_{(2)} \parallel^2 x_s^2 \big)$$

an und hat somit ein vollständiges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen:

$$H_{(k_1,\ldots,k_{\dim\ \mathfrak{n}^-})}(A^-) = \prod_s (H_{k_s} \circ x_s)(A^-)$$

aus Produkten von HERMITEfunktionen zur Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{4\pi \|\eta_{(2)}\|}$, die durch Tupel der Form $(k_1, \ldots, k_{\dim\ \mathfrak{n}^-})$, $k_s \geq 0$, parametrisiert werden. Der Eigenwert

$$-4\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (2K + \dim\ \mathfrak{n}^-) \quad \text{mit} \quad K = \sum_s k_s$$

richtet sich dabei nur nach der Summe $K$ der $k_s$, zu der es $\binom{K+\dim\ \mathfrak{n}^- -1}{K}$ mögliche Tupel gibt.

Setzt man die Metrik auf $C\ell\ \mathfrak{s}$ nun zu einer HERMITEschen Metrik auf $\mathbb{C}\ell\ \mathfrak{s}$ fort, so wird $\pi_\eta \otimes \mathbb{C}\ell\ \mathfrak{s}$ zum Hilbertraum, auf dem $AD_{(2)}$ und der zweite Summand in $D^2_{(1)} = -\Delta_{(1)} \otimes 1 + \sum E_{(2)} \otimes \Delta_\mathfrak{n} E_{(2)}$ durch CLIFFORDmultiplikation mit den kommutierenden Elementen $2\pi i A Z^\eta$ und $2\pi i \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta$ operieren. Letzteres hat in der ONB $X_s^+$, $X_s^-$ von $\mathfrak{n}_{(1)}$ die Darstellung:

$$2\pi i \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta = 4\pi i \parallel \eta_{(2)} \parallel \sum_s X_s^- \wedge X_s^+$$

Somit liegt ein Unterraum von $\mathbb{C}\ell\ \mathfrak{s}$ der Form

$$(AZ^\eta \pm_z i \parallel \eta_{(2)} \parallel) \cdot (X_1^- X_1^+ \pm i) \cdot \cdots \cdot (X^-_{\dim\ \mathfrak{n}^-} X^+_{\dim\ \mathfrak{n}^-} \pm i) \cdot \mathbb{C}\ell\ \{A, X_s^-\}^\perp$$

im gemeinsamen Eigenraum von $2\pi i A Z^\eta \cdot$ und $2\pi i \Delta_\mathfrak{n} Z^\eta \cdot$ zu Eigenwerten

$$\mp_z 2\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel \quad \text{und} \quad 4\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (2N - \dim\ \mathfrak{n}^-)$$

wobei $0 \leq N \leq \dim\ \mathfrak{n}^-$ die Anzahl der $(X_s^- X_s^+ - i)$-Faktoren in obigem Ausdruck ist. Ein gemeinsamer Eigenraum ist die Summe aller dieser Räume mit gleichem $N$ und hat wegen $\mathbb{C}\ell\ \{A, X_s^-\}^\perp = \mathbb{C}\ell\ \mathfrak{n}^+$ die Dimension $2^{\dim\ \mathfrak{n}^+}\binom{\dim\ \mathfrak{n}^-}{N}$. Tensoriert man nun einen solchen gemeinsamen Eigenvektor $\mathcal{N}$ mit einem Eigenvektor $v \in \pi_\eta$ von $\Delta_{(1)}$ zum Eigenwert $-4\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (2K + \dim\ \mathfrak{n}^-)$, so ist $v \otimes \mathcal{N}$ ein gemeinsamer Eigenvektor von $AD_{(2)}$ zum Eigenwert $\mp_z 2\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel$ wie zuvor und unter $D^2_{(1)}$ zum Eigenwert:

$$8\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (K + N)$$

Der Kern des Operators $D^2_{(1)}$ in $\pi_\eta \otimes \mathbb{C}\ell\ \mathfrak{s}$ umfaßt also nur die „absoluten Vakua“, die durch $K = 0$ und $N = 0$ charakterisiert werden. Durch explizite Rechnung wird gleich evident, daß dieser interessante Unterraum der Dimension $2^{\dim \mathfrak{n}^+ + 1}$ der Kern des Operators $D_{(1)}$ ist, also der Eigenraum zum Eigenwert 0. Auf seinem orthogonalen Komplement kann man ebenfalls sofort gemeinsame Eigenvektoren von $AD_{(2)}$ und $D_{(1)}$ konstruieren:

$$\psi^\pm_{v,\mathcal{N}} = \sqrt{8\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (K + N)}(v \otimes \mathcal{N}) \pm D_{(1)}(v \otimes \mathcal{N})$$

Unter $D_{(1)}$ haben sie den Eigenwert $\pm\sqrt{8\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (K + N)}$. Als nächstes führt man nun die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_s$ und $a_s^\dagger$ zur Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{4\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel}$ in allen Koordinaten $x_s$ ein, dann gilt

$$2\sigma \frac{\partial}{\partial x_s} = a_s^\dagger - a_s \quad \text{und} \quad 2\sigma \frac{x_s}{\sigma^2} = a_s^\dagger + a_s$$

Damit läßt sich die im letzten Kapitel angegebene Form des Operators $D_{(1)}$ auf $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\ell\ s$ noch weiter umschreiben zu:

$$\begin{aligned} D_{(1)} &= \sum_s \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \otimes X_s^- \cdot + 4\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel x_s \otimes iX_s^+ \cdot \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \left( \sum_s a_s \otimes (-X_s^- + iX_s^+) \cdot + \sum_s a_s^\dagger \otimes (X_s^- + iX_s^+) \cdot \right) \end{aligned}$$

