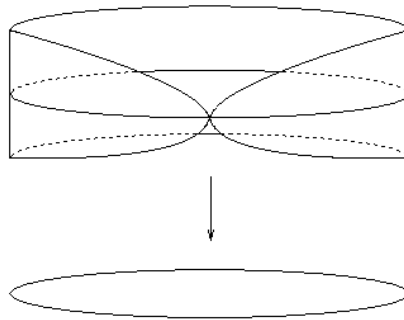


Clases características



FACULTAD DE CIENCIAS,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA
CALIFORNIA

(30 de Noviembre–5 de Diciembre 2009)

José Luis Cisneros Molina

Prefacio

Las presentes notas cubren el contenido del minicurso “Clases Características” el cual ha sido impartido en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California del 30 de noviembre al 5 de diciembre de 2009 y en la “VI Escuela de Verano” que se llevó a cabo del 27 al 31 de julio de 2009 en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Están disponibles en <http://www.matcuer.unam.mx/~j1cm/>

El objetivo del curso es explicar de manera elemental una construcción geométrica de las clases características de un haz vectorial. El curso consistió en cinco clases, las cuales corresponden a cada uno de los capítulos de las notas. En el primer capítulo se introduce la idea de “invariante topológico” usando como ejemplo el género de una superficie cerrada y orientada. Se definen las variedades diferenciables, espacio tangente, aplicaciones diferenciables entre variedades y valores regulares de una aplicación diferenciable. Usando esto último, como una aplicación se demuestra el Teorema Fundamental del Álgebra. En el segundo capítulo se demuestra que la imagen de un valor regular de una aplicación diferenciable es una variedad diferenciable. Para generalizar el resultado anterior, se introduce el concepto de transversalidad y se demuestra que la imagen inversa de una subvariedad bajo una aplicación diferenciable transversal a ella es una variedad diferenciable. Finalmente se define el grado de una aplicación diferenciable y se describen sus principales propiedades, las cuales serán útiles posteriormente. El tercer capítulo está dedicado a explicar qué es la homología y cohomología de un espacio vectorial y algunas de sus propiedades más importantes. En el cuarto capítulo se definen los campos vectoriales sobre una variedad diferenciable y el índice un campo vectorial alrededor de un cero para poder enunciar el Teorema de Poincaré-Hopf. Finalmente en el capítulo seis, motivados por el Teorema de Poincaré-Hopf se definen los haces vectoriales sobre una variedad y se explica la construcción geométrica de las clases características de un haz vectorial dada en [2].

Espero que las presentes notas sirvan como una pequeña introducción a la Topología Diferencial y Algebraica, y en particular al estudio de las clases características. Al final se da una pequeña bibliografía donde se pueden estudiar más a fondo los distintos tópicos aquí presentados. Cualquier comentario o sugerencia para mejorar estas notas será bienvenido (j1cm@matcuer.unam.mx).

José Luis Cisneros Molina

Índice general

1. Variedades Diferenciables	5
1.1. Superficies cerradas y orientadas	5
1.2. Aplicaciones Diferenciables	9
1.3. Variedades Diferenciables	11
1.4. Espacio Tangente	13
2. Transversalidad	18
2.1. Valores regulares	18
2.2. Transversalidad	19
2.3. Grado de una aplicación	21
3. Homología y cohomología	24
3.1. Complejos de cadenas	24
3.1.1. Morfismos de complejos de cadenas	25
3.2. Complejos simpliciales y poliedros	26
3.2.1. Aplicaciones simpliciales	27
3.3. Homología simplicial	27
3.4. Homología Singular	30
3.5. Grado de una aplicación	31
3.6. Cohomología	31
3.7. Homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2	32
4. Teorema de Poincaré-Hopf	33
4.1. Campos vectoriales	33
4.2. Teorema de Poncaré-Hopf	35
4.3. El Haz Tangente	37
5. Clases características	40
5.1. Haces Vectoriales	40
5.2. Morfismos de haces vectoriales	41
5.3. Subhaz, Haz inducido y suma de Whitney	42
5.4. Secciones linealmente independientes	43
5.5. Morfismos de haces genéricos	45
5.6. Clases características	47

Capítulo 1

Variedades Diferenciables

1.1. Superficies cerradas y orientadas

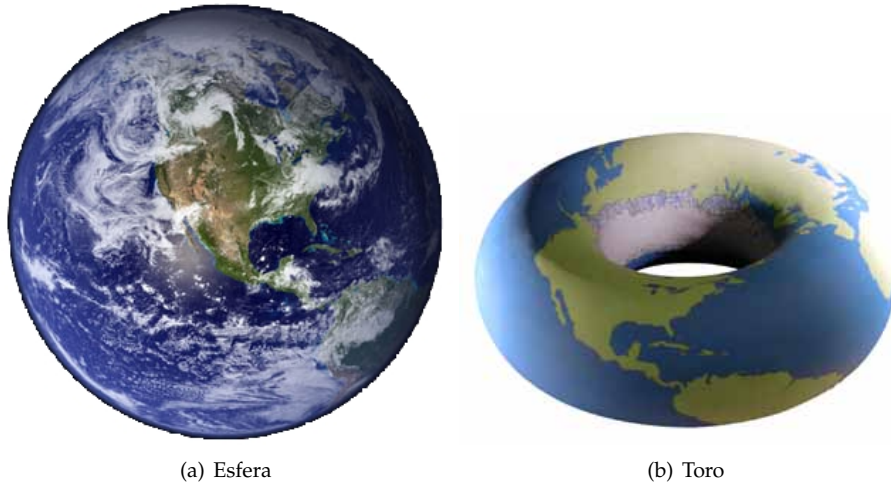


Figura 1.1: Superficies cerradas orientadas

La esfera S^2 y el toro T son ejemplos de *superficies cerradas y orientadas*:

superficie cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

cerrada decimos que una superficie es cerrada si es compacta y **no** tiene frontera.

orientada una superficie es orientada si podemos encontrar alrededor de cada punto un sentido de rotación compatible en toda la superficie.

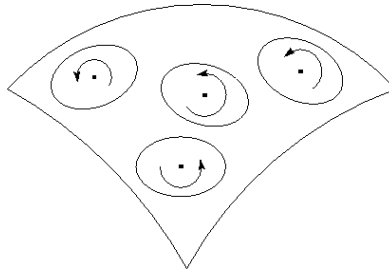


Figura 1.2: Orientación

El *Teorema de clasificación de superficies* (ver por ejemplo [12]) nos dice que toda superficie cerrada orientada es homeomorfa a una superficie de la siguiente lista: la esfera, el toro, el toro con dos hoyos, etc., como se muestra en la Figura 1.3.

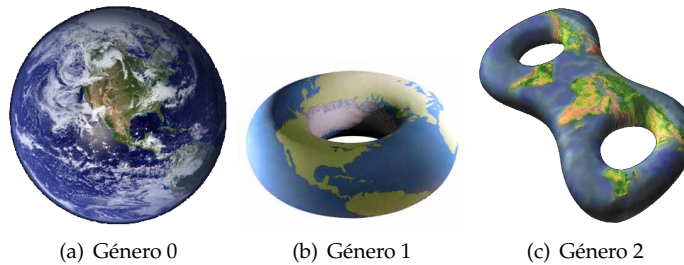


Figura 1.3: Teorema de clasificación de superficies cerradas orientadas

Distinguimos las superficies de la lista anterior por que tienen diferente **género**, que intuitivamente corresponde al “número de hoyos”.

Este tipo de teoremas son importantes por que nos dan una lista completa de los objetos de estudio. Sin embargo, a pesar de tener un teorema de clasificación, es necesario desarrollar métodos que nos permitan distinguir dichos objetos.

Ejemplo 1. En la Figura 1.4 se muestra una superficie cerrada orientada.

Pregunta: ¿A cuál elemento de la lista anterior es homeomorfa?

Con nuestra definición intuitiva de género, no es fácil determinar cual es el género de la superficie anterior. Para poder identificar a cual elemento de la lista corresponde, usaremos el concepto de invariante. Un ejemplo de invariante es precisamente el género, si denotamos por $g(S)$ al género de la superficie S , entonces el género es un invariante por que tenemos que dos superficies S y S' son homeomorfas si y sólo si $g(S) = g(S')$, es decir, tienen el mismo género.

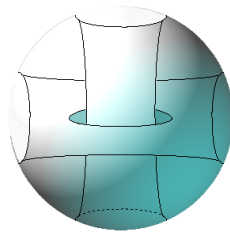


Figura 1.4: Un hoyo dentro de otro hoyo, que atraviesa a otro hoyo

En general, un *invariante* es un objeto $I(S)$, que puede ser un número, un grupo, un anillo, etc., que se le asigna, en este caso, a cada superficie S , de tal manera que si dos superficies S y S' son homeomorfas, entonces $I(S)$ es isomorfo a $I(S')$.

Nótese que en general la implicación es en un sólo sentido, pues si $I(S) = I(S')$, no necesariamente implica que $S \cong S'$. Por lo tanto los invariantes nos ayudan a ver cuando dos superficies son distintas, pues basta ver que sus invariantes respectivos no sean isomorfos. Existen algunos invariantes para los cuales la implicación es en ambos sentidos, como por ejemplo con el género, dichos invariantes se denominan *invariantes completos* y caracterizan a los objetos de estudio, en este caso a las superficies cerradas orientadas.

