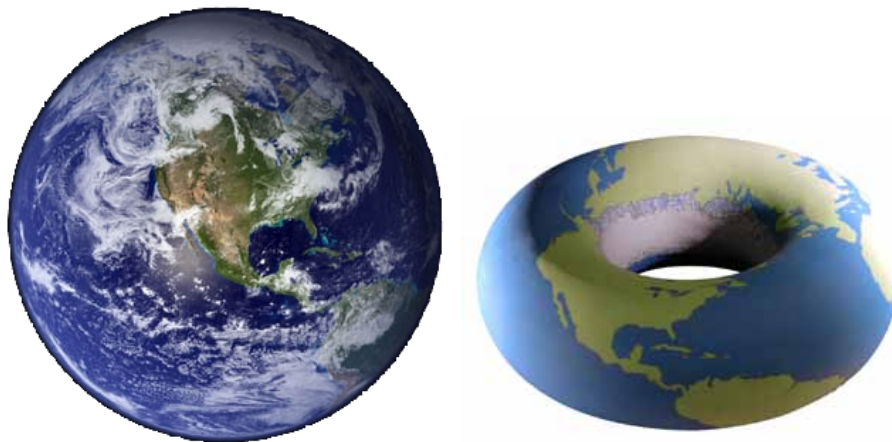


¿Por qué los toros se pueden peinar y las esferas no?

José Luis Cisneros Molina

EMALCA, Cuernavaca, México, 4 de Julio de 2007

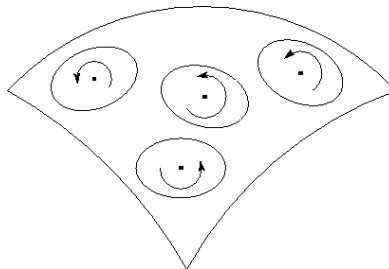


La esfera S^2 y el toro T son ejemplos de *superficies cerradas y orientadas*:

superficie cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

cerrada decimos que una superficie es cerrada si es compacta y **no** tiene frontera.

orientada una superficie es orientada si podemos encontrar alrededor de cada punto un sentido de rotación compatible en toda la superficie.



El *Teorema de clasificación de superficies* (ver por ejemplo [9]) nos dice que toda superficie cerrada orientada es homeomorfa a una superficie de la siguiente lista: la esfera, el toro, el toro con dos hoyos, etc., como se muestra en la Figura 1.

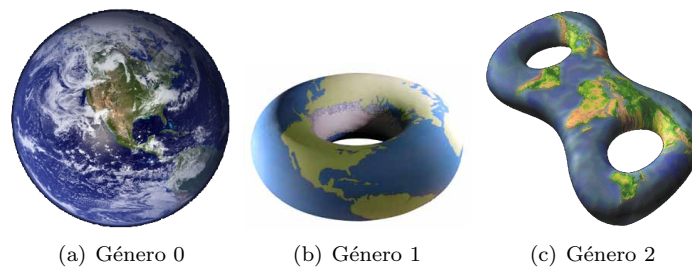


Figura 1: Superficies cerradas orientadas

Distinguimos las superficies de la lista anterior por que tienen diferente **género**, que intuitivamente corresponde al “número de hoyos”.

Este tipo de teoremas son importantes por que nos dan una lista completa de los objetos de estudio. Sin embargo, a pesar de tener un teorema de clasificación, es necesario desarrollar métodos que nos permitan distinguir dichos objetos.

Ejemplo 1. En la Figura 2 se muestra una superficie cerrada orientada.

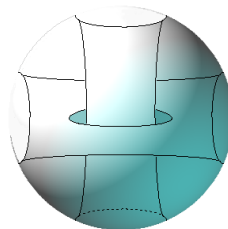


Figura 2: Un hoyo dentro de otro hoyo, que atraviesa a otro hoyo

Pregunta: ¿A cuál elemento de la lista anterior es homeomorfa?

Con nuestra definición intuitiva de género, no es fácil determinar cual es el género de la superficie anterior. Para poder identificar a cual elemento de la lista corresponde, usaremos el concepto de invariante. Un ejemplo de invariante es precisamente el género, si denotamos por $g(S)$ al género de la superficie S , entonces el género es un invariante por que tenemos que dos superficies S y S' son homeomorfas si y sólo si $g(S) = g(S')$, es decir, tienen el mismo género.

En general, un *invariante* es un objeto $I(S)$, que puede ser un número, un grupo, un anillo, etc., que se le asigna, en este caso, a cada superficie S , de tal manera que si dos superficies S y S' son homeomorfas, entonces $I(S)$ es isomorfo a $I(S')$.