Die in dieser Darstellung von $D_{(1)}$ aufscheinenden Summen

$$\delta = \sum_s a_s \otimes \left(-X_s^- + iX_s^+\right) \cdot \quad \text{und} \quad \delta^\dagger = \sum_s a_s^\dagger \otimes \left(X_s^- + iX_s^+\right) \cdot$$

sind vielleicht noch interessanter als $D_{(1)}$. Zunächst folgt, daß der Definitionsbereich von $D_{(1)}$ das Tensorprodukt der SCHWARTZfunktionen auf $\mathfrak{n}^-$ mit $\mathcal{C}\ell\ \mathfrak{s}$ umfaßt. Auf diesem Raum sind $\delta$ und $\delta^\dagger$ adjungiert, denn die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind adjungiert, und in der HERMITEschen Metrik auf $\mathcal{C}\ell\ \mathfrak{s}$ ist $iX_s^+ \cdot$ selbstadjungiert. $\delta$ und $\delta^\dagger$ sind nilpotent, zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \sum_s a_s^2 \otimes (-X_s^- + iX_s^+)^2 \cdot + \sum_{s \neq t} a_s a_t \otimes (-X_s^- + iX_s^+)(-X_t^- + iX_t^+) \cdot \\ &= 0 + \sum_{s<t} [a_s, a_t] \otimes (-X_s^- + iX_s^+)(-X_t^- + iX_t^+) \cdot = 0 \end{aligned}$$

weil $a_s$ und $a_t$ kommutieren. Beide Operatoren definieren also eine Homologie, die man via HODGEtheorie durch den Kern von $D_{(1)}^2$, den Raum der absoluten Vakua, repräsentieren kann:

$$D_{(1)}^2 = \frac{1}{4\sigma^2} (\delta + \delta^\dagger)^2 = \pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (\delta\delta^\dagger + \delta^\dagger\delta)$$

Ein absolutes Vakuum ist nun das Tensorprodukt $v \otimes \mathcal{N}$, wobei $v$ wegen $K = 0$ das Produkt aller Vakua $(\Phi \circ x_s)$ ist und $X_s^- X_s^+ \mathcal{N} = i\mathcal{N}$ für alle $s$ gilt wegen $N = 0$. Daraus folgt $X_s^- \mathcal{N} = iX_s^+ \mathcal{N}$, so daß nicht nur $\delta^\dagger(v \otimes \mathcal{N})$ sondern auch $\delta(v \otimes \mathcal{N})$ verschwindet; die absoluten Vakua liegen also im Kern von $D_{(1)}$. Die restlichen gemeinsamen Eigenvektoren $\psi_{v,\mathcal{N}}$ kann man bis auf den Faktor $\sqrt{\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel}$ auch schreiben als:

$$\psi_{v,\mathcal{N}}^\pm = \sqrt{8(K+N)}(v \otimes \mathcal{N}) \pm (\delta + \delta^\dagger)(v \otimes \mathcal{N})$$

Das sieht nun etwas asymmetrisch aus, weil man $v \otimes \mathcal{N}$ zerlegbar gewählt hat. Um geeignetere Eigenvektoren anzugeben, führt man auf dem in $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\ell\ \mathfrak{s}$ dichten Unterraum der Linearkombinationen der $v \otimes \mathcal{N}$ mit einem Produkt $v$ von HERMITEfunktionen die Bigraduierung nach $(K, N)$ ein, das heißt im wesentlichen nach den Eigenwerten der kommutierenden Operatoren $\Delta_{(1)} \otimes 1$ und

$1 \otimes \Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta$. Beide Operatoren kommutieren auch mit $1 \otimes AZ^\eta$, so daß man sich ohne weiteres auch auf einen Eigenraum dieses Operators einschränken kann. Die Summe aller bigraduierte Unterräume mit konstanter Summe $K + N$ ist dann der Eigenraum von $D^2_{(1)}$ zum Eigenwert $8\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (K+N)$. Der Grad $K$ wird nun offensichtlich von $\delta$ und $\delta^\dagger$ um 1 erhöht bzw. erniedrigt; weil beide mit $D^2_{(1)}$ kommutieren, sind sie deshalb vom Bigrad $(1,-1)$ bzw. $(-1,1)$. Somit läßt sich jeder bigraduierte Unterraum in die orthogonale Summe seines Schnitts mit **Bild** $\delta$ und **Kern** $\delta^\dagger$ zerlegen. Das übliche Argument der HODGEtheorie zeigt für ein $\psi \in \mathbf{Kern}\ \delta^\dagger$ vom Bigrad $(K,N)$ mit $K+N>0$

$$8(K+N)\psi = (\delta\delta^\dagger + \delta^\dagger\delta)\psi = \delta^\dagger\delta\psi$$

daß $\psi$ bereits in **Bild** $\delta^\dagger$ liegt. Ebenso folgt in diesem Fall $\mathbf{Bild}\ \delta = \mathbf{Kern}\ \delta$ und daraus $\mathbf{Bild}\ \delta = \mathbf{Bild}\ \delta\delta^\dagger$. Deshalb kann man bereits aus den bihomogenen $\psi \in \mathbf{Bild}\ \delta^\dagger$ gemeinsame Eigenvektoren

$$\psi^\pm = \sqrt{8(K+N)}\psi \pm \delta\psi$$

von $AD_{(2)}$ und $D_{(1)}$ konstruieren, die das ganze orthogonale Komplement der absoluten Vakua aufspannen. Solche $\psi \in \mathbf{Bild}\ \delta^\dagger$ können nur in Graden $N>0$ existieren, und dort wird ihr Raum von den Bildern $\delta^\dagger(v \otimes \mathcal{N})$ aufgespannt, die sich als Linearkombinationen von Produkten von HERMITEfunktionen tensoriert mit speziellen $\mathcal{N} \in \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ erweisen.

Die vorangegangene Beschreibung des Operators $D_{(1)}$ auf $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ zeigt, daß man $\pi_\eta$ am besten als BOSonischen FOCKraum $\Gamma\mathfrak{n}^-$ über dem EUKLIDischen Vektorraum $\mathfrak{n}^-$ mit Metrik $2\langle\cdot,\cdot\rangle$ auffaßt, das heißt als die $\ell^2$-Vervollständigung der komplexifizierten Symmetrischen Algebra $\Gamma_0\mathfrak{n}^- = \mathbf{Sym}^{\mathbb{C}}\,\mathfrak{n}^-$ mit der Multiplikation mit $X^-, X^- \in \mathfrak{n}^-$, und der adjungierten Kontraktion mit der Linearform $2\langle X^-,\cdot\rangle$ als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren (NIELSEN[8]). Die Polynome in den Erzeugungsoperatoren zu einer ONB $X_s^-$ erzeugen den dichten Teilraum $\Gamma_0\mathfrak{n}^-$ aus dem Vakuum $\mathbf{1}$, genau wie die Erzeugungsoperatoren $a_s$ den in $L^2\mathfrak{n}^-$ dichten Teilraum der Produkte von HERMITEfunktionen aus dem Produkt der Vakua $(\Phi \circ x_s)$ erzeugen. So wird eine bis auf den Faktor $(\sqrt{2\pi\sigma})^{\dim\ \mathfrak{n}^-}$ isometrische Abbildung von $\Gamma_0\mathfrak{n}^-$ in den SCHWARTZraum auf $\mathfrak{n}^-$ gestiftet, die sich - bis auf diesen Faktor - zu einer Isometrie von $\Gamma\mathfrak{n}^-$ mit $L^2\mathfrak{n}^- \cong \pi_\eta$ fortsetzen läßt.