A continuación definiremos un invariante, el cual es fácil de calcular y que está estrechamente relacionado con el género. En vez de definirlo sólo para superficies, lo definiremos en general para *variedades* de dimensión m , que son los análogos a las superficies, en cualquier dimensión, es decir, una variedad de dimensión m es un espacio topológico tal que todo punto tiene una vecindad que es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^m . Por lo tanto, las superficies son variedades de dimensión 2.

Sea M una variedad cerrada orientada de dimensión m . Un resultado muy importante en topología es que las variedades se pueden triangular (ver [4] para el caso de superficies). En la Figura 1.5 se muestran triangulaciones de la esfera y del toro:

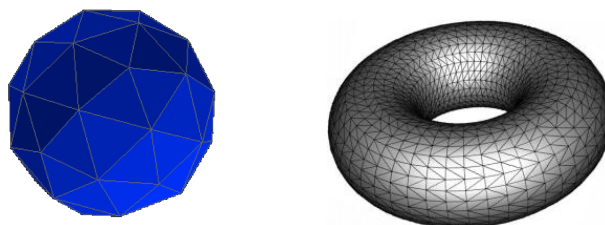


Figura 1.5: Triangulaciones

En el caso de una variedad arbitraria de dimensión m , las triangulaciones están formadas por *simplejos estándar* Δ_i de dimensión i , con $0 \leq i \leq m$, donde

el *simplejo estándar* de dimensión i es la *envolvente convexa* de los vectores básicos de \mathbb{R}^i y el origen, $(0, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1)$. En la Figura 1.6 se muestra el simplejo estándar de dimensión 3:

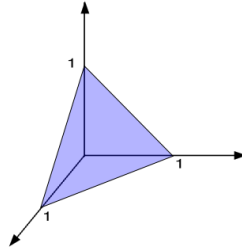


Figura 1.6: Simplejo estándar de dimensión 3.

Dada una triangulación de la variedad M , sea s_i el número de simplejos de dimensión i en la triangulación, definimos su *característica de Euler-Poincaré* por

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i s_i$$

A priori, la característica de Euler-Poincaré depende de la triangulación de M escogida, pero es un teorema que es independiente de ésta. Para ver experimentalmente esto, calcúlese las características de Euler-Poincaré de los sólidos platónicos, los cuales se pueden ver como distintas triangulaciones de la esfera, el clásico teorema de Euler nos dice que $\chi(S^2) = \#\{\text{vértices}\} - \#\{\text{aristas}\} + \#\{\text{caras}\} = 2$.

En general tenemos el siguiente teorema que relaciona la característica de Euler-Poincaré con el género de una superficie.

Teorema 2. *Sea S una superficie cerrada orientada. Entonces*

$$\chi(S) = 2 - 2g(S),$$

donde $g(S)$ es el género de S .

Entonces, si denotamos por T_g a la superficie de género g tenemos:

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= 2 \\ \chi(T) &= 0 \\ \chi(T_2) &= -2 \\ &\vdots \\ \chi(T_g) &= -2(g-1), \quad g \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por razones que veremos más adelante, es importante la siguiente nota.

Nota 3. La **única** superficie cerrada orientada con característica de Euler-Poincaré **cero** es el toro T .

La característica de Euler-Poincaré es un *invariante completo* para superficies cerradas orientadas, es decir, dos superficies son homeomorfas si y sólo si tienen la misma característica. Para variedades de dimensión mayor que 2, existen variedades que **no son homeomorfas** con la misma característica de Euler-Poincaré.

Por lo tanto una forma de saber a que elemento de la lista es homeomorfa la superficie del Ejemplo 1 es encontrar una triangulación y calcular su característica de Euler-Poincaré.

1.2. Aplicaciones Diferenciables

Como es costumbre, denotaremos por \mathbb{R}^k al espacio Euclideo de dimensión k . Sean $U \subset \mathbb{R}^k$ y $V \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos abiertos, por cálculo de varias variables sabemos que una aplicación $F: U \rightarrow V$ es *diferenciable* si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^n F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ existen y son continuas.

Como un ejemplo, recordemos que una *curva diferenciable* en \mathbb{R}^k es una función α de un intervalo abierto I de \mathbb{R} en \mathbb{R}^k tal que las funciones coordenadas son derivables en I . Para $t_0 \in I$, llamaremos a $\alpha'(t_0)$, la derivada de α evaluada en t_0 , el *vector velocidad* de α en $\alpha(t_0)$.

Dada una aplicación diferenciable $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V \subset \mathbb{R}^l$, con U y V abiertos, la *diferencial* de F en $p \in U$, denotada por dF_p , es una transformación lineal de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^l , la cual podemos definir como sigue. Para $w \in \mathbb{R}^k$, sea $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Luego $\beta = F \circ \alpha$ es una curva diferenciable en \mathbb{R}^l . Entonces definimos

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

Recordemos que la diferencial satisface las siguientes propiedades:

1. **Regla de la cadena** Si $F: U \rightarrow V$ y $G: V \rightarrow W$ son aplicaciones diferenciables con $F(p) = q$, entonces

$$d(G \circ F)_p = dG_q \circ dF_p.$$

2. Si I es la aplicación identidad de U , entonces dI_p es la aplicación identidad de \mathbb{R}^k . De manera mas general, si $U \subset U'$ son conjuntos abiertos e $i: U \rightarrow U'$ es la inclusión, entonces di_p es nuevamente la aplicación identidad en \mathbb{R}^l .
3. Si $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ es una aplicación lineal, entonces $dL_p = L$.

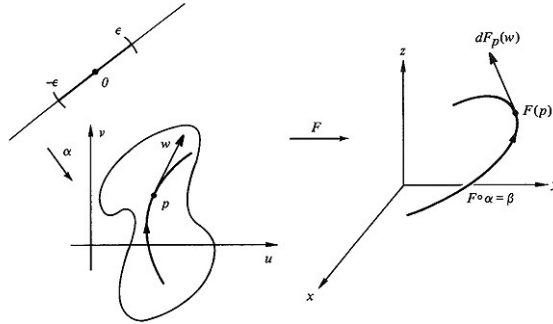


Figura 1.7: Diferencial

De manera más general, sean X y Y subconjuntos arbitrarios de \mathbb{R}^k y \mathbb{R}^l respectivamente. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es diferenciable si para cada $x \in X$ existe un subconjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^k$ que contiene a x y una función diferenciable F de W en \mathbb{R}^l tal que

$$f = F|_{X \cap W}.$$

Definición. Una función

$$f: X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^l$$

es un *difeomorfismo* si f es una biyección entre X y Y tal que f y f^{-1} son diferenciables.

Una aplicación de las propiedades de la diferencial es la siguiente proposición.

Proposición 4. Si f es un difeomorfismo entre conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^k$ y $V \subset \mathbb{R}^l$, entonces $k = l$ y la aplicación lineal

$$df_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$$

es no singular, para todo $x \in U$.

Demostración. La composición $f^{-1} \circ f$ es la aplicación identidad en U , por lo tanto $d(f^{-1})_y \circ df_x$ es la aplicación identidad en \mathbb{R}^k . Análogamente, $df_x \circ d(f^{-1})_y$ es la aplicación identidad en \mathbb{R}^l . Por lo tanto, df_x tiene un inverso por los dos lados y se sigue que $k = l$. \square

Existe un recíproco parcial a la Proposición 4.

Teorema 5 (de la Función Inversa). Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ una aplicación diferenciable con U abierto en \mathbb{R}^k . Si la diferencial $df_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ es no singular, entonces f manda cualquier vecindad abierta U' de $x \in U$ suficientemente pequeña, difeomorfamente sobre un conjunto abierto $f(U')$.

La demostración se puede encontrar en [3, Cap. 12].

1.3. Variedades Diferenciables

Definición. Un subconjunto M de \mathbb{R}^k es una *variedad diferenciable* de dimensión m , con $m < k$, si a M lo podemos dotar de una familia $\{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ tal que satisface las siguientes condiciones:

- i) Para todo $i \in I$, U_i es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m y X_i son difeomorfismos entre U_i y $U'_i = X_i(U_i) \subset M$.
- ii) $\bigcup_{i \in I} U'_i = M$.

Para $p \in U'_i$, la pareja (U_i, X_i) es llamada una *parametrización* de M en p y U'_i es llamada *vecindad coordinada* en p . La pareja (U'_i, X_i^{-1}) es llamada *carta* de M en p . Una familia $\{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ que satisface (i) y (ii) es llamada un *atlas* de M .

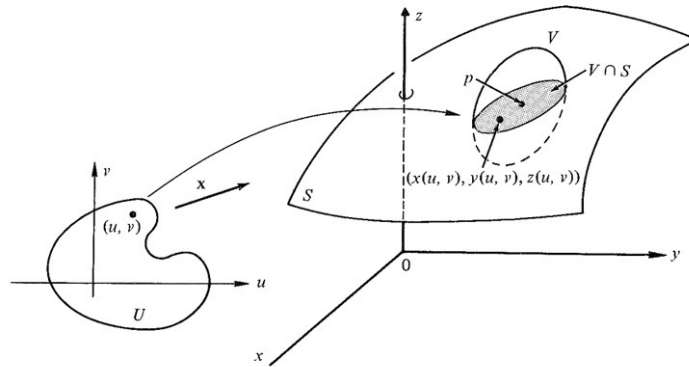


Figura 1.8: Una parametrización de M

Ejemplo 6. La esfera de dos dimensiones

$$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

Sea $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ y la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$. Tomemos la familia $\{(U_i, F_i)\}_{i=1}^6$ tal que para $i = 1, \dots, 6$, $U_i = U$ y $F_i : U_i \rightarrow S^2$ donde

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= (f(x_1, x_2), x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) &= (-f(x_1, x_2), x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) &= (x_1, f(x_1, x_2), x_2) \\ F_4(x_1, x_2) &= (x_1, -f(x_1, x_2), x_2) \\ F_5(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \\ F_6(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, -f(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

con inversas $F_i^{-1} = \pi_i|_{F_i(U_i)}$ donde $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para $i = 1, \dots, 6$

$$\pi_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_2, x_3) & \text{si } i = 1, 2. \\ (x_1, x_3) & \text{si } i = 3, 4. \\ (x_1, x_2) & \text{si } i = 5, 6. \end{cases}$$

claramente F_i y F_i^{-1} son diferenciables para $i = 1, \dots, 6$ y así la familia $\{(U_i, F_i)\}_{i=1}^6$ satisface las condiciones de nuestra definición de variedad diferenciable, por lo tanto S^2 es una variedad diferenciable.