Nótese que en general la implicación es en un sólo sentido, pues si $I(S) = I(S')$, no necesariamente implica que $S \cong S'$. Por lo tanto los invariantes nos ayudan a ver cuando dos superficies son distintas, pues basta ver que sus invariantes respectivos no sean isomorfos. Existen algunos invariantes para los cuales la implicación es en ambos sentidos, como por ejemplo con el género, dichos invariantes se denominan *invariantes completos* y caracterizan a los objetos de estudio, en este caso a las superficies cerradas orientadas.

A continuación definiremos un invariante, el cual es fácil de calcular y que está estrechamente relacionado con el género. En vez de definirlo sólo para superficies, lo definiremos en general para *variedades* de dimensión m , que son los análogos a las superficies, en cualquier dimensión, es decir, una variedad de dimensión m es un espacio topológico tal que todo punto tiene una vecindad que es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^m . Por lo tanto, las superficies son variedades de dimensión 2.

Sea M una variedad cerrada orientada de dimensión m . Un resultado muy importante en topología es que las variedades se pueden triangular (ver [2] para el caso de superficies). En la Figura 3 se muestran triangulaciones de la esfera y del toro:

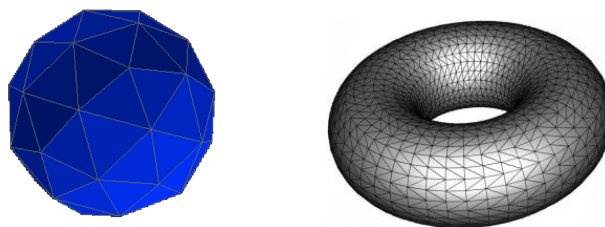


Figura 3: Triangulaciones

En el caso de una variedad arbitraria de dimensión m , las triangulaciones están formadas por *simplejos estándar* Δ_i de dimensión i , con $0 \leq i \leq m$, donde el *simplejo estándar* de dimensión i es la *envolvente convexa* de los vectores básicos de \mathbb{R}^i y el origen, $(0, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$. En la Figura 4 se muestra el simplejo estándar de dimensión 3:

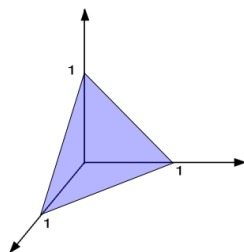


Figura 4: Simplejo estándar de dimensión 3.

Dada una triangulación de la variedad M , sea s_i el número de simplejos de dimensión i en la triangulación, definimos su *característica de Euler-Poincaré* por

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i s_i$$

A priori, la característica de Euler-Poincaré depende de la triangulación de M escogida, pero es un teorema que es independiente de ésta. Para ver experimentalmente esto, calcúlense las características de Euler-Poincaré de los sólidos platónicos, los cuales se pueden ver como distintas triangulaciones de la esfera, el clásico teorema de Euler nos dice que $\chi(S^2) = \#\{\text{vértices}\} - \#\{\text{aristas}\} + \#\{\text{caras}\} = 2$.

En general tenemos el siguiente teorema que relaciona la característica de Euler-Poincaré con el género de una superficie.

Teorema 2. *Sea S una superficie cerrada orientada. Entonces*

$$\chi(S) = 2 - 2g(S),$$

donde $g(S)$ es el género de S .

Entonces, si denotamos por T_g a la superficie de género g tenemos:

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= 2 \\ \chi(T) &= 0 \\ \chi(T_2) &= -2 \\ &\vdots \\ \chi(T_g) &= -2(g-1), \quad g \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por razones que veremos más adelante, es importante la siguiente nota.

Nota 3. La **única** superficie cerrada orientada con característica de Euler-Poincaré **cero** es el toro T .

La característica de Euler-Poincaré es un *invariante completo* para superficies cerradas orientadas, es decir, dos superficies son homeomorfas si y sólo si tienen la misma característica. Para variedades de dimensión mayor que 2, existen variedades que **no son homeomorfas** con la misma característica de Euler-Poincaré.

Por lo tanto una forma de saber a que elemento de la lista es homeomorfa la superficie del Ejemplo 1 es encontrar una triangulación y calcular su característica de Euler-Poincaré.

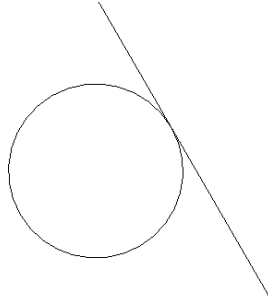
1. Campos vectoriales

A partir de ahora, pediremos a las variedades que sean *diferenciables o suaves*. Decimos que una variedad M de dimensión m es *diferenciable* si cada punto

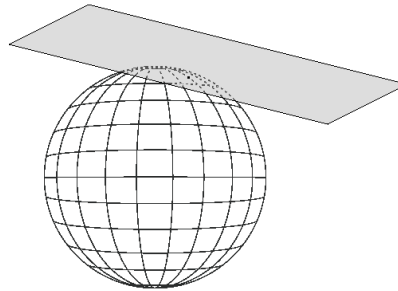
$p \in M$ tiene una vecindad U_p que es *difeomorfa* a un subconjunto abierto V de \mathbb{R}^m , esto es, que exista una función diferenciable biyectiva de U_p a V cuya inversa también sea diferenciable.