Der dichte Unterraum $\Gamma_0\mathfrak{n}^- \otimes \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ bzw. sein Bild in $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ wird durch die endlichdimensionalen Unterräume $\mathbf{Sym}^{\mathbb{C}}{}_{\leq M}\mathfrak{n}^- \otimes \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ filtiert. Für genügend großes $M$ liegen die Eigenräume von $D^2_{(1)}$ bereits in diesen Unterräumen, auf die die HODGEtheorie folglich bereits anwendbar ist. Deshalb können keine funktionalanalytischen Probleme auftreten.

## 5.2 Die FOURIERkoeffizienten des Symbols

Der Operator der CLIFFORDmultiplikation mit $A$ antikommutiert mit $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$ bzw. $AD_{(2)}$. Außer im zur trivialen Darstellung $\pi_0$ gehörenden Fall ist deshalb ein gemeinsamer Eigenvektor $\psi \in \pi_\eta \otimes \mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ von $D_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ zu Eigenwerten $p$ bzw. $c$ orthogonal zu $A\psi$; man kann das auch in $\pi_0 \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ erreichen, wenn man $\psi$ – wie im folgenden vorausgesetzt – geeignet wählt. Dann gilt:

$$\begin{array}{rclcrcl} D_{(1)}\psi & = & p\psi & \quad & D_{(2)}\psi & = & -cA\psi \\ D_{(1)}A\psi & = & -pA\psi & \quad & D_{(2)}A\psi & = & -c\psi \end{array}$$

Somit verbleiben $D_{(1)}$ und $D_{(2)}$ in dem von $\psi$ und $A\psi$ aufgespannten Unterraum von $\pi_\eta \otimes \Lambda\mathfrak{s}$. Für einen Eigenschnitt $\tilde{\psi}$ des Symbols

$$D_{Symbol} = D_{(0)} + yD_{(1)} + y^2 D_{(2)} \quad \text{mit} \quad D_{(0)} = A \otimes 1 - 1 \otimes R\cdot$$

kann man also einen Ansatz

$$\tilde{\psi} = y^{\|R\|}(f_1 \circ y)\psi + y^{\|R\|}(f_2 \circ y)A\psi$$

mit zwei FOURIERkoeffizienten $f_1, f_2$ aus $C^\infty\mathbb{R}$ angeben. Der Faktor $y^{\|R\|}$ ist dabei nach den Erfahrungen des dritten Kapitels angeraten, um den Korrektursummanden $-1 \otimes R\cdot$ des Symbols bzw. $D_{(0)}$ aufzuheben. Unter einer Einbettung der Darstellung $\pi_\eta$ – etwa in einen $L^2\ {}_\Gamma\backslash N$ – wird aus $\tilde{\psi}$ ein Schnitt des Vektorbündels $\Lambda\mathfrak{s}$ über $NA$. Seine $L^2$-Norm berechnet sich nach der in **4.1** angegebenen Formel:

$$\begin{aligned} \| \tilde{\psi} \|^2_{L^2\ {}_\Gamma\backslash NA\otimes\Lambda\mathfrak{s}} &= \int_A \| \tilde{\psi}(-\cdot a) \|^2_{L^2\ {}_\Gamma\backslash N\otimes\Lambda\mathfrak{s}}\ y^{-2\|R\|}\frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \left( | f_1 |^2 \| \psi \|^2_{\pi_\eta\otimes\Lambda\mathfrak{s}} + | f_2 |^2 \| A\psi \|^2_{\pi_\eta\otimes\Lambda\mathfrak{s}} \right) \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Der abstrakte Schnitt $\tilde{\psi}$ ist also quadratintegrabel auf der Spitze $NA$, das heißt eigentlich auf $NA_{y>Y}$ mit $A_{y>Y} = \{a \in A : y(a) > Y\}$, wenn beide FOURIERkoeffizienten für ein und damit auch für alle $Y > 0$ die Abschätzung erfüllen:

$$\int_Y^\infty | f |^2 \frac{dy}{y} < \infty$$

Ein Eigenschnitt $\tilde{\psi}$ des Symbols des DIRACoperators zum Eigenwert $E$ erfüllt die Gleichung:

$$\begin{aligned} D_{Symbol}\tilde{\psi} \quad = \quad E\tilde{\psi} \quad &= \quad y^{\|R\|} \begin{pmatrix} f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ A\psi \end{pmatrix} \\ &\quad + y^{\|R\|} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} py & -cy^2 \\ -cy^2 & -py \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ A\psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Kettenregel führt wegen $Ay = y$ nämlich zu $A(f \circ y) = y(f' \circ y)$.

Daraus kann man die gewöhnliche Differentialgleichung ablesen, die die FOURIER-koeffizienten erfüllen müssen:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} cy & \frac{E}{y} + p \\ -\frac{E}{y} + p & -cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Man kann diese Differentialgleichung auch mit Hilfe der Summe $s = f_1 + f_2$ und Differenz $d = f_1 - f_2$ ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} s \\ d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p & cy - \frac{E}{y} \\ cy + \frac{E}{y} & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ d \end{pmatrix}$$

Diese Differentialgleichung erhielte man bei einem Ansatz mit gemeinsamen Eigenvektoren von $AD_{(1)}$ und $D_{(2)}$. Der Betrag der Eigenwerte

$$\pm\sqrt{c^2y^2 + p^2 - \frac{E^2}{y^2}}$$

beider Matrizen ist durch $C(y+\frac{1}{y})$ für ein $C > 0$ beschränkt, so daß jede Lösung dieser Gleichungen auf ganz $\mathbb{R}_+$ definiert ist. Erfüllen beide Komponenten einer Lösung für ein $Y > 0$ die obige Abschätzung, so führt diese Lösung zu quadratintegrabelen Schnitten auf der Spitze. Solche „quadratintegrabelen" Lösungen sind deshalb besonders interessant.
Allgemein gehören nun zu jeder gewöhnlichen Differentialgleichung

$$f' = \mathcal{M}f \quad \text{für} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

mit einer spurfreien $2 \times 2$-Matrix $\mathcal{M}$ zwei entkoppelte Gleichungen 2. Ordnung für die beiden Komponenten $f_1$ und $f_2$:

$$\begin{aligned} f'' &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^2 f \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b'}{b} & 0 \\ 0 & \frac{c'}{c} \end{pmatrix} f' + \begin{pmatrix} a^2 + bc - a\frac{b'}{b} + a' & 0 \\ 0 & a^2 + bc + a\frac{c'}{c} - a' \end{pmatrix} f \end{aligned}$$