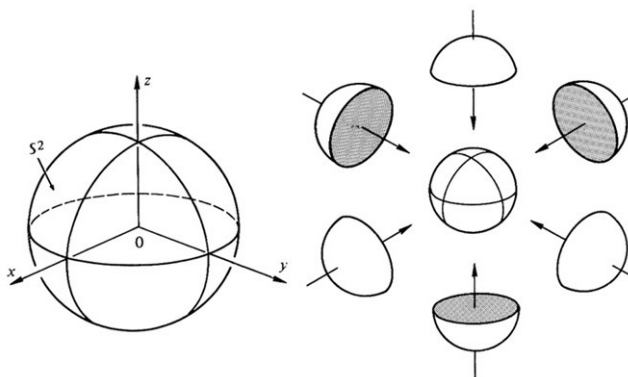


Figura 1.9: Parametrizaciones de S^2

El ejemplo anterior nos muestra que verificar, directamente de la definición, si un subconjunto dado de \mathbb{R}^3 es una variedad diferenciable, puede resultar bastante laborioso. En el Capítulo 2 veremos dos teoremas que nos permitirán construir variedades diferenciables.

Definición. Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n + k$; un subconjunto $N \subset M$ es llamado una **subvariedad diferenciable de M de dimensión n** si, para todo punto $p \in M$ existe una carta (U, h) alrededor de p

$$h: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

tal que

$$h(N \cap U) = U' \cap \mathbb{R}^n,$$

donde consideramos \mathbb{R}^n como $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

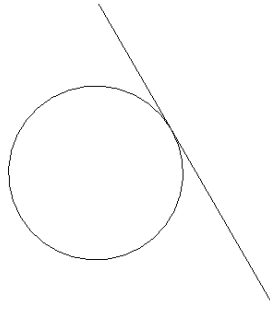
El número $k = \dim M - \dim N$ es llamado la **codimensión** de la subvariedad N .

1.4. Espacio Tangente

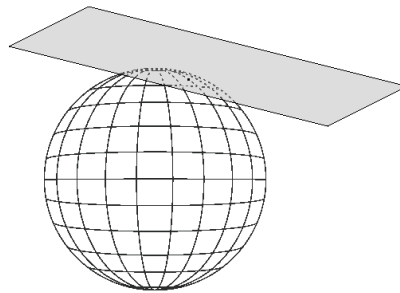
La propiedad principal de una variedad diferenciable M es que sobre cada punto $p \in M$ se tiene un espacio tangente, denotado $T_p M$, el cual es un espacio vectorial de dimensión m .

Definición. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m en \mathbb{R}^k y p un punto de M . Un vector v de \mathbb{R}^k es *tangente* a M en p , si v se puede expresar como el vector velocidad en p de alguna curva diferenciable en M que pase por p . El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p es llamado *espacio tangente* a M en p y se denota por $T_p M$.

Ejemplo 7. Recta tangente al círculo:



Ejemplo 8. Plano tangente a la esfera:



Definición. Una *orientación* para un espacio vectorial de dimensión finita es una clase de equivalencia de bases ordenadas. La relación de equivalencia está dada de la siguiente manera: la base ordenada (b_1, \dots, b_n) determina la *misma orientación* que la base (b'_1, \dots, b'_n) si la matriz que cambia la primera base en la segunda tiene determinante positivo. Por otro lado, determina la *orientación opuesta* si dicho determinante es negativo. (El determinante no puede ser cero por que al ser un cambio de base, la matriz es no singular). Por lo tanto, todo espacio vectorial tiene precisamente dos orientaciones. El espacio vectorial \mathbb{R}^n tiene una orientación canónica dada por la base canónica $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$. En el caso del espacio vectorial de dimensión cero, es conveniente definir una "orientación" como el símbolo $+1$ o -1 .

Una variedad diferenciable *orientada* consiste de una variedad diferenciable M junto con una elección de orientación para cada espacio tangente TM_p . Si $m \geq 1$, requeriremos que dichas orientaciones sean compatibles de la siguiente manera.

Para cada punto de M existe una vecindad $U \subset M$ y un difeomorfismo h que manda a U sobre un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m el cual *preserva la orientación* en el sentido de que para cada $p \in U$ el isomorfismo dh_p manda la orientación asignada a T_pM a la orientación canónica de \mathbb{R}^m .

Si M es conexa y orientable, entonces tiene precisamente dos orientaciones.

Ahora, sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ una función diferenciable. Sabemos que para todo $p \in M$ existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ tal que $p \in U$ y una función diferenciable F de U en \mathbb{R}^l tal que $F|_{M \cap U} = f$. Definimos para cada $p \in M$ la diferencial de f en p por:

$$\begin{aligned} df_p : T_pM &\rightarrow \mathbb{R}^l \\ df_p &= dF_p|_{T_pM}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que df_p está bien definida, para ello sea G otra función diferenciable de un abierto V de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^l tal que $p \in V$ y $G|_{M \cap V} = f$. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M tal que $\alpha(t_0) = p$. Entonces, $\beta(t) = f(\alpha(t)) = F(\alpha(t)) = G(\alpha(t))$ de manera que en t_0 tenemos

$$\begin{aligned} dF_p(\alpha'(t_0)) &= \beta'(t_0) \\ &= dG_p(\alpha'(t_0)) \end{aligned}$$

lo cual nos muestra que $dF_p|_{T_pM} = dG_p|_{T_pM}$ y así df_p está bien definida.

Proposición 9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m en \mathbb{R}^k y p un punto de M . El espacio tangente a M en p es un espacio vectorial de dimensión m .

Demostración. Dado un punto p en M y $u \in T_pM$, existe una curva $\alpha : I \rightarrow M$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = u$. Sea (U, X) una parametrización de M en p tal que $X(x_0) = p$. Como X^{-1} es diferenciable tenemos que $\beta = X^{-1} \circ \alpha$

es una curva diferenciable en U con $\beta(t_0) = x_0$ y $\beta'(t_0) = dX_p^{-1}(u) \in \mathbb{R}^m$. Inversamente, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe una curva diferenciable γ en U tal que pasa por x_0 y el vector velocidad de γ en x_0 es precisamente v y puesto que $X \circ \gamma$ es una curva diferenciable en M , $dX_{x_0}(v) \in T_p M$. Por lo tanto

$$T_p M = dX_{x_0}(\mathbb{R}^m)$$

y así $T_p M$ es un espacio vectorial. Ahora, para las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} dX_{x_0} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow T_p M \\ dX_p^{-1} : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

tenemos que $dX_{x_0} \circ dX_p^{-1}$ es la identidad en \mathbb{R}^m , de donde dX_{x_0} es sobreyectiva y dX_p^{-1} es inyectiva, por lo tanto, la dimensión de $T_p M$ es igual a la dimensión de \mathbb{R}^m , la cual es como sabemos m . \square

Consideremos dos variedades, $M \subset \mathbb{R}^k$ y $N \subset \mathbb{R}^l$, y una transformación diferenciable $f : M \rightarrow N$. Sea p en M y α una curva en M tal que $\alpha(t_0) = p$, entonces $f \circ \alpha$ es una curva en N tal que $(f \circ \alpha)(t_0) = f(p)$ y de aquí tenemos que los vectores tangentes a M en p serán mandados por df_p a vectores tangentes a N en $f(p)$ por lo tanto la diferencial nos da una aplicación bien definida entre los espacios tangentes

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N.$$

Como antes, la diferencial tiene las siguientes propiedades fundamentales:

1. **Regla de la Cadena:** Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son diferenciables con $f(p) = q$, entonces

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p.$$

2. Si I es la aplicación identidad de M , entonces dI_p es la aplicación identidad de $T_p M$. De forma mas general, si $M \subset N$ con la aplicación inclusión $i : M \rightarrow N$, entonces $di_p : T_p M \rightarrow T_p N$ es la aplicación inclusión.

La demostración de estas propiedades se sigue de la definición de la diferencial de una aplicación diferenciable entre variedades y las propiedades análogas para aplicaciones diferenciales de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^l . Como antes, estas propiedades implican la siguiente proposición.

Proposición 10. Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $df_p : T_p M \rightarrow T_p N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, la dimensión de M es igual a la dimensión de N .

Definición. Dada una función $f : M \rightarrow N$, con M, N variedades diferenciables, diremos que f es un *difeomorfismo local en p* cuando, dada la función f , existe una vecindad U alrededor del punto $p \in M$ tal que $f|_U$ es un difeomorfismo y $f(U) = V$ con V una vecindad alrededor del punto $f(p) \in N$.