La propiedad principal de una variedad diferenciable M es que sobre cada punto $p \in M$ se tiene un espacio tangente, denotado T_pM , el cual es un espacio vectorial de dimensión m .

Ejemplo 4. Recta tangente al círculo:

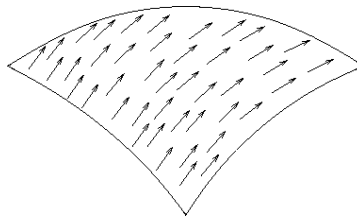


Ejemplo 5. Plano tangente a la esfera:



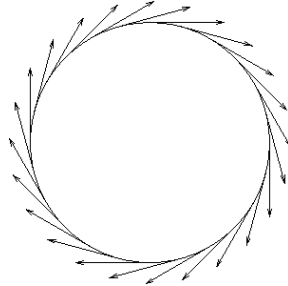
Un *campo vectorial* (diferenciable o continuo) sobre una variedad diferenciable M es una función v (diferenciable o continua) que asigna a cada punto $p \in M$ un vector $v(p)$ tangente a M en p , es decir, $v(p)$ pertenece al espacio tangente T_pM .

Ejemplo 6. Campo vectorial sobre una variedad:

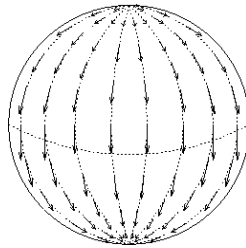


Una *singularidad* a del campo vectorial v es un punto $a \in M$ en el cual el campo vectorial es cero o no está definido.

Ejemplo 7. Sea $M = S^1$. El campo vectorial ilustrado en la figura no tiene singularidades.



Ejemplo 8. Sea $M = S^2$. El campo vectorial ilustrado en la figura tiene singularidades en los polos.



Ejemplo 9. Campo de fuerzas determinado por la Ley de Gravitación de Newton: Sea $M = \mathbb{R}^3$, definimos el campo v por

$$v(x, y, z) = -\frac{mm'G}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r},$$

donde

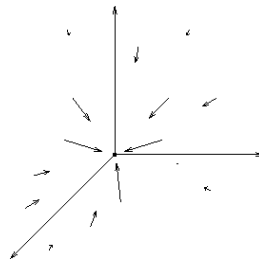
m masa del cuerpo principal.

m' masa del cuerpo de prueba.

G constante de gravitación.

\mathbf{r} vector de posición desde el origen (x, y, z) .

El campo v tiene una singularidad en el origen, pues en el punto $(0, 0, 0)$ no está definido.



Pregunta: Dada una variedad diferenciable cerrada M .

¿Es posible construir un campo vectorial v en M sin singularidades?

Ejemplo 10. Sea $M = T$. Los campos vectoriales mostrados en la Figura 5 no tienen singularidades.

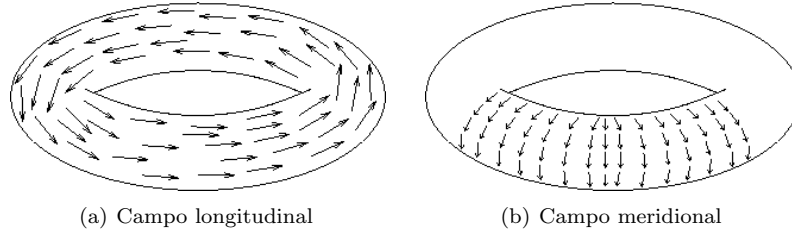


Figura 5: Campos vectoriales en el toro

Del Ejemplo 10, tenemos que en el caso del toro T , la respuesta es afirmativa. En el ejemplo 8 tenemos un campo en la esfera que tiene singularidades, pero de este ejemplo, no podemos asegurar que no exista otro campo que no las tenga.

Si pensamos a los vectores del campo como cabellos, entonces contestar la pregunta para $M = S^2$ equivale a preguntar si la esfera se puede “peinar”.

2. Homología

Para dar una respuesta general necesitamos definir otro invariante: la homología. Para más detalles sugiero consultar los siguientes libros [3, 5].

Dada una variedad M de dimensión m , le asignaremos un conjunto de grupos denotados por $H_i(X; \mathbb{Z})$ con $i \in \mathbb{N}$, llamados *grupos de homología* de M con coeficientes en \mathbb{Z} .