Übrigens kann man die Spurfreiheit nach Wahl einer Stammfunktion $T$ der Spur immer erreichen, indem man von $f$ zu $e^{-\frac{1}{2}T}f$ übergeht. Auf diese Weise erhält man entkoppelten Gleichungen für die beiden FOURIERkoeffizienten:

$$f''_{1,2} = -\frac{E}{y(E \pm py)} f'_{1,2} + (c^2y^2 + p^2 \pm c - \frac{E^2}{y^2} \pm \frac{cE}{E \pm py}) f_{1,2}$$

Dabei steht $\pm$ für $+$ bei $f_1$ und für $-$ bei $f_2$. Die Gleichungen für Summe und Differenz sind ähnlich und auch nicht einfacher.

Weil der allgemeine Fall noch zu schwierig erscheint, werden im folgenden nur zwei Spezialfälle dieser Gleichung gelöst, der erste beschreibt die FOURIERkoeffizienten der Eigenschnitte im Kern des Symbols mit $E = 0$, der zweite beschreibt gerade alle FOURIERkoeffizienten zu eindimensionalen Darstellungen $\pi_\eta$, die zu $AD_{(2)} = 0$ und damit $c = 0$ führen.

### 5.2.1 Die FOURIERkoeffizienten des Kerns ($E = 0$)

Die Ausgangsgleichung im Fall $E = 0$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} cy & p \\ p & -cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

hat in den Fällen $c = 0$ oder $p = 0$ die Fundamentallösungen

$$\begin{pmatrix} e^{-py} & e^{py} \\ -e^{-py} & e^{py} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} e^{c\frac{y^2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-c\frac{y^2}{2}} \end{pmatrix}$$

mit jeweils genau einer auf der Spitze quadratintegrabelen Lösung. Ansonsten lauten die entkoppelten Differentialgleichungen für $f_1$ und $f_2$:

$$f_1'' = (c^2y^2 + p^2 + c)f_1 \quad \text{und} \quad f_2'' = (c^2y^2 + p^2 - c)f_2$$

Für die Funktionen $\tilde{f}_{1,2} = y^{\frac{1}{4}} f_{1,2}(\frac{1}{\sqrt{|c|}} y^{\frac{1}{2}})$ folgen daraus die Gleichungen

$$\tilde{f}_{1,2}'' + (-\frac{1}{4} + \frac{-p^2 \mp c}{4 \mid c \mid y} - \frac{-\frac{3}{16}}{y^2})\tilde{f}_{1,2}$$

wobei $-$ für $\tilde{f}_1$ und $+$ für $\tilde{f}_2$ steht. Diese Gleichung ist ein Spezialfall der WHITTAKERgleichung (GRADSHTEYN & RYZHIK [1], Seite 1086-1090)

$$f“ + (-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{y} - \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{y^2})f = 0$$

deren Fundamentallösung die WHITTAKERfunktionen $W_{\lambda,\mu}$ und $PW_{-\lambda,\mu}$ bilden, wobei $P$ den Paritätsoperator $(Pf)(y) = f(-y)$ bezeichnet. Die möglichen Werte für $p$ und $c$ kommen von den unendlichdimensionalen Darstellungen her:

$$p = \pm\sqrt{8\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel (K + N)} \neq 0 \quad \text{und} \quad c = \pm 2\pi \parallel \eta_{(2)} \parallel$$

und führen zu $\frac{p^2}{4|c|} = K + N$. Somit ist $f_1$ eine beliebige Linearkombination der Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{y}} W_{-K-N-\frac{\mathrm{sgn}\ c}{4},\frac{1}{4}}(\mid c \mid y^2) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{y}} PW_{K+N+\frac{\mathrm{sgn}\ c}{4},\frac{1}{4}}(\mid c \mid y^2)$$

und $f_2$ eine davon abhängige Linearkombination der Funktionen:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} W_{-K-N+\frac{\mathrm{sgn}\ c}{4},\frac{1}{4}}(\mid c \mid y^2) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{y}} PW_{K+N-\frac{\mathrm{sgn}\ c}{4},\frac{1}{4}}(\mid c \mid y^2)$$

Die genaue Form von $f_2$ in Abhängigkeit von $f_1$ ist durch die ursprüngliche Differentialgleichung 1. Ordnung festgelegt

$$f_2 = \frac{1}{p}(f_1' - cyf_1)$$

ist also äquivalent zu einer Formel, die die Ableitung einer WHITTAKERfunktion als Linearkombination von WHITTAKERfunktionen darstellt. Ein solches Vorgehen führt im nächsten Abschnitt zum Ziel.
Die WHITTAKERfunktionen $W_{\lambda,\mu}$ verhalten sich nun bei $\mid y \mid \to \infty$ asymptotisch wie $e^{-\frac{y}{2}}y^{\lambda}$ ( WANG & GUO[9], Seite 310 ). Also erfüllen $f_1$ und $f_2$ genau dann

$$\int_Y^{\infty} \mid f_{1,2} \mid^2 \frac{dy}{y} < \infty$$

für ein $Y > 0$, wenn sie keinen $PW$-Summanden enthalten. Erst die die explizite Form der Abhängigkeit der Komponenten ermöglicht es deshalb, zu entscheiden, ob es eine auf der Spitze quadratintegrabele Lösung gibt oder nicht.