Componiendo con parametrizaciones, el Teorema 5 se puede generalizar para aplicaciones diferenciales entre variedades diferenciales (ver [1, Teo. 3.5.1]).

Teorema 11 (de la Función Inversa para variedades). *Sean M, N variedades diferenciables, sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable entre ellas y sea $p \in M$, si la diferencial de f , $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo, entonces f es un difeomorfismo local en p .*

Definición. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades de la misma dimensión. Decimos que $p \in M$ es un *punto regular* de f si la derivada df_p es no singular. En este caso, se sigue del Teorema de la Función Inversa que f manda una vecindad de p en M difeomorfamente sobre un conjunto abierto en N . Un punto $q \in N$ es llamado un *valor regular* si $f^{-1}(q)$ contiene únicamente puntos regulares.

Si df_p es singular, entonces p es llamado un *punto crítico* de f y la imagen de $f(p)$ es llamada un *valor crítico*. Por lo tanto, $q \in N$ es un valor crítico o un valor regular, dependiendo de si $f^{-1}(q)$ contiene o no algún punto crítico.

Nota 12. Si M es una variedad compacta y $q \in N$ es un valor regular, entonces $f^{-1}(q)$ es un **conjunto finito** (posiblemente vacío): El conjunto $f^{-1}(q)$ es un subconjunto compacto de M ya que es un subconjunto cerrado del espacio compacto M . Por otro lado, $f^{-1}(q)$ es discreto, ya que por el Teorema de la Función Inversa, f es uno a uno en una vecindad de cada $p \in f^{-1}(q)$. Finalmente los subconjuntos discretos de un conjunto compacto son finitos, si no lo fuera, tendría un punto de acumulación, pero esto contradice el hecho de ser discreto.

Para una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$, con M compacto y un valor regular $q \in N$, definimos $\#f^{-1}(q)$ como el número de puntos en $f^{-1}(q)$.

Proposición 13. *Como función de q , $\#f^{-1}(q)$ es localmente constante cuando q varía únicamente sobre los valores regulares, es decir, existe una vecindad $V \subset N$ de q , tal que $\#f^{-1}(q') = \#f^{-1}(q)$ para toda $q' \in V$.*

Demostración. Sean x_1, \dots, x_k los puntos de $f^{-1}(q)$ y sean U_1, \dots, U_k vecindades de x_1, \dots, x_k respectivamente, disjuntas dos a dos, las cuales son mandadas difeomorfamente sobre vecindades V_1, \dots, V_k en N . Entonces tomemos

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_k - f(M - U_1 - \dots - U_k).$$

□

Como una aplicación de estas nociones demostraremos el Teorema Fundamental del Álgebra.

Teorema Fundamental del Álgebra. *Todo polinomio complejo no constante $P(z)$ tiene al menos un cero.*

Demostración. Para la demostración necesitamos pasar del plano complejo a alguna variedad compacta. Consideremos la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y la proyección estereográfica

$$h_+: S^2 - \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$$

del “polo norte” $(0,0,1)$ de S^2 . Identificaremos al plano $\mathbb{R}^2 \times 0$ con el plano complejo. El polinomio P de $\mathbb{R}^2 \times 0$ a si mismo corresponde a una aplicación f de S^2 a si mismo dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= h_+^{-1} \circ P \circ h_+ \quad \text{para } x \neq (0,0,1) \\ f(0,0,1) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Se puede demostrar que esta aplicación es diferenciable incluso en una vecindad del polo norte.

Ahora observemos que f tiene únicamente un número finito de puntos críticos, ya que P falla ser un difeomorfismo local solamente en los ceros de la derivada de P , $P'(z) = \sum a_{n-j} j z^{j-1}$ y tiene solamente un número finito de ceros ya que P' no es el polinomio cero (de serlo P sería constante). Entonces el conjunto de valores regulares de f es la esfera menos un número finito de puntos y por lo tanto es conexo. Por lo tanto, la función localmente constante $\#f^{-1}(y)$ debe ser constante sobre este conjunto. Como $\#f^{-1}(y)$ no puede ser cero en todas partes, concluimos no es cero en ninguna parte. Por lo tanto f es una aplicación suprayectiva y por lo tanto el polinomio P debe tener un cero. \square

Capítulo 2

Transversalidad

2.1. Valores regulares

Definición. Consideremos una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$, de una variedad de dimensión m a una variedad de dimensión n . Sea C el conjunto de todos los $p \in M$ tales que

$$df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$$

tiene rango menor que n , es decir, no es sobre. Entonces diremos que C es el conjunto de *puntos críticos* y a su complemento $M - C$ lo llamaremos el conjunto de *puntos regulares* de f . Llamaremos a $f(C)$ el conjunto de *valores críticos* y a su complemento $N - f(C)$ el conjunto de *valores regulares* de f . Esto concuerda con nuestra definición anterior para el caso $m = n$.

Teorema 14 (de la preimagen). *Si $f: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente con $m \geq n$ y si $q \in N$ es un valor regular, entonces el conjunto $f^{-1}(q) \subset M$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - n$.*

Demostración. Sea $p \in f^{-1}(q)$. Como q es un valor regular, la diferencial de f en p $df_p: T_pM \rightarrow T_qN$ es sobre. Por lo tanto, el kernel $K \subset T_pM$ de df_p es un subespacio vectorial de dimensión $(m - n)$.

Si $M \subset \mathbb{R}^k$, escojamos una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ que es no singular en el subespacio $K \subset TM_p \subset \mathbb{R}^k$. Definimos

$$F: M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$$
$$F(x) = (f(x), L(x)).$$

La diferencial dF_p está claramente dada por

$$dF_p(v) = (df_p(v), L(v)).$$

Por lo tanto dF_p es no singular. Entonces, por el Teorema de la Función Inversa F manda alguna vecindad U de p difeomorfamente sobre una vecindad V de $(q, L(p))$.

Nótese que la imagen de $f^{-1}(q)$ bajo F es el hiperplano $q \times \mathbb{R}^{m-n}$. De hecho F manda a $f^{-1}(q) \cap U$ difeomorfamente sobre $(q \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$. Esto prueba que $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - n$. \square

Ejemplo 15. Como un ejemplo podemos demostrar fácilmente que la esfera unitaria S^{m-1} es una variedad diferenciable. Considera la función $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2.$$

Toda $y \neq 0$ es un valor regular y la variedad diferenciable $f^{-1}(1)$ es precisamente la esfera unitaria.

Si M' es una variedad que está contenida en M , ya vimos que $T_p M'$ es un subespacio de $T_p M$ para $p \in M'$. El complemento ortogonal de $T_p M'$ en $T_p M$ es un subespacio vectorial de dimensión $m - m'$ llamado el *espacio de vectores normales a M' en p* .

En particular, sea $M' = f^{-1}(q)$, para algún valor regular q de $f: M \rightarrow N$.

Lema 16. El kernel de $df_p: T_p M \rightarrow T_q N$ es precisamente igual al espacio tangente $T_p M' \subset T_p M$ de la subvariedad $M' = f^{-1}(q)$. Por lo tanto df_p manda el complemento ortogonal de $T_p M'$ isomórficamente sobre $T_q N$.

Demostración. Del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

vemos que df_p manda el subespacio $T_p M' \subset T_p M$ al cero. Contando las dimensiones se ve que df_p manda el espacio de vectores normales a M' isomórficamente sobre $T_q N$. \square

2.2. Transversalidad

Definición. Sean M y N variedades diferenciables y sea $L \subset N$ una subvariedad diferenciable de dimensión k . Diremos que una función diferenciable $f: M \rightarrow N$ es **transversal** a L si la condición de transversalidad

$$Df_p(T_p M) + T_{f(p)} L = T_{f(p)} N, \quad \text{si } f(p) \in L, \quad (2.1)$$

es satisfecha para todo $p \in M$.

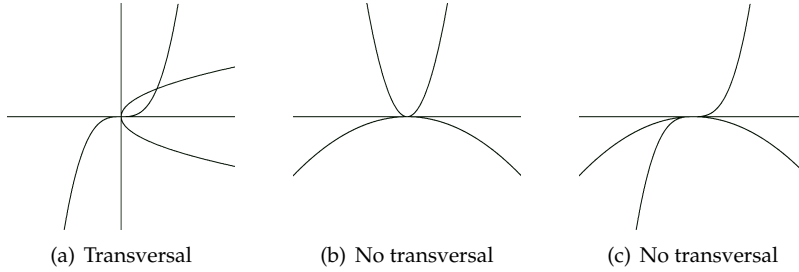


Figura 2.1: Transversalidad

El caso en que M también es subvariedad de N y la aplicación f es la inclusión se ilustra en la Figura 2.1.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 14 y para verlo necesitamos de la definición anterior.

Teorema 17. Si $f: M \rightarrow N$ es transversal a la subvariedad $L \subset N$ de codimensión k y $f^{-1}(L) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(L)$ es una subvariedad de M de codimensión k .

Demostración. Sea $f(p) = q \in L$ y sea V una vecindad de q tal que existe una carta (V, ϕ) tal que ϕ es un difeomorfismo entre V y una vecindad V' de $\phi(q)$ con $V' \subset \mathbb{R}^n$.

Entonces, como L es una subvariedad de codimensión k , se tiene que $\phi(L \cap V) = \mathbb{R}^{n-k} \cap V'$ donde $\mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ está dado haciendo cero las últimas k coordenadas.