Los grupos de homología tienen las siguientes propiedades:

| Espacio Topológicos | Grupos |
|---|--|
| X | $H_i(X; \mathbb{Z})$ |
| $f: X \rightarrow Y$ | $f_*: H_i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(Y; \mathbb{Z})$ |
| $X \cong Y$ | $H_i(X; \mathbb{Z}) \cong H_i(Y; \mathbb{Z})$ |
| $Id_X: X \rightarrow X$ | $Id_{H_i(X; \mathbb{Z})}: H_i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$ |
| $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ | $H_i(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_i(Y; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} H_i(Z; \mathbb{Z})$ |

De la tercera propiedad podemos ver que efectivamente son invariantes.

Antes de definir los grupos de homología necesitamos algunas nociones algebraicas.

Sucesiones exactas

Sean A , B y C grupos y consideremos la siguiente sucesión de homomorfismos

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

decimos que esta sucesión es *exacta* en B si $\text{im } i = \ker j$. Si tenemos una sucesión de grupos y homomorfismos

$$A_4 \xrightarrow{h_4} A_3 \xrightarrow{h_3} A_2 \xrightarrow{h_2} A_1$$

decimos que es *exacta*, si es exacta en todas partes.

Consideremos ahora una sucesión de grupos y homomorfismos

$$A_n \xrightarrow{h_n} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{h_{n-2}} A_{n-3}$$

tal que la composición de cada dos homomorfismos consecutivos es el homomorfismo cero, es decir

$$h_{i-1} \circ h_i = 0. \quad (1)$$

A una sucesión de este tipo decimos que es un *complejo de cadenas*. Nótese que de la ecuación (1) se sigue que:

$$\text{im } h_{i+1} \subset \ker h_i.$$

Definimos los grupos de homología del complejo de cadenas por

$$H_i = \frac{\ker h_i}{\text{im } h_{i+1}}.$$

Los grupos H_i miden que tanto le falta a la sucesión para ser exacta, es decir, si $H_i = 0$ entonces la sucesión es exacta en A_i .

Complejo simplicial

Recordemos que el simplejo estándar Δ_i de dimensión i es la *envolvente convexa* de los vectores básicos de \mathbb{R}^i y el origen, $(0, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. Por lo tanto, Δ_i tiene $i + 1$ vértices.

Tomemos una triangulación de la variedad M y sea σ^i un simplejo de dimensión i en dicha triangulación. Denotaremos a σ^i por sus vértices de tal manera que el orden determine la orientación de σ_i

$$\sigma_i = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i).$$

Por ejemplo, en la Figura 6 se muestra un simplejo de dimensión 2.

Definimos los grupos de *cadena simpliciales* de dimensión i de M con coeficientes en \mathbb{Z} , denotados por $C_i(M; \mathbb{Z})$, como los grupos abelianos libres generados por los simplejos de dimensión i de M . Es decir, los elementos de $C_i(M; \mathbb{Z})$ son combinaciones lineales formales de simplejos de dimensión i

$$r_1 \sigma_1^i + \dots + r_k \sigma_k^i, \quad \text{con } r_i \in R.$$

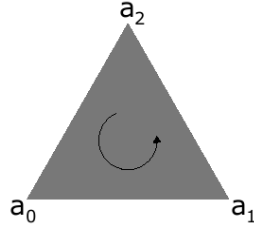


Figura 6: Simplejo de dimensión 2.

llamados *i-cadenas simpliciales* o simplemente *i-cadenas*.

Definimos también, el *operador frontera*

$$\partial_i: C_i(M; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{i-1}(M; \mathbb{Z}),$$

el cual esta dado en un simplejo $(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i)$ por

$$\partial_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = \sum_{l=0}^i (a_0, a_1, \dots, a_{l-1}, \hat{a}_l, a_{l+1}, \dots, a_i)$$

donde \hat{a}_l significa quitar dicho vértice. El operador frontera se aplica a una *i-cadena* arbitraria extendiéndolo linealmente.

En la Figura 7 se muestra el operador frontera aplicado a un simplejo de dimensión 2.

$$\partial(a_0, a_1, a_2) = (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1)$$

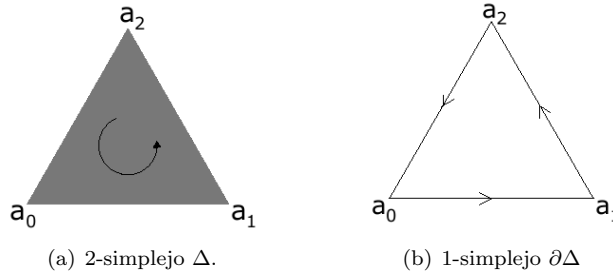


Figura 7: Operador Frontera

Es un ejercicio ver que se cumple

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0, \tag{2}$$

por lo que los grupos de cadenas simpliciales y los operadores forman un complejo de cadenas

$$\xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i-2}} \dots \tag{3}$$

llamado el *complejo simplicial*.