### 5.2.2 Die „eindimensionalen" FOURIERkoeffizienten ($c = 0$)

In den zu den eindimensionalen Darstellungen $\pi_\eta$, $\eta_{(2)} = 0$, gehörenden Fällen verschwindet der Operator $AD_{(2)}$ und es ist $c = 0$. Dann hat die Differentialgleichung für Summe und Differenz

$$\begin{pmatrix} s \\ d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p & -\frac{E}{y} \\ \frac{E}{y} & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ d \end{pmatrix}$$

im Fall $p = 0$ die schon im dritten Kapitel betrachtete Fundamentallösung

$$\begin{pmatrix} y^{iE} & y^{-iE} \\ -iy^{iE} & iy^{-iE} \end{pmatrix}$$

Für $Im\, E \neq 0$ ist genau eine der beiden Lösungen quadratintegrabel auf der Spitze, aber nicht auf dem ganzen Symmetrischen Raum. Als RIEMANNsche Mannigfaltigkeit ist die Spitze eben nicht vollständig, und der DIRACoperator darum auch nicht wesentlich selbstadjungiert. Ansonsten lauten die entkoppelten Gleichungen:

$$s'' = -\frac{1}{y}s' + (p^2 - \frac{E^2}{y^2} + \frac{p}{y})s$$

und

$$d'' = -\frac{1}{y}d' + (p^2 - \frac{E^2}{y^2} - \frac{p}{y})d$$

Für die Funktionen $\tilde{s} = \sqrt{y}s(\frac{y}{2p})$ und $\tilde{d} = \sqrt{y}d(\frac{y}{2p})$ gehen sie über in die WHITTAKERgleichungen:

$$\tilde{s}'' + (-\frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{2}}{y} - \frac{(iE)^2 - \frac{1}{4}}{y^2})\tilde{s} = 0$$

und

$$\tilde{d}'' + (-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{y} - \frac{(iE)^2 - \frac{1}{4}}{y^2})\tilde{d} = 0$$

$s$ und $d$ lassen sich also durch Modifikationen der WHITTAKERfunktionen $W_{\lambda,\mu}$ beschreiben. Die Lösung gelingt hier ganz explizit, weil man noch eine Rekursionsformel benutzen kann, um das Verhältnis von $s$ und $d$ zu klären.
Dazu konstruiert man direkt eine Fundamentallösung der ursprünglichen Differentialgleichung 1. Ordnung und betrachtet zunächst die Rekursionsformel aus GRADSHTEYN & RYZHIK[1] (9.234):

$$yW'_{\lambda,\mu} = (\lambda - \frac{y}{2})W_{\lambda,\mu} - (\mu^2 - (\lambda - \frac{1}{2})^2)W_{\lambda-1,\mu}$$

Nach Freistellen von $(\mu^2 - (\lambda - \frac{1}{2})^2)W_{\lambda-1,\mu}$ erhält man durch Differenzieren und nochmaliges Benutzen der Rekursionsformel und der WHITTAKERgleichung:

$$W'_{\lambda-1,\mu} = -\frac{1}{y}W_{\lambda,\mu} - (\frac{\lambda-1}{y} - \frac{1}{2})W_{\lambda-1,\mu}$$

Zusammengefaßt lösen damit die durch obige Herleitung motivierten Modifikationen $\tilde{W}_{\lambda,\mu,\nu} = \frac{1}{\sqrt{y}}W_{\lambda,\mu}(\nu y)$ der WHITTAKERfunktionen die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \tilde{W}_{\lambda,\mu,\nu} \\ \tilde{W}_{\lambda,\mu,\nu} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-\frac{1}{2}}{y} - \frac{\nu}{2} & -\frac{\mu^2-(\lambda-\frac{1}{2})^2}{y} \\ -\frac{1}{y} & -\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{y} + \frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{W}_{\lambda,\mu,\nu} \\ \tilde{W}_{\lambda,\mu,\nu} \end{pmatrix}$$

Setzt man $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\mu = iE$, dann ist $\mu^2 - (\lambda - \frac{1}{2})^2 = -E^2$ und zu den beiden Möglichkeiten $\nu = \pm 2p$ erhält man die Fundamentallösung

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} W_{-\frac{1}{2},iE}(2py) & -\frac{1}{E}PW_{\frac{1}{2},iE}(2py) \\ \frac{1}{E}W_{\frac{1}{2},iE}(2py) & PW_{-\frac{1}{2},iE}(2py) \end{pmatrix}$$

der Gleichung für $s$ und $d$ und damit die Fundamentallösung

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \begin{pmatrix} W_{-\frac{1}{2},iE}(2py) + \frac{1}{E}W_{\frac{1}{2},iE}(2py) & -\frac{1}{E}PW_{\frac{1}{2},iE}(2py) + PW_{-\frac{1}{2},iE}(2py) \\ W_{-\frac{1}{2},iE}(2py) - \frac{1}{E}W_{\frac{1}{2},iE}(2py) & -\frac{1}{E}PW_{\frac{1}{2},iE}(2py) - PW_{-\frac{1}{2},iE}(2py) \end{pmatrix}$$

der Ausgangsgleichung für $f_1$ und $f_2$. Je nach Vorzeichen von $p$ ist eine der beiden Lösungen quadratintegrabel auf der Spitze.

# 6 FOURIERblöcke der DIRACoperatoren

Im letzten Kapitel wurden Eigenschnitte des Symbols der DIRACoperatoren beschrieben. Die Idee des dort verfolgten Ansatzes war es, für jede irreduzibele Darstellung $\pi$ von $N$ den Raum $\pi \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ in kleine Unterräume $\mathcal{F}$, die FOURIERblöcke, zu zerlegen, die invariant unter den Operatoren $A$,$AD_{(2)}$ und $D_{(1)}$ sind. Die vollständige Zerlegung von $\pi \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ in zweidimensionale FOURIERblöcke reduzierte die Frage nach Eigenschnitten des Symbols auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in 2 Variablen.
Als FOURIERblock eines DIRACoperators wird man in Analogie einen Unterraum $\mathcal{F}$ bezeichnen, der invariant ist unter den Operatoren $A$, $AD_{(2)}$ und $D_{(1)}$ sowie $D_{lin}$. Selbst in den einfachsten Beispielen sind die FOURIERblöcke dann nicht mehr zweidimensional, der DIRACoperator auf den Spinoren des $\mathbb{RH}^{n+1}$ bildet hier wegen $D_{\$,lin} = 0$ die Ausnahme. Entscheidend für den Erfolg dieses Ansatzes ist es dann, daß es für jede irreduzibele Darstellung $\pi$ von $N$ einen dichten Unterraum in $\pi \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ gibt, der vollständig in orthogonale FOURIERblöcke zerlegbar ist.
Die Zerlegung in FOURIERblöcke $\mathcal{F}$ bestimmt eine Zerlegung von $C^\infty A \otimes \pi \otimes \Lambda\mathfrak{s}$ in Unterräume $C^\infty A \otimes \mathcal{F}$, auf jedem von diesen ist der DIRACoperator nach Konstruktion bereits definiert, so daß sich die Frage nach Eigenschnitten des DIRACoperators auf eine von $\mathcal{F}$ abhängige gewöhnliche Differentialgleichung in $M = \dim \mathcal{F}$ Variablen reduziert. Denn nach Wahl einer Basis $\psi_1, \ldots, \psi_M$ von $\mathcal{F}$ kann man für Eigenschnitte von $D = D_{(0)} + D_{lin} + yD_{(1)} + y^2 D_{(2)}$ den Ansatz