Por otro lado, sea $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección en esas últimas coordenadas; entonces, $\Pi(\phi(L \cap V)) = 0$. Es decir, sea U vecindad de p ; entonces:

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\phi} V' \xrightarrow{\Pi} \mathbb{R}^k \quad (2.2)$$

$$p \longmapsto q \longmapsto 0 \longmapsto 0$$

Ahora, queremos ver que el cero es un valor regular de la composición $\Pi \circ \phi \circ f$ (ya que, con el Teorema 14, tendremos que la preimagen es una subvariedad); esto es, que la diferencial es suprayectiva para todos aquellos puntos que van a dar al cero. Como M y L son transversales, tenemos que

$$Df_p(T_pM) + T_qL \cong T_qN; \quad (2.3)$$

entonces, tomando las diferenciales correspondientes a (2.2), obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_p M & \xrightarrow{Df_p} & T_q V & \xrightarrow{D\phi_q} & T_0 V' & \xrightarrow{D\Pi_0} & T_0 \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \\
 & & \downarrow \cong & & & & \\
 & & Df_p(T_p M) + T_q L & \xrightarrow{\quad} & D\phi_q(Df_p(T_p M)) + \mathbb{R}^{n-k} & &
 \end{array}$$

Hay que aclarar que $T_q V \cong Df_p(T_p M) + T_q L$ porque un abierto en una variedad siempre es una subvariedad de la misma dimensión que la variedad; entonces $T_q V \cong T_q N$ y tenemos la igualdad (2.3).

Ahora, la diferencial de una transformación lineal es ella misma y la proyección Π es una transformación lineal; entonces, bajo $D\Pi_0$, $D\phi_q(Df_p(T_p M)) \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ va a dar a $D\phi_q(Df_p(T_p M))$. Además, en $D\phi_q(Df_p(T_p M))$ el único vector cuya imagen bajo $D\Pi_0$ es el vector cero es el vector cero, por lo que $D\Pi_0$ es inyectiva restringida a $D\phi_q(Df_p(T_p M))$ y como la dimensión de $D\phi_q(Df_p(T_p M))$ es k y la dimensión de $T_0 \mathbb{R}^k$ es también k , se tiene que $D\Pi_0$ es suprayectiva; de donde, el cero es un valor regular. Aplicamos entonces el Teorema 14 y obtenemos que $f^{-1}(L) = (\Pi \circ \phi \circ f)^{-1}(0)$ es una subvariedad de M de dimensión igual a $\dim M - \dim \mathbb{R}^k = m - k$; es decir, tiene codimensión k . \square

El Teorema 17 generaliza al Teorema 14 en el sentido de que dada una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$, el que $q \in N$ sea un valor regular, es equivalente a decir que la aplicación f es transversal a la subvariedad de N de dimensión cero dada por el punto q .

2.3. Grado de una aplicación

Definición. Dos aplicaciones diferenciables

$$f, g: M \rightarrow N$$

se dice que son *diferenciablemente homotópicas* si existe una aplicación diferenciable $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ con

$$F(p, 0) = f(p), \quad F(p, 1) = g(p)$$

para toda $p \in M$. Esta aplicación es llamada una *homotopía diferenciable* entre f y g . La relación de homotopía diferenciable es una relación de equivalencia y la abreviaremos por $f \sim g$.

Sean M y N variedades diferenciables orientadas de dimensión n y sea

$$f: M \rightarrow N$$

una aplicación diferenciable. Si M es compacta y N conexa, entonces podemos asociar a f un número entero, llamado el *grado* de f , el cual es un invariante

salvo homotopía, es decir, si dos aplicaciones son homotópicas, entonces tienen el mismo grado. El *grado* de f se define como sigue:

Sea $p \in M$ un punto regular de f , por lo que $df_p: TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados. Definimos el *signo* de df_p como $+1$ o -1 dependiendo de si df_p preserva o invierte la orientación. Para cada valor regular $q \in N$ definimos

$$\deg(f; q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sign } df_p.$$

Como en la Proposición 13 tenemos que el entero $\deg(f; y)$ es una función localmente constante de q , la cual está definida sobre un subconjunto denso de N .

Teorema 18. *El entero $\deg(f; q)$ no depende de la elección del valor regular q .*

Dicho número será llamado el *grado* de f y lo denotaremos por $\deg f$. Geométricamente, el grado de la aplicación representa cuantas veces se “envuelve” M en N mediante la aplicación f . El signo del grado indica si se “envuelve” preservando la orientación o invirtiéndola.

Las principales propiedades del grado son las siguientes:

- $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$.
- Sea $Id_M: M \rightarrow M$ la identidad, entonces $\deg Id_M = 1$.
- Si f es un difeomorfismo, entonces $\deg f = \pm 1$ dependiendo de si f preserva o invierte la orientación. Por lo tanto, un difeomorfismo que invierte la orientación de una variedad compacta sin frontera no es diferenciablemente homotópica a la identidad.
- Si c es la aplicación constante, $\deg c = 0$.
- Si f es diferenciablemente homotópica a g , entonces $\deg f = \deg g$.

La última propiedad es muy útil para demostrar que dos aplicaciones diferenciables no pueden ser homotópicas, sólo basta ver que sus grados son diferentes.

Ejemplo 19. Veamos algunos ejemplos de aplicaciones y sus grados:

1. La función compleja $z \mapsto z^k, z \neq 0$, manda al círculo unitario en si mismo con grado k , donde k puede ser positivo, negativo o cero. Por lo tanto, cualquier número entero puede ser el grado de una aplicación.
2. Un ejemplo de un difeomorfismo que invierte la orientación está dado por la reflexión $r_i: S^n \rightarrow S^n$, donde

$$r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}).$$

3. La aplicación antípoda $A: S^n \rightarrow S^n$:

$$A(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

tiene grado $(-1)^{n+1}$, esto se puede ver notando que la aplicación antípoda es la composición de $n + 1$ reflexiones:

$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1}(x).$$

Por lo tanto, si n es par, la aplicación antípoda no es diferenciablemente homotópica a la identidad.

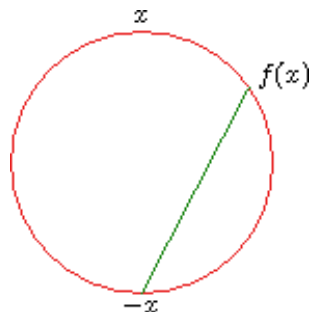
Como una aplicación de los ejemplos anteriores veamos la siguiente proposición, la cual nos será útil más adelante.

Proposición 20. Sea $f: S^n \rightarrow S^n$ sin puntos fijos. Entonces

$$\deg f = (-1)^{n+1}.$$

Demostración. Como f no tiene puntos fijos

$$(1 - t)f(x) - tx \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$



Entonces

$$F(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) - tx}{\|(1 - t)f(x) - tx\|}$$

es una homotopía entre f y la antípoda A .

□

Capítulo 3

Homología y cohomología

En el presente capítulo definiremos los grupos de homología, los cuales son invariantes de espacios topológicos, es decir, si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces tienen grupos de homología isomorfos. Para más detalles sugiero consultar los siguientes libros [5, 7].

Dado un espacio topológico X , le asignaremos un conjunto de grupos denotados por $H_i(X; \mathbb{Z})$ con $i \in \mathbb{N}$, llamados *grupos de homología* de X con coeficientes en \mathbb{Z} .

Los grupos de homología tienen las siguientes propiedades:

Espacio Topológicos	Grupos
X	$H_i(X; \mathbb{Z})$
$f: X \rightarrow Y$	$f_*: H_i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(Y; \mathbb{Z})$
$X \cong Y$	$H_i(X; \mathbb{Z}) \cong H_i(Y; \mathbb{Z})$
$Id_X: X \rightarrow X$	$Id_{H_i(X; \mathbb{Z})}: H_i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$	$H_i(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_i(Y; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} H_i(Z; \mathbb{Z})$

De la tercera propiedad podemos ver que efectivamente son invariantes.

Antes de definir los grupos de homología necesitamos algunas nociones algebraicas.

3.1. Complejos de cadenas

Sean A , B y C grupos abelianos y consideremos la siguiente sucesión de homomorfismos

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

decimos que esta sucesión es *exacta* en B si $\text{im } i = \ker j$. Si tenemos una sucesión de grupos y homomorfismos

$$A_4 \xrightarrow{h_4} A_3 \xrightarrow{h_3} A_2 \xrightarrow{h_2} A_1$$

decimos que es *exacta*, si es exacta en todas partes.

Consideremos ahora una sucesión A de grupos abelianos y homomorfismos

$$A_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} A_n \xrightarrow{h_n} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_{n-2}$$

tal que la composición de cada dos homomorfismos consecutivos es el homomorfismo cero, es decir

$$h_{i-1} \circ h_i = 0. \quad (3.1)$$

A una sucesión de este tipo le llamamos *complejo de cadenas*. Nótese que de la ecuación (3.1) se sigue que para toda i :

$$\text{im } h_{i+1} \subset \ker h_i.$$

Definimos los grupos de homología del complejo de cadenas A por

$$H_n(A) = \frac{\ker h_n}{\text{im } h_{n+1}}.$$

Los grupos H_i miden que tanto le falta a la sucesión para ser exacta, es decir, si $H_i = 0$ entonces la sucesión es exacta en A_i .