El significado geométrico de la igualdad (2) es que una i -cadena que es frontera de una $i + 1$ -cadena no tiene frontera, como se puede ver en la Figura 7 (b).

A los elementos del kernel del operador ∂_i se les llama *i -ciclos* y son precisamente las i -cadenas que no tienen frontera. Por otro lado, los elementos de la imagen de ∂_{i+1} se les llama *i -fronteras* y son los i -ciclos que son frontera de alguna $i + 1$ -cadena.

Los grupos de *homología* de M con coeficientes en R , son los grupos de homología del complejo simplicial (3)

$$H_i(M; \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}}.$$

Como antes, los grupos de homología miden que tanto le falta al complejo simplicial para que sea exacto. Geométricamente sus elementos son representados por i -ciclos que **no** son frontera de ninguna $i + 1$ -cadena. En otras palabras, “miden cuantos hoyos de dimensión i tiene M ”.

Para nuestros propósitos, únicamente necesitamos calcular el último grupo de homología. Sea M una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión m . Entonces tenemos que

$$H_m(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Para ver esto, recordemos que M es una variedad cerrada, es decir, es compacta y sin frontera, por lo tanto, la única manera de obtener un m -ciclo es tomar todos los m -simplejos de M , pues al quitar tan solo uno de ellos, obtendremos algo con frontera. A este m -ciclo, el cual es el generador de $H_m(M; \mathbb{Z})$ denotado por $[M]$, se llama la *clase fundamental* de M .

Cohomología

Existen otros invariantes, los cuales son “duales” a los grupos de homología. Son también un conjunto de grupos, llamados *grupos de cohomología*, los cuales no definiremos, solamente mostraremos sus propiedades principales y su relación con los grupos de cohomología. Para más información consultar [3, 5].

Dada una variedad M de dimensión m , le asignaremos un conjunto de grupos denotados por $H^i(X; \mathbb{Z})$ con $i \in \mathbb{N}$, llamados *grupos de cohomología* de M con coeficientes en \mathbb{Z} .

Los grupos de cohomología tienen las siguientes propiedades:

| Espacio Topológicos | Grupos |
|---|--|
| X | $H^i(X; \mathbb{Z})$ |
| $f: X \rightarrow Y$ | $f^*: H^i(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z})$ |
| $X \cong Y$ | $H^i(X; \mathbb{Z}) \cong H^i(Y; \mathbb{Z})$ |
| $Id_X: X \rightarrow X$ | $Id_{H^i(X; \mathbb{Z})}: H^i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z})$ |
| $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ | $H^i(Z; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g^*} H^i(Y; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^i(X; \mathbb{Z})$ |

Nótese que las propiedades anteriores son completamente análogas a las propiedades de los grupos de homología, salvo que la dirección de las flechas de los homomorfismos inducidos entre los grupos de cohomología se invierten. Esta es una de las razones por las que se dice que los grupos de cohomología son duales a los grupos de homología.

La principal relación entre los grupos de homología y cohomología es la siguiente.

Sea M una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión m . Entonces:

$$H_{m-i}(M; \mathbb{Z}) \cong H^i(M; \mathbb{Z}),$$

este isomorfismo se conoce como *Dualidad de Poincaré*.

3. Grado de una aplicación

Sea M una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión m . Usando la igualdad (4) podemos definir el *grado* de una aplicación

$$f: M \rightarrow M.$$

La aplicación anterior, por la segunda propiedad de los grupos de homología, induce un homomorfismo

$$f_*: \mathbb{Z} \cong H_m(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_m(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

$$[M] \mapsto \lambda[M]$$

el cual manda a la clase fundamental (el generador), a un múltiplo entero de dicha clase. Definimos el grado de f , como dicho múltiplo.

$$\deg f = \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Geoméricamente, el grado de la aplicación representa cuantas veces se “envuelve” M en si misma mediante la aplicación f . El signo del grado indica si se “envuelve” preservando la orientación o invirtiéndola.

4. Teorema de Poincaré-Hopf

Ahora regresemos a los campos vectoriales y sus singularidades. Usando el concepto de grado de una aplicación, asignaremos a cada singularidad a de un campo vectorial v , un número entero $I(v, a)$, llamado el *índice* de v en a .

Sea M una variedad cerrada de dimensión m . Sea v un campo vectorial que tenga solamente singularidades aisladas y sea $a \in M$ una singularidad de v .

Sea $B(a)$ una bola con centro a y de radio pequeño tal que a sea la única singularidad en $B(a)$. Por lo tanto v está bien definida y sin singularidades en la esfera $S(a) = \partial B(a)$.