$$y^{\|R\|} f^T \psi := y^{\|R\|}\big((f_1 \circ y)\psi_1 + \cdots + (f_M \circ y)\psi_M\big) \quad \text{mit} \quad f_s \in C^\infty \mathbb{R}$$

angeben, sollen sie den Eigenwert $E$ haben, so muß gelten:

$$\begin{aligned} D(y^{\|R\|} f^T \psi) &= E y^{\|R\|} f^T \psi \\ &= y^{\|R\|}\big(y (f')^T A \cdot + f^T (D_{\$,lin} + yD_{(1)} + y^2 D_{(2)})\big)\psi \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$f' = \Big(\frac{1}{y}(\mathcal{M}_{lin} - E)\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_{(1)}\mathcal{M}_A + y\mathcal{M}_{(2)}\mathcal{M}_A\Big)^T f$$

Die $\mathcal{M}$ sind dabei $M \times M$-Matrizen, die die Operatoren $A$, $D_{(1)}$, $D_{(2)}$ und $D_{lin}$ auf dem FOURIERblock $\mathcal{F}$ beschreiben, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} A\psi_1 \\ \vdots \\ A\psi_N \end{pmatrix} = \mathcal{M}_A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

Die transponierten Matrizen $\mathcal{M}^T$ beschreiben daher die Operatoren in den zu der Basis $\psi_1, \ldots, \psi_M$ gehörenden Koordinaten. Deshalb ist die Reihenfolge der

Matrizenmultiplikation ungewöhnlich, $\mathcal{M}_{lin}\mathcal{M}_A$ etwa beschreibt den Operator $AD_{lin}$. Die Eigenwerte der die Differentialgleichung charakterisierenden Matrix sind für genügend großes $C > 0$ durch $C(y + \frac{1}{y})$ beschränkt. Somit sind alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}_+$ definiert. Außerdem ist die Matrix spurfrei, weil die Matrix $\mathcal{M}_A$ mit den anderen Matrizen antikommutiert und selber spurfrei ist.
In den zu eindimensionalen Darstellungen $\pi_\eta$, $\eta = \langle P, \cdot\rangle$, mit $P \in \mathfrak{n}_{(1)}$ gehörenden Räumen $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s} \cong \mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ ist $AD_{(2)} = 0$ und $D_{(1)}$ operiert als CLIFFORDmultiplikation mit $2\pi iP$. Der Raum $\mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ kann trivialerweise in die orthogonale Summe von FOURIERblöcken zerlegt werden, weil $A$, $P$ und $D_{lin}$ auf ihm eine selbstadjungierte Operatorenalgebra erzeugen, die den invertierbaren Operator $A$ enthält. Im Prinzip muß man diese Zerlegung nun für jeden Vektor $P$ beschreiben und dies kann erst gelingen, nachdem man das Zusammenspiel der Operatoren $D_{lin}$ und $P$ verstanden hat. Einfacher wird es, wenn die Gruppe der orthogonalen Automorphismen der LIEalgebra $\mathfrak{n}$ transitiv auf den Einheitsvektoren von $\mathfrak{n}_{(1)}$ operiert, denn diese Gruppe erhält die lediglich mit Metrik und Klammer definierten DIRACoperatoren $D_{\$,lin}$ und $D_{\Lambda,lin}$, so daß alle von $A$, $P$ und $D_{lin}$ erzeugten Algebren konjugiert unter der Operation dieser Gruppe auf $\mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ sind.
Zum Schluß seien noch zwei Beispiele angegeben, in denen alle FOURIERblöcke leicht zu beschreiben sind. Es handelt sich um die DIRACoperatoren auf den Multivektoren des $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}$ und auf den Spinoren des $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$. Im ersten Beispiel muß man nur eindimensionale Darstellungen betrachten, ein FOURIERblock ist dann ein Unterraum von $\Lambda\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$, der invariant ist unter den Operatoren $A$, $P$ und

$$D_{\Lambda,lin}\mathcal{N} = (\frac{n}{2} - k)A \wedge \mathcal{N} \quad \text{oder} \quad D_{\Lambda,lin}A \wedge \mathcal{N} = (\frac{n}{2} - k)\mathcal{N}$$

für $\mathcal{N} \in \Lambda^k\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}$. Damit ist klar, daß jedes homogene $\mathcal{N}$ mit $P \perp \mathcal{N} = 0$ einen FOURIERblock bestimmt, der von $\mathcal{N}$, $A\wedge\mathcal{N}$, $P\wedge\mathcal{N}$ und $A\wedge P\wedge\mathcal{N}$ aufgespannt wird. Um $\Lambda\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$ orthogonal in FOURIERblöckezu zerlegen, muß man also nur eine ONB von **Kern** $P \perp$ in $\Lambda\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}$ wählen, die aus homogenen Vektoren besteht. Diese definieren orthogonale, durch ihren Grad $0 \le k < n$ charakterisierte Blöcke, die ganz $\Lambda\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$ aufspannen und zu deren oben angegebener Basis die Differentialgleichung gehört:

$$f' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y}(\frac{n}{2} - k) & \frac{E}{y} & 0 & -2\pi i \parallel P \parallel^2 \\ -\frac{E}{y} & \frac{1}{y}(\frac{n}{2} - k) & -2\pi i \parallel P \parallel^2 & 0 \\ 0 & 2\pi i & -\frac{1}{y}(\frac{n}{2} - k - 1) & \frac{E}{y} \\ 2\pi i & 0 & -\frac{E}{y} & \frac{1}{y}(\frac{n}{2} - k - 1) \end{pmatrix} f$$

Auf dem $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ vergleiche man zunächst einmal den zweiten Summanden von $D^2_{(1)} = -\Delta_{(1)} \otimes 1 + Z \otimes \Delta_\mathfrak{n} Z$ mit dem linearen Operator $D_{\$,lin} = 1 \otimes \frac{1}{4}Z\Delta_\mathfrak{n} Z$. Gemeinsame Eigenvektoren unter CLIFFORDmultiplikation mit $AZ$ und $\Delta_\mathfrak{n} Z$ sind von der Form:

$$(AZ \pm_z i) \cdot (X_1Y_1 \pm i) \cdot \cdots \cdot (X_nY_n \pm i) \cdot \mathcal{C}\!\ell\, \{A, X_s\}^\perp$$