3.1.1. Morfismos de complejos de cadenas

Sean A y B dos complejos de cadenas. Una familia de homomorfismos $\phi = \{\phi_n: A_n \rightarrow B_n \mid -\infty < n < \infty\}$ es llamada un *morfismo de cadenas* si $\phi_n \circ h_{n+1} = h'_{n+1} \circ \phi_{n+1}$ para toda n . Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{h_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \phi_{n+1} & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{h'_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{h'_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Es un ejercicio verificar que si $\phi: A \rightarrow B$ es un morfismo de cadenas entonces $\phi_n(\ker h_n) \subset \ker h'_n$ y $\phi_n(\text{im } h_{n+1}) \subset \text{im } h'_{n+1}$. Por lo tanto tenemos el siguiente

Teorema 21. *Sea $\phi: A \rightarrow B$ un morfismo de cadenas. Entonces para todo entero n mandando a cada elemento $x \in \ker h_n$ a $\phi_n(x) \in B_n$ induce un homomorfismo bien definido $\phi_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$.*

3.2. Complejos simpliciales y poliedros

Definiremos los grupos de homología para una clase especial de espacios topológicos llamados *poliedros*, que son los espacios topológicos que “se pueden triangular”. Como vimos en la Sección 1.1, las variedades cerradas son poliedros pues toda variedad cerrada se puede triangular.

Recordemos que el simplejo estándar Δ_i de dimensión i es la *envolvente convexa* de los vectores básicos de \mathbb{R}^i y el origen (Figura 1.6). Por lo tanto, Δ_i tiene $i + 1$ vértices. Generalicemos un poco el concepto de simplejos, los cuales serán los bloques con los que construiremos a los poliedros.

Definición. Un sistema de $i + 1$ puntos en \mathbb{R}^N es llamado *independiente* si dichos puntos **no** están contenidos en el mismo subespacio de dimensión $i - 1$ o menor.

La envolvente convexa de $i + 1$ puntos independientes v_0, \dots, v_i en \mathbb{R}^N es llamado un *simplejo* de dimensión i . Los puntos v_0, \dots, v_i son llamados los *vértices* del simplejo. Una *cara* de un simplejo es la envolvente convexa de algún subconjunto del conjunto de sus vértices.

Una colección finita de simplejos K en \mathbb{R}^N es llamada un *complejo simplicial* si cualesquiera dos de sus simplejos no tienen puntos comunes o se intersectan a lo largo de una cara común. La dimensión de K es la dimensión máxima de sus simplejos. Una *orientación* de un complejo simplicial es un conjunto de orientaciones de cada uno de sus simplejos incluyendo sus caras.

Desde el punto de vista formal, es necesario distinguir al complejo simplicial (colección de simplejos) de su **espacio subyacente** (la unión de dichos simplejos), pues diferentes complejos simpliciales pueden tener el mismo espacio subyacente. Al espacio topológico formado por la unión de todos los simplejos del complejo simplicial K lo denotaremos por $|K|$ y lo llamaremos la *realización geométrica de K* .

Un espacio topológico X es un *poliedro* si existe un homeomorfismo $h: |K| \rightarrow X$ para algún complejo simplicial K . El complejo simplicial K junto con el homeomorfismo h es llamado una *triangulación* de X (ver Fig 3.1).

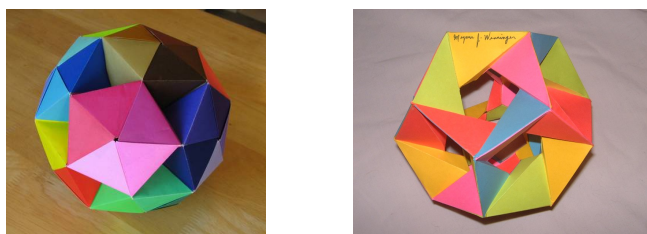


Figura 3.1: Poliedros

3.2.1. Aplicaciones simpliciales

Definición. Una aplicación $f: K \rightarrow L$ entre complejos simpliciales (más precisamente, una aplicación $f: |K| \rightarrow |L|$) es llamada *simplicial* si la imagen de cada simplejo de K es un simplejo de L y la restricción de f a cualquier simplejo de K es una aplicación lineal.

El siguiente teorema nos dice que toda aplicación continua entre poliedros se puede “ver” como una aplicación simplicial.

Teorema 22 (de aproximación simplicial). *Para toda aplicación continua $f: |K| \rightarrow |L|$ entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales existe una aplicación simplicial $g: K \rightarrow L$ tal que f es homotópica a g .*

Nótese que en el Teorema 22 las homotopías son sólo continuas en vez de diferenciables como en la Sección 2.3.

3.3. Homología simplicial

Sea K un complejo simplicial y sea σ^i un simplejo de dimensión i en K . Denotaremos a σ^i por sus vértices de tal manera que el orden determine la orientación de σ^i

$$\sigma^i = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i).$$

Por ejemplo, en la Figura 3.2 se muestra un simplejo de dimensión 2.

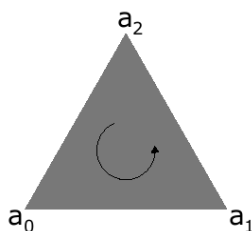


Figura 3.2: Simplejo de dimensión 2.

Definimos los grupos de *cadena simpliciales* de dimensión i de K con coeficientes en \mathbb{Z} , denotados por $C_i(K; \mathbb{Z})$, como los grupos abelianos libres generados por los simplejos de dimensión i de M . Es decir, los elementos de $C_i(K; \mathbb{Z})$ son combinaciones lineales formales de simplejos de dimensión i

$$r_1\sigma_1^i + \dots + r_k\sigma_k^i, \quad \text{con } r_i \in \mathbb{Z}.$$

llamados *i-cadenas simpliciales* o simplemente *i-cadenas*.

Definimos también, el *operador frontera*

$$\partial_i: C_i(K; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{i-1}(K; \mathbb{Z}),$$

el cual esta dado en un simplejo $(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i)$ por

$$\partial_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = \sum_{l=0}^i (a_0, a_1, \dots, a_{l-1}, \hat{a}_l, a_{l+1}, \dots, a_i)$$

donde \hat{a}_l significa quitar dicho vértice. El operador frontera se aplica a una i -cadena arbitraria extendiéndolo linealmente.

En la Figura 3.3 se muestra el operador frontera aplicado a un simplejo de dimensión 2.

$$\partial(a_0, a_1, a_2) = (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1)$$

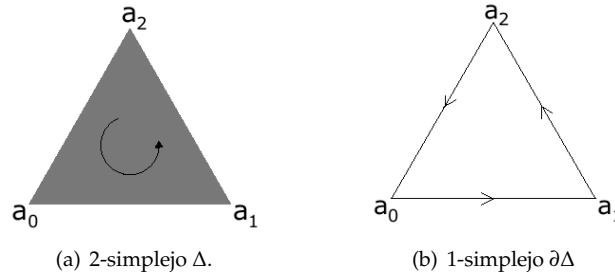


Figura 3.3: Operador Frontera

Es un ejercicio ver que se cumple

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0, \quad (3.2)$$

por lo que los grupos de cadenas simpliciales y los operadores frontera forman un complejo de cadenas

$$\xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1}(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2}(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{i-2}} \quad (3.3)$$

llamado el *complejo de cadenas simplicial de K*.

El significado geométrico de la igualdad (3.2) es que una i -cadena que es frontera de una $i + 1$ -cadena no tiene frontera, como se puede ver en la Figura 3.3 (b).

A los elementos del kernel del operador ∂_i se les llama i -ciclos y son precisamente las i -cadenas que no tienen frontera. Por otro lado, los elementos de la imagen de ∂_{i+1} se les llama i -fronteras y son los i -ciclos que son frontera de alguna $i + 1$ -cadena.

Los grupos de *homología* de K con coeficientes en \mathbb{Z} , son los grupos de homología del complejo de cadenas simplicial de K (3.3)

$$H_i(K; \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}}$$

Como antes, los grupos de homología miden que tanto le falta al complejo simplicial para que sea exacto. Geométricamente sus elementos son representados por i -ciclos que **no** son frontera de ninguna $i + 1$ -cadena. En otras palabras, “miden cuantos hoyos de dimensión i ” tiene $|K|$. Dos i -ciclos representan la misma clase de homología si **ambos** son frontera de una $i + 1$ -cadena (Fig 3.4).

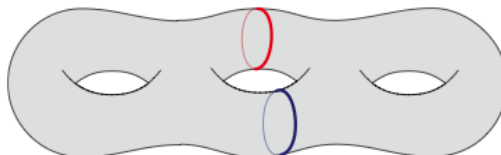


Figura 3.4: Ciclos homólogos

Toda aplicación simplicial $f: K \rightarrow L$ entre complejos simpliciales orientados induce un morfismo de cadenas $f_{\#}: C_{\bullet}(K; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{\bullet}(L; \mathbb{Z})$ entre los correspondientes complejos de cadenas simpliciales, el cual está definido por las imágenes de los generadores (los simplejos) mediante la fórmula:

$$f_{\#}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim \sigma > \dim f(\sigma); \\ f(\sigma) & \text{si } \dim \sigma = \dim f(\sigma) \text{ y } f|_{\sigma} \text{ preserva la orientación;} \\ -f(\sigma) & \text{si } \dim \sigma = \dim f(\sigma) \text{ y } f|_{\sigma} \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

Entonces por el Teorema 21 f a su vez induce un homomorfismo en los correspondientes grupos de homología

$$f_*: H_n(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(L; \mathbb{Z}).$$

Definición. Sea X un poliedro y sea $h: |K| \rightarrow X$ una triangulación de X . Definimos los grupos de *homología* de X con coeficientes en \mathbb{Z} por

$$H_i(X; \mathbb{Z}) = H_i(K; \mathbb{Z}).$$

Se puede demostrar que dichos grupos no dependen de la triangulación de X , por lo tanto están bien definidos.