Definimos la aplicación de Gauss:

$$\begin{aligned} \gamma: S(a) &\cong S^{m-1} \rightarrow S^{m-1} \\ \gamma(x) &= \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned}$$

donde a cada punto $x \in S(a)$ le asociamos el vector tangente normalizado dado por el campo v .

Definimos el *índice de v en a* como el grado de la aplicación γ :

$$I(v, a) = \deg \gamma.$$

En la Figura 8 se presentan varios ejemplos de singularidades de campos vectoriales sobre superficies con diferentes índices.

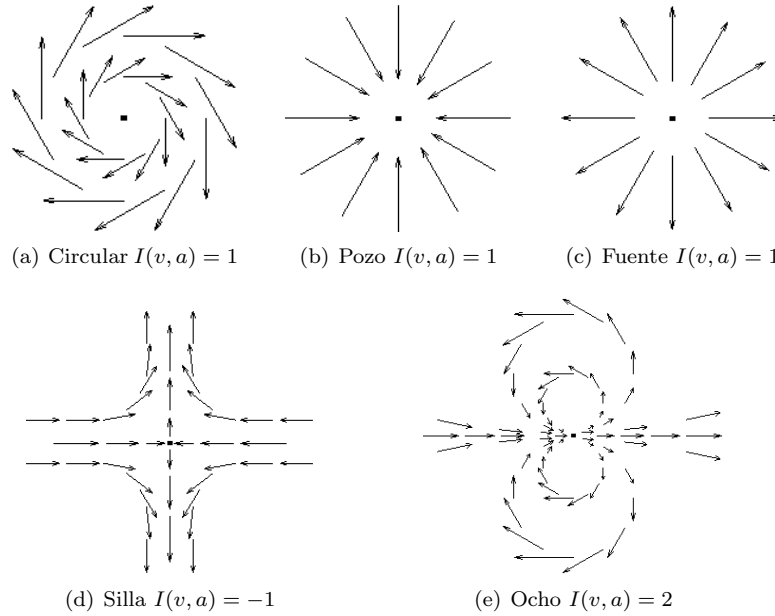


Figura 8: Singularidades de campos en superficies

El siguiente teorema, conocido como Teorema de Poincaré-Hopf, relaciona los índices de las singularidades de un campo vectorial con la característica de Euler-Poincaré de la variedad sobre la cual está definido dicho campo.

Teorema 11 (Poincaré-Hopf). *Sea M una variedad diferenciable cerrada y sea v un campo vectorial continuo en M con un número finito de singularidades aisladas a_k . Entonces*

$$\chi(M) = \sum_k I(v, a_k).$$

Esbozo de la demostración. La demostración se divide en dos partes:

- I. Se demuestra que la cantidad $I(v) = \sum_k I(v, a_k)$ es independiente del campo vectorial que se use. De hecho es igual al grado de una aplicación que no depende del campo vectorial.
- II. Se encuentra un campo vectorial v en el que sea fácil ver que $I(v) = \chi(M)$. Para el caso de superficies, en la Figura 9 se ilustra uno de tales campos definido por Hopf, el cual tiene un pozo en cada vértice (índice 1), una silla en cada arista (índice -1) y una fuente en cada cara (índice 1), por lo que

$$I(v) = \#\{\text{vértices}\} - \#\{\text{aristas}\} + \#\{\text{caras}\} = \chi(M). \quad \square$$

La demostración completa del teorema se puede encontrar en los siguientes libros [4, 7]

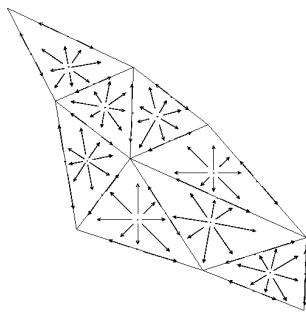


Figura 9: El campo de Hopf.

Corolario 12. *El toro T^2 es la única superficie que admite un campo vectorial sin singularidades.*

Como la característica de Euler-Poincaré de la esfera es 2, tenemos que no es posible construir un campo vectorial en S^2 sin singularidades, es decir, la esfera **no** se puede peinar.

Ejemplo 13. El campo vectorial sobre S^1 mostrado en el Ejemplo 7 no tiene singularidades. Entonces por el Teorema 11 tenemos que $\chi(S^1) = 0$, lo cual es fácil de comprobar, tomando cualquier polígono como triangulación del círculo y viendo que tiene el mismo número de vértices que de aristas.

CONCLUSIÓN

La característica de Euler-Poincaré es la **obstrucción** para construir un campo vectorial no nulo. Es decir:

Si $\chi(M) \neq 0$, entonces M no admite un campo vectorial continuo no nulo.

5. Haz Tangente

A continuación, vamos a ver el problema de construir campos vectoriales sin ceros sobre una variedad diferenciable desde un nuevo punto de vista. Esta nueva perspectiva nos permitirá generalizar el problema.