Es wird sich zeigen, daß sich das nicht wesentlich von der im letzten Kapitel angegebenen Form gemeinsamer Eigenvektoren von $AZ^\eta$ und $\Delta_{\mathfrak{n}} Z^\eta$ unterscheidet, denn $\mathfrak{n}_{(2)}$ ist eindimensional und deshalb gilt $Z^\eta = \pm \parallel \eta_{(2)} \parallel Z$ je nach Orientierung von $Z^\eta$. Sei wie zuvor $0 \leq N \leq \dim \mathfrak{n}^-$ die Anzahl der $(X_s Y_s - i)$-Faktoren in diesem Ausdruck. Der Eigenwert unter $\Delta_{\mathfrak{n}} Z\cdot$ eines Eigenvektors $\mathcal{N}$ dieser Form ist dann $2i(n-2N)$, benutzt man noch $Z(AZ \pm_z i) = \mp_z i A(AZ \pm_z i)$, so erhält man:

$$D_{\$,lin}\mathcal{N} = \frac{1}{4} Z \Delta_{\mathfrak{n}} Z \cdot \mathcal{N} = \pm_z (\frac{n}{2} - N) A\mathcal{N}$$

Die Automorphismengruppe der EUKLIDischen LIEalgebra $\mathfrak{n}$ enthält nun zumindest eine Kopie der unitären Gruppe, die auf dem Vektorraum $\mathfrak{n}_{(1)}$ operiert, der die komplexe Struktur $JX_s = Y_s$ trägt, denn sowohl Metrik als auch Klammer resultieren aus der HERMITEschen Bilinearform:

$$(A, B) = \langle A, B \rangle + i \langle Z, [A, B] \rangle$$

Weil diese Kopie der unitären Gruppe transitiv auf den Einheitsvektoren von $\mathfrak{n}_{(1)}$ operiert, kann man sich im Fall der eindimensionalen Darstellungen auf die Linearformen $\eta = \parallel \eta \parallel \langle X_1, \cdot \rangle$ bescränken. Sei nun $\mathcal{N} \in \mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ ein Eigenvektor unter $\Delta_{\mathfrak{n}} Z$ zum Eigenwert $2i(n - 2N)$ wie oben und erfülle außerdem

$$AZ\,\mathcal{N} = i\,\mathcal{N} \quad \text{und} \quad X_1 Y_1\, \mathcal{N} = i\,\mathcal{N}$$

so daß:

$$D_{\$,lin}\mathcal{N} = (\frac{n}{2} - N) A\mathcal{N}$$

Dann gilt außerdem $X_1 Y_1 (X_1 \mathcal{N}) = -X_1 (X_1 Y_1 \mathcal{N})$. $X_1 \mathcal{N}$ ist also immer noch Eigenvektor unter $\Delta_{\mathfrak{n}} Z$ aber mit verändertem Eigenwert $2i(n - 2N - 2)$. Daraus folgt, daß die Vektoren $\mathcal{N}$, $A\mathcal{N}$, $X_1\mathcal{N}$ und $AX_1\mathcal{N}$ einen FOURIERblock der Dimension 4 aufspannen, genauer gilt

$$\begin{array}{rclcrcl} D_{\$,lin}\mathcal{N} & = & (\frac{n}{2} - N) A\mathcal{N} & \qquad & D_{\$,lin} X_1\mathcal{N} & = & (\frac{n}{2} - N - 1) AX_1\mathcal{N} \\ D_{\$,lin} A\mathcal{N} & = & (\frac{n}{2} - N)\mathcal{N} & & D_{\$,lin} AX_1\mathcal{N} & = & (\frac{n}{2} - N - 1) X_1\mathcal{N} \end{array}$$

was in der oben angegebenen Basis zur Differentialgleichung führt:

$$f' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y}(\frac{n}{2} - N) & \frac{E}{y} & 0 & -2\pi i \parallel \eta \parallel \\ -\frac{E}{y} & \frac{1}{y}(\frac{n}{2} - N) & -2\pi i \parallel \eta \parallel & 0 \\ 0 & 2\pi i \parallel \eta \parallel & -\frac{1}{y}(\frac{n}{2} - N - 1) & \frac{E}{y} \\ 2\pi i \parallel \eta \parallel & 0 & -\frac{E}{y} & \frac{1}{y}(\frac{n}{2} - N - 1) \end{pmatrix} f$$

Um $\mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ orthogonal in FOURIERblöcke zu zerlegen, wähle man eine ONB von Eigenvektoren $\mathcal{N}$ unter $\Delta_{\mathfrak{n}} Z$, die $AZ \cdot \mathcal{N} = i\mathcal{N}$ und $X_1 Y_1 \cdot \mathcal{N} = i\mathcal{N}$ erfüllen. Zu diesen Basisvektoren gehören 4-dimensionale, orthogonale FOURIERblöcke, die folglich bereits $\mathcal{C}\!\ell\, \mathfrak{s}$ aufspannen.

Die Differentialgleichung eines solchen Blocks wird dann nur durch den Eigenwert $2i(n-2N)$ unter $\Delta_{\mathfrak{n}}Z$ bzw. durch $N$ charakterisiert, zu dem es nach obiger Konstruktion der Eigenvektoren von $\Delta_{\mathfrak{n}}Z$ genau $2^{n+1}\binom{n-1}{N-1}$ Blöcke gibt.
Nun betrachte man den Fall $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ mit einer unendlichdimensionalen Darstellung $\pi_\eta$, $\eta_{(2)} \neq 0$. Der von $Z$ und $Y_s$ aufgespannte Raum ist dann eine Polarisierung $\mathfrak{n}^+$, dessen orthogonales Komplement $\mathfrak{n}^-$ von den $X_s$ aufgespannt wird. Diese Basen erlauben die konsistente Identifizierung mit der im letzten Kapitel benutzten ONB $X_s^- \leftrightarrow X_s$ und $X_s^+ \leftrightarrow Y_s$ von $\mathfrak{n}_{(1)}$. Im folgenden betrachte man nur den Fall $Z^\eta =\| \eta_{(2)} \| Z$, die Alternative $Z^\eta = -\| \eta_{(2)} \| Z$ ist dazu konjugiert unter dem orthogonalen Automorphismus $Z \mapsto -Z$, $Y \mapsto -Y$ von $\mathfrak{n}$. Gemeinsame Eigenvektoren von $D^2_{(1)}$ und $AD_{(2)}$ wurden im letzten Kapitel durch Tensorierung eines Produkt von HERMITEfunktionen mit einem Vektor $\mathcal{N} \in \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ der Form