Dada una aplicación continua $f: |K| \rightarrow |L|$ entre poliedros, definimos el homomorfismo inducido en homología $f_*: H_n(|K|; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(|L|; \mathbb{Z})$ como el homomorfismo inducido en homología por una aproximación simplicial $g: K \rightarrow L$ de f .

Para nuestros propósitos, únicamente necesitamos calcular el último grupo de homología. Sea M una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión m . Entonces tenemos que

$$H_m(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Para ver esto, recordemos que M es una variedad cerrada, es decir, es compacta y sin frontera, por lo tanto, una manera de obtener un m -ciclo es tomar todos

los m -simplejos de M una sólo vez, pues al quitar tan solo uno de ellos, obtendremos algo con frontera. A este m -ciclo, el cual es el generador de $H_m(M; \mathbb{Z})$ denotado por $[M]$, se llama la *clase fundamental* de M .

3.4. Homología Singular

Hay otra manera de definir la homología de un espacio topológico sin necesidad de dar una triangulación, la cual se conoce como *homología singular*.

Dado un espacio topológico X , un n -simplejo singular es una aplicación continua

$$\sigma: \Delta_i \rightarrow X,$$

del simplejo estandar de dimensión i a X . Se llama simplejo singular por que la imagen en X ya no necesariamente es una copia del simplejo estandar, puede incluso degenerar en un punto.

Como en la homología simplicial, definimos a los grupos de i -cadenas singulares $C_i(X; \mathbb{Z})$ como los grupos abelianos libres generados por todos los i -simplejos singulares de X . Tambien definimos el *operador frontera* con la misma fórmula que en el caso simplicial

$$\begin{aligned} \partial_i: C_i(X; \mathbb{Z}) &\rightarrow C_{i-1}(X; \mathbb{Z}) \\ \partial_i(\sigma) &= \sum_l (-1)^l \sigma|(a_0, \dots, \hat{a}_l, \dots, a_i), \end{aligned}$$

donde $\sigma|(a_0, \dots, \hat{a}_l, \dots, a_i)$ es la restricción de la aplicación continua σ a la l -ésima cara de Δ_i dada por $(a_0, \dots, \hat{a}_l, \dots, a_i)$. Nuevamente tenemos que $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ por lo que tenemos el *complejo de cadenas singular* y los grupos de homología de dicho complejo de cadenas son los grupos de *homología singular*, los cuales coinciden con los grupos de homología simplicial.

Como los grupos $H_i(X; \mathbb{Z})$ son grupos abelianos **finitamente generados**, por el Teorema Fundamental de Grupos Abelianos Finitamente Generados, ([11, Thm. 10.20]), tenemos que son la suma directa de grupos cíclicos infinitos (copias de \mathbb{Z}) y de grupos cíclicos de orden primo (copias de \mathbb{Z}_p) y el número de sumandos sólo depende del grupo. El número de copias de \mathbb{Z} es el *rango*, lo denotamos por $b_i = \text{rang } H_i(X; \mathbb{Z})$ y es llamado el i -ésimo *número de Betti* de X . Entonces tenemos que

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i.$$

Por lo tanto, otra ventaja de usar la homología singular es que podemos calcular la característica de Euler-Poincaré sin tener que triangular a X .

3.5. Grado de una aplicación

Sean M y N variedades cerradas, conexas y orientadas de dimensión m . Usando la igualdad (3.4) podemos definir el *grado* de una aplicación **continua**

$$f: M \rightarrow N.$$

La aplicación anterior induce un homomorfismo

$$f_*: \mathbb{Z} \cong H_m(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_m(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

$$[M] \mapsto \lambda[N]$$

el cual manda a la clase fundamental de M (el generador), a un múltiplo entero de la clase fundamental de N . Definimos el grado de f , como dicho múltiplo.

$$\deg f = \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Nuevamente el significado geométrico del grado es el número de veces que M se “envuelve” en N .

Cuando la aplicación $f: M \rightarrow N$ es **diferenciable**, el grado definido mediante el homomorfismo inducido en homología y el grado definido en la Sección 2.3 mediante la imagen inversa de un valor regular coinciden.

3.6. Cohomología

Existen otros invariantes, los cuales son “duales” a los grupos de homología. Son también un conjunto de grupos, llamados *grupos de cohomología*, los cuales no definiremos, solamente mostraremos sus propiedades principales y su relación con los grupos de homología. Para más información consultar [5, 7].

Dado un poliedro X , le asignaremos un conjunto de grupos denotados por $H^i(X; \mathbb{Z})$ con $i \in \mathbb{N}$, llamados *grupos de cohomología* de X con coeficientes en \mathbb{Z} .

Los grupos de cohomología tienen las siguientes propiedades:

Espacio Topológicos	Grupos
X	$H^i(X; \mathbb{Z})$
$f: X \rightarrow Y$	$f^*: H^i(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z})$
$X \cong Y$	$H^i(X; \mathbb{Z}) \cong H^i(Y; \mathbb{Z})$
$Id_X: X \rightarrow X$	$Id_{H^i(X; \mathbb{Z})}: H^i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z})$
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$	$H^i(Z; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g^*} H^i(Y; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^i(X; \mathbb{Z})$

Nótese que las propiedades anteriores son completamente análogas a las propiedades de los grupos de homología, salvo que la dirección de las flechas de

los homomorfismos inducidos entre los grupos de cohomología se invierten. Esta es una de las razones por las que se dice que los grupos de cohomología son duales a los grupos de homología.

Una propiedad de la cohomología que la distingue de la homología es la existencia de una multiplicación natural

$$H^p(X; \mathbb{Z}) \times H^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X; \mathbb{Z}),$$

llamada *producto copa* el cual le da a la suma directa de todos los grupos de cohomología

$$H^\bullet(X; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i \geq 0} H^i(X; \mathbb{Z})$$

una estructura de anillo graduado llamado el *anillo de cohomología*.

En el caso particular en que X es una variedad hay una relación muy importante entre los grupos de homología y cohomología.

Sea M una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión m . Entonces:

$$H_{m-i}(M; \mathbb{Z}) \cong H^i(M; \mathbb{Z}),$$

este isomorfismo se conoce como *Dualidad de Poincaré*.

3.7. Homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2

Hay una variante de los grupos de homología, llamada *homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2* , la cual consiste en definir a los grupos de i -cadenas $C_i(X; \mathbb{Z}_2)$ como combinaciones lineales formales de simplejos de dimensión i , pero donde los coeficientes están en \mathbb{Z}_2 , es decir, son 0 o 1:

$$r_1 \sigma_1^i + \cdots + r_k \sigma_k^i, \quad \text{con } r_i \in \mathbb{Z}_2.$$

llamadas *i -cadenas con coeficientes en \mathbb{Z}_2* . El operador frontera ∂ funciona exactamente igual, por lo que nuevamente obtenemos un complejo de cadenas, cuyos grupos de homología son los grupos de *homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2* denotados por $H_i(X; \mathbb{Z}_2)$. De manera más general, dado un anillo con unidad K , podemos definir los grupos de homología con coeficientes en K , denotados por $H_i(X; K)$ de manera análoga.

Si M es una variedad cerrada y orientada (compacta y sin frontera) de dimensión n hay una manera de definir una orientación en M usando los grupos de homología $H_{n-1}(U \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, donde $x \in M$ y U es una vecindad de U . Para más detalles ver [5, Ch. 22]. Si de manera análoga en su lugar usamos los grupos $H_{n-1}(U \setminus \{x\}; K)$ con coeficientes en un anillo con unidad K , obtenemos lo que se llama una *K -orientación* y en ese caso decimos que M es *K -orientada*.

No necesitamos saber la definición precisa pues sólo estaremos interesados en variedades \mathbb{Z} -orientadas y \mathbb{Z}_2 -orientadas. Una variedad M es \mathbb{Z} -orientada si es orientada en el sentido de la definición de la Sección 1.4. Por otro lado, **toda** variedad cerrada es \mathbb{Z}_2 -orientada.

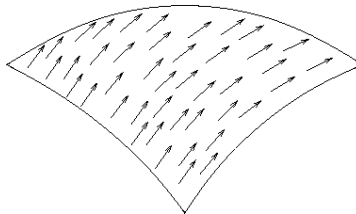
Capítulo 4

Teorema de Poincaré-Hopf

4.1. Campos vectoriales

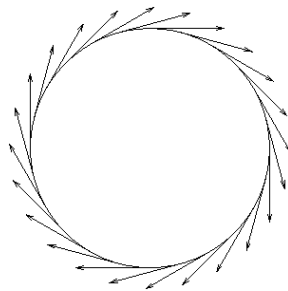
Un *campo vectorial* (diferenciable o continuo) sobre una variedad diferenciable M es una función v (diferenciable o continua) que asigna a cada punto $p \in M$ un vector $v(p)$ tangente a M en p , es decir, $v(p)$ pertenece al espacio tangente T_pM .