Para ello, necesitamos definir el *haz tangente* de una variedad diferenciable.

Sea M una variedad diferenciable cerrada. Sea $x \in M$ y sea $T_x M$ el espacio tangente a M en x .

El haz tangente TM de M es una variedad diferenciable dada por

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Sea $v \in TM$, entonces $v \in T_x M$ para algún $x \in M$. Definimos la proyección

$$p: TM \rightarrow M \quad p(v) = x,$$

es decir,

$$p^{-1}(x) = T_x M,$$

la imagen inversa de un punto $x \in M$ bajo p es el espacio vectorial $T_x M$.

Ejemplo 14. En la Figura 10 se muestra el haz tangente para $M = S^1$. Resulta ser un cilindro, en este caso, para construir el haz tangente, se puede pensar que cada recta tangente fué “rotada” 90° hasta quedar perpendicular al plano del círculo, de esta manera, todas las rectas tangentes forman el cilindro, el cual es una variedad diferenciable de dimensión 2. La proyección p , es la proyección sobre el círculo y de esta manera, la imagen inversa de un punto es precisamente su recta “tangente”.

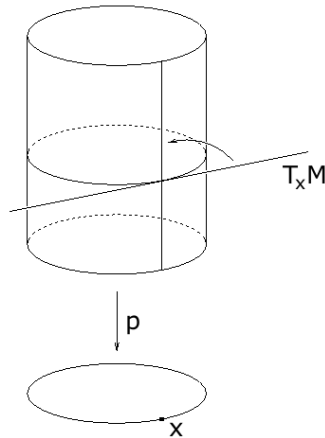


Figura 10: Haz tangente de S^1

Una *sección* es una aplicación (diferenciable o continua) $s: M \rightarrow TM$ tal que $p \circ s = Id_M$. Es decir, una sección asigna a cada punto x de M , un vector $s(x)$ en su espacio tangente $T_x M$. Por lo tanto:

Un campo vectorial es una sección del haz tangente

La *sección cero* del haz tangente es la sección que a cada $x \in M$ le asigna el vector cero en $T_x M$, es decir, corresponde al campo vectorial constante igual a cero.

Encontrar un campo vectorial no nulo en M equivale a encontrar una sección del haz tangente que no intersekte a la sección cero.

Esto se ilustra en la Figura 11, donde se muestran la sección cero, una sección con ceros y una más sin ceros.

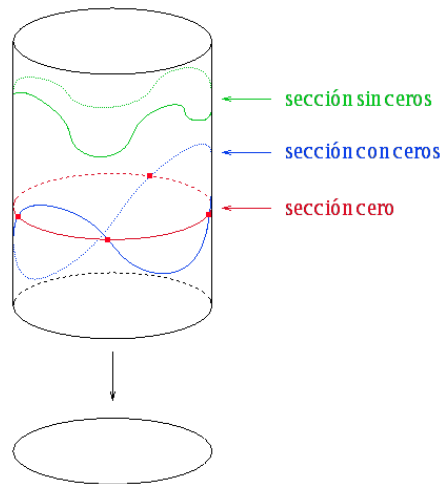


Figura 11: Secciones.

Desde este punto de vista, la característica de Euler-Poincaré es una **obstrucción** para tener secciones no nulas:

Si $\chi(M) \neq 0$, entonces el haz tangente TM de M **no admite secciones no nulas.**

6. Haces Vectoriales

El haz tangente a una variedad es un caso particular de una clase de objetos matemáticos llamados *haces vectoriales*.

Un *haz vectorial* ξ de rango n es una aplicación $p: E \rightarrow M$ diferenciable suprayectiva entre dos variedades, tales que para toda $x \in M$, la fibra sobre x dada por

$$p^{-1}(x) \subset E$$

es un espacio vectorial (real o complejo) de dimensión n . Además p satisface una condición de trivialidad local.

Una *sección* es una aplicación $s: M \rightarrow E$ tal que $p \circ s = Id_M$.

Ejemplo 15. Sea $E = M \times \mathbb{R}^n$ y $p: \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ la proyección sobre el primer factor. Este es claramente un haz vectorial y es llamado el *haz producto*.

Ejemplo 16. La banda de Möbius es también un haz vectorial. Si la consideramos a E como la banda de Möbius sin la frontera, $M = S^1$ y p la proyección sobre S^1 . La imagen inversa de cualquier punto $x \in S^1$ será un intervalo abierto, el cual es isomorfo a la recta real \mathbb{R} . Esto se ilustra en la Figura 12

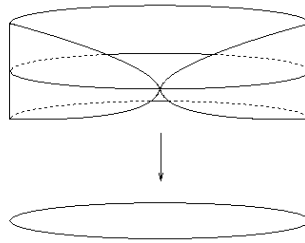


Figura 12: Banda de Möbius

Podemos generalizar nuestra pregunta a haces vectoriales en general.