$$(AZ^\eta \pm_z i \,\| \eta_{(2)} \|) \cdot (X_1^- X_1^+ \pm i) \cdot \cdots \cdot (X_n^- X_n^+ \pm i) \cdot \mathcal{C}\!\ell\,\{A, X_s^-\}^\perp$$

gewonnen. Bis auf den Faktor $\| \eta_{(2)} \|$ entspricht dies der oben angegebenen Form gemeinsamer Eigenvektoren von $AZ$ und $\Delta_{\mathfrak{n}}Z$. Insbesondere wurde in beiden Fällen der Grad $N$ als die Anzahl der $(X_sY_s - i) = (X_s^- X_s^+ - i)$-Faktoren in diesem Ausdruck definiert. Somit gilt für einen bihomogenen Vektor $\psi$ mit $AZ \cdot \psi = \mp_z i\psi$:

$$D_{\$,lin}\psi = \pm_z(\frac{n}{2} - N)A\psi$$

Ist also $\psi$ ein absolutes Vakuum und erfüllt $AZ \cdot \psi = i\psi$, dann spannen $\psi$ und $A\psi$ einen FOURIERblock auf, zu dem in dieser Basis die Differentialgleichung

$$f' = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{n}{2}}{y} - 2\pi \,\| \eta_{(2)} \|\, y & \frac{E}{y} \\ -\frac{E}{y} & \frac{\frac{n}{2}}{y} + 2\pi \,\| \eta_{(2)} \|\, y \end{pmatrix} f$$

gehört. Nach Wahl einer ONB des Raums der absoluten Vakua mit Eigenwert $i$ unter $AZ$ erhält man so $2^{n+1}$ paarweise orthogonale FOURIERblöcke. Auf dem orthogonalen Komplement wähle man eine ONB $\psi$ bihomogener Vektoren des Eigenraums zum Eigenwert $i$ unter $AZ$ im Bild von $\delta^\dagger$. Dann spannen $\psi$, $A\psi$, $\delta\psi$ und $A\delta\psi$ einen 4-dimensionalen FOURIERblock auf, dessen Differentialgleichung

$$f' = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{n}{2}-N}{y} - Cy & \frac{E}{y} & 0 & 8\tilde{C}(K+N) \\ -\frac{E}{y} & \frac{\frac{n}{2}-N}{y} + Cy & 8\tilde{C}(K+N) & 0 \\ 0 & \tilde{C} & -\frac{\frac{n}{2}-N+1}{y} - Cy & \frac{E}{y} \\ \tilde{C} & 0 & -\frac{E}{y} & \frac{\frac{n}{2}-N+1}{y} + Cy \end{pmatrix} f$$

mit $C = 2\pi \,\| \eta_{(2)} \|$ und $\tilde{C} = \sqrt{\pi \,\| \eta_{(2)} \|}$ durch den Bigrad $(K, N)$ von $\psi$ charakterisiert wird. Dadurch wird das orthogonale Komplement der absoluten Vakua in dem dichtem Unterraum $\Gamma_0\mathfrak{n}^- \otimes \mathcal{C}\!\ell\ \mathfrak{s}$ vollständig in paarweise orthogonale Blöcke zerlegt.

Diese Beschreibung der Zerlegung des dichten Unterraums $\Gamma_0\mathfrak{n}^- \otimes \mathcal{C}\ell\, \mathfrak{s}$ von $\pi_\eta \otimes \mathcal{C}\ell\, \mathfrak{s}$ in FOURIERblöcke in Falle der Spinoren auf komplex-hyperbolischen Räumen führt zu der Vermutung, daß sich dieser dichte Unterraum auch noch für andere DIRACoperatoren – etwa für die geometrisch definierten – für jede Darstellung $\pi_\eta$ vollständig in orthogonale Blöcke zerlegen läßt.
In diesen Fällen läßt sich das Studium der FOURIERblöcke und der zugehörigen Differentialgleichungen in keinen Fall umgehen. Denn so wie man einen Eigenschnitt des DIRACoperators auf den Horosphären in seine Komponenten in den irreduzibelen Darstellungen von $N$ zerlegen kann, so kann man diese dann weiter in ihre Komponenten in den FOURIERblöcken dieser Darstellungen zerlegen. Jede Komponente in jedem Block löst dann die zu diesem Block gehörende Differentialgleichung, weil alle Blöcke invariant unter dem DIRACoperator sind und sich deshalb nicht beeinflußen können.
Selbst wenn es nicht möglich ist, diese Gleichungen für alle FOURIERblöcke explizit zu lösen, kann man mit einer vollständigen Zerlegung in FOURIERblöcke bereits Aussagen über die Multiplizitäten des Spektrums des DIRACoperators machen.

## Literatur

[1] Gradshteyn, I.S. & Ryzhik, I.M.:
*Table of Integrals, Series and Products*

[2] Fulton & Harris:
*Representation Theory*
Springer Verlag, New York 1991

[3] Howe, Roger: *Dual Pairs in Physics*
in Flato, M., Sally, P. & Zuckerman, G.:
*Applications of Group Theory in Physics & Mathematical Physics*
AMS, Providence RI, 1995

[4] Kirillov, Alexandr A.:
*Elements of the Theory of Representations*
Englische Übersetzung, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1975

[5] Klingholz, Moritz D.:
*Fourieranalysis auf arithmetischen Quotienten hyperbolischer Räume*
Dissertation an der Universität Bonn, 1992

[6] Kolář, Ivan, Michor, Peter W. & Slovák, Jan:
*Natural Operations in Differential Geometry*
Springer Verlag, Heidelberg 1993

[7] Lawson, H. Blaine & Michelsohn, Marie-Louise:
*Spin Geometry*
Princeton University Press, Princeton 1989

[8] Nielsen, Torben T.:
*Bose Algebras: The Complex & Real Wave Representations (LNM 1472)*
Springer Verlag, Heidelberg 1991

[9] Wang, Z.X. & Guo, D.R.:
*Special Functions*
World Scientific, Singapur 1989

[10] Wallach, Nolan R.:
*Symplectic Geometry and Fourier Analysis*
Math Sci Press, Brookline 1977

[11] Wawrzyńczyk, Antoni:
*Group Representations and Special Functions*
Reidel, Dordrecht 1984