Ejemplo 23. Campo vectorial sobre una variedad:

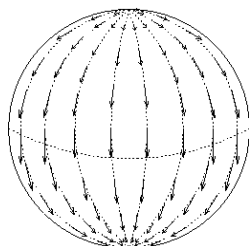


Una *singularidad* a del campo vectorial v es un punto $a \in M$ en el cual el campo vectorial es cero o no está definido.

Ejemplo 24. Sea $M = S^1$. El campo vectorial ilustrado en la figura no tiene singularidades.



Ejemplo 25. Sea $M = S^2$. El campo vectorial ilustrado en la figura tiene singularidades en los polos.



Pregunta: Dada una variedad diferenciable cerrada M .

¿Es posible construir un campo vectorial v en M sin singularidades?

Ejemplo 26. Sea $M = T$. Los campos vectoriales mostrados en la Figura 4.1 no tienen singularidades.

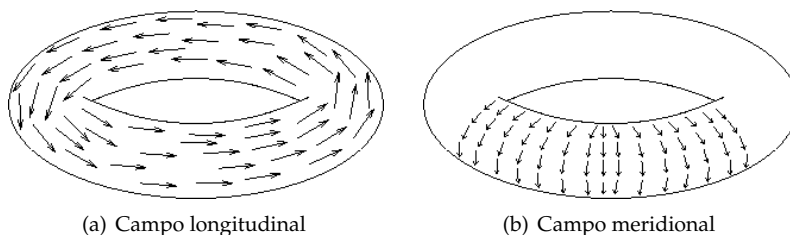


Figura 4.1: Campos vectoriales en el toro

Del Ejemplo 26, tenemos que en el caso del toro T , la respuesta es afirmativa. En el ejemplo 25 tenemos un campo en la esfera que tiene singularidades, pero de este ejemplo, no podemos asegurar que no exista otro campo que no las tenga.

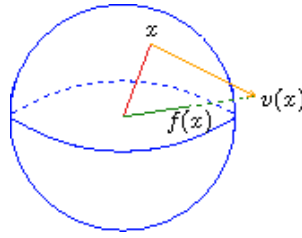
Si pensamos a los vectores del campo como cabellos, entonces contestar la pregunta para $M = S^2$ equivale a preguntar si la esfera se puede “peinar”.

Ejemplo 27. Veamos que S^n admite un campo vectorial diferenciable que no se anula en ningún punto si y sólo si n es impar.

Consideremos a $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Supongamos que v es un campo vectorial continuo que no se anula. Definamos

$$f: S^n \rightarrow S^n$$

$$f(x) = \frac{x + v(x)}{\|x + v(x)\|}$$



la cual **no** tiene puntos fijos, por lo tanto $\deg f = (-1)^{n+1}$. Si n es par tenemos que $\deg f = -1$.

Por otro lado

$$F(x, t) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}$$

es una homotopía entre f e Id_{S^n} . Por lo tanto $\deg f = 1$. ¡Contradicción!

Por otro lado, si n es impar $\deg f = 1$, por lo que no hay contradicción y la fórmula explícita

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

define un campo vectorial diferenciable no cero sobre S^n . Esto completa la demostración.

4.2. Teorema de Poncaré-Hopf

Usando el concepto de grado de una aplicación, asignaremos a cada singularidad a de un campo vectorial v , un número entero $I(v, a)$, llamado el *índice* de v en a .

Sea M una variedad cerrada de dimensión m . Sea v un campo vectorial que tenga solamente singularidades **aisladas** y sea $a \in M$ una singularidad de v .

Sea $B(a)$ una bola con centro a y de radio pequeño tal que a sea la única singularidad en $B(a)$. Por lo tanto v está bien definida y sin singularidades en la esfera $S(a) = \partial B(a)$.

Definimos la aplicación de Gauss:

$$\gamma: S(a) \cong S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$$

$$\gamma(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

donde a cada punto $x \in S(a)$ le asociamos el vector tangente normalizado dado por el campo v .

Definimos el *índice de v en a* como el grado de la aplicación γ :

$$I(v, a) = \deg \gamma.$$

En la Figura 4.2 se presentan varios ejemplos de singularidades de campos vectoriales sobre superficies con diferentes índices.

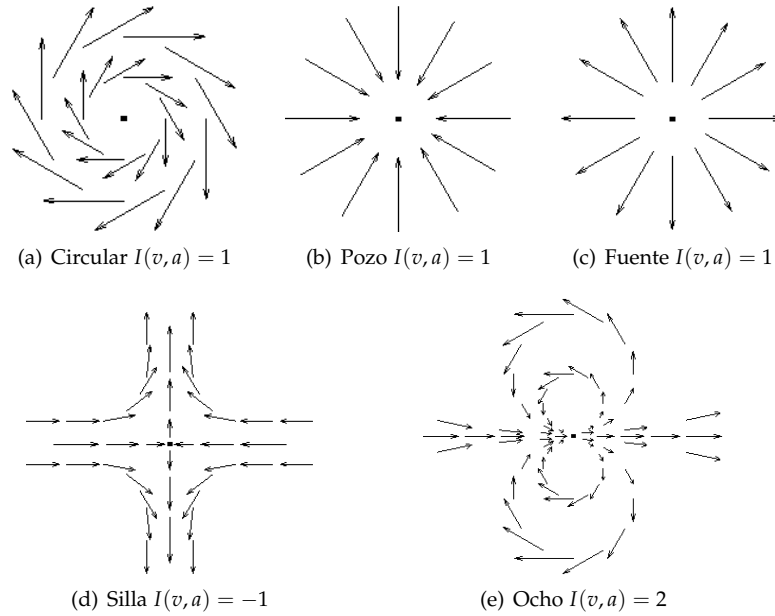


Figura 4.2: Singularidades de campos en superficies

El siguiente teorema, fué probado por Poincaré en 1885 en el caso de dimensión 2 y el teorema general fué demostrado por Hopf en 1926 basado en resultados parciales de Brouwer y Hadamard.

Teorema 28 (Poincaré-Hopf). *Sea M una variedad diferenciable cerrada y sea v un campo vectorial continuo en M con un número finito de singularidades aisladas a_k . Entonces*

$$\chi(M) = \sum_k I(v, a_k).$$

Esbozo de la demostración. La demostración se divide en dos partes:

- I. Se demuestra que la cantidad $I(v) = \sum_k I(v, a_k)$ es independiente del campo vectorial que se use. De hecho es igual al grado de una aplicación que no depende del campo vectorial.
- II. Se encuentra un campo vectorial v en el que sea fácil ver que $I(v) = \chi(M)$. Para el caso de superficies, en la Figura 4.3 se ilustra uno de tales campos definido por Hopf, el cual tiene un pozo en cada vértice (índice 1), una silla en cada arista (índice -1) y una fuente en cada cara (índice 1), por lo que

$$I(v) = \#\{\text{vértices}\} - \#\{\text{aristas}\} + \#\{\text{caras}\} = \chi(M). \quad \square$$

La demostración completa del teorema se puede encontrar en los siguientes libros [6, 9]

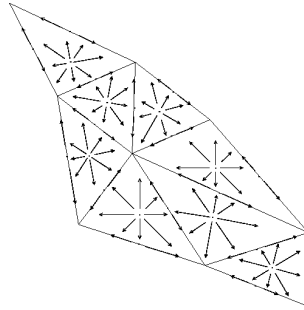


Figura 4.3: El campo de Hopf.

Corolario 29. *El toro T^2 es la única superficie que admite un campo vectorial sin singularidades.*

Como la característica de Euler-Poincaré de la esfera es 2, tenemos que no es posible construir un campo vectorial en S^2 sin singularidades, es decir, la esfera **no** se puede peinar.

Ejemplo 30. El campo vectorial sobre S^1 mostrado en el Ejemplo 24 no tiene singularidades. Entonces por el Teorema 28 tenemos que $\chi(S^1) = 0$, lo cual es fácil de comprobar, tomando cualquier polígono como triangulación del círculo y viendo que tiene el mismo número de vértices que de aristas.

CONCLUSIÓN

La característica de Euler-Poincaré es la **obstrucción** para construir un campo vectorial no nulo. Es decir:

Si $\chi(M) \neq 0$, entonces M no admite un campo vectorial continuo no nulo.

4.3. El Haz Tangente

Dada una aplicación diferenciable entre dos variedades $f: M \rightarrow N$, tenemos que la diferencial $df_p: T_p M \rightarrow T_p N$ es una transformación lineal que depende del punto p de M , así que al cambiar de punto obtenemos, mediante la diferencial de f , otra transformación lineal entre los espacios tangentes correspondientes. Esto motiva a definir una transformación del conjunto de todos los vectores tangentes a M en el conjunto de todos los vectores tangentes a N . Para tal fin, definamos para una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^k$, el subconjunto de $M \times \mathbb{R}^k$

$$TM = \{ (p, u) \in M \times \mathbb{R}^k \mid p \in M, u \in T_p M \} \quad (4.1)$$

y al cual llamaremos *haz tangente*. De manera que el elemento (p, u) puede ser interpretado como “el vector u tangente a M en p ”. Se puede verificar que TM es una variedad diferenciable en \mathbb{R}^{2k} , pues $TM \subset M \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{2k}$. Definimos la proyección

$$\begin{aligned} \pi: TM &\longrightarrow M \\ \pi(p, u) &= p \end{aligned} \tag{4.2}$$

es decir,

$$\pi^{-1}(p) = T_p M,$$

la imagen inversa de un punto $p \in M$ bajo π es el espacio vectorial $T_x M$.

Entonces, retomando las variedades $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ y f