Pregunta: Sea ξ un haz vectorial de rango n

¿Es posible encontrar una sección continua no nula?

Podemos generalizarla aún más de la siguiente manera:

Pregunta: Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n$.

¿Es posible construir r secciones de ξ que sean linealmente independientes en todo punto $x \in B$?

Ejemplo 17. En el haz vectorial del Ejemplo 16 dado por la banda de Möbius, no es posible construir una sección continua que no tenga ceros. Esto se ilustra en la Figura 13, recordando que la banda de Möbius se obtiene de un rectángulo al identificar dos de sus lados puestas dándoles orientaciones contrarias.

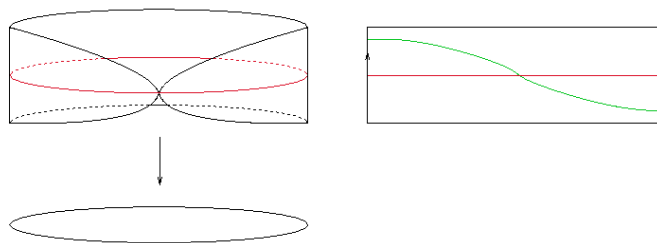


Figura 13: Sección en la banda de Möbius

De manera análoga a la característica de Euler-Poincaré, es posible definir invariantes, los cuales son *obstrucciones* para poder construir r secciones linealmente independientes en un haz vectorial ξ de rango $n \geq r$. Pero en este caso, a diferencia de la característica de Euler-Poincaré, dichas obstrucciones no son números, sino clases de cohomología. Precisemos más esto.

Sea ξ un haz vectorial de rango n . Entonces existe una clase de cohomología $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ la cual es la *obstrucción* para tener $n - i + 1$ secciones de ξ linealmente independientes en todo punto. Es decir:

Si $\mathbf{Cl}_i(\xi) \neq 0$, entonces el haz vectorial ξ de no admite $n - i + 1$ secciones linealmente independientes.

Dichos invariantes son llamados *clases características* del haz ξ .

- Si ξ es un haz **real** son llamadas *clases de Stiefel-Whitney* y generalmente son denotadas por $w_i(\xi) \in H^i(M; \mathbb{Z}_2)$.
- Si ξ es un haz **complejo** son llamadas *clases de Chern* y generalmente son denotadas por $c_i(\xi) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z})$.

Las construcciones clásicas de las clases características se pueden encontrar en las siguientes referencias [8, 6]. Dichas construcciones son de carácter algebraico. Junto con Marcelo Aguilar y Eduardo Frías, en [1] damos una construcción geométrica de las clases características de un haz vectorial basada en el concepto de transversalidad.

Agradecimientos

Agradezco a Haydée Aguilar Cabrera por la realización de la mayoría de las figuras en este documento. Agradezco también a Diego Rivermar Molina, por haber construido la caja octaedral usada en la conferencia y a Aubin Arroyo por haberme prestado su toro.

Agradeceré cualquier comentario o sugerencia para mejorar estas notas.

José Luis Cisneros Molina (jlcm@matcuer.unam.mx),

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Av. Universidad s/n, Lomas de Chamilpa,
62210 Cuernavaca, México

Figuras

Las fuentes de las figuras son las siguientes:

La figura de la tierra es tomada de

<http://www.earthdayenergyfast.org/IMAGES/earth.jpg>.

La figura del toro (de género 1) de

<http://www.navworld.com/navcerebrations/Toroidal.htm>.

La figura del toro (de género 2) de

<http://www.ehu.es/~mtwmastm/CD0506.pdf> (que a su vez da crédito a

<http://www.centre-sciences.asso.fr> pero la página no existe).

La esfera triangulada de la Figura 3 de

<http://www.cimat.berkeley.edu/Research/AES2006/speakerarray/icosaspeakers.htm>.

El toro triangulado de la Figura 3 de

<http://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/geometry/torii/torii.html>.

El simplejo estándar de la Figura 4 de

<http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Standardsimplex.svg>.

Referencias

- [1] Marcelo Aguilar, José Luis Cisneros-Molina, and Eduardo Frías Armenta. Characteristic Classes and Transversality. *Topology and its applications*, 154:1220–1235, 2007.
- [2] P. H. Doyle and D. A. Moran. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.*, 5:160–162, 1968.
- [3] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic Topology. A First Course*. Addison-Wesley, 1981.
- [4] Victor Guillemin and Allan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [6] Allen Hatcher. Vector Bundles & K-Theory. Unpublished book on-line available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>, January 2003.
- [7] J[ohn] [W.] Milnor. *Topology from the differentiable point of view*. The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

- [8] J[ohn] [W.] Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Study 76. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [9] S. William Massey. *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag, 1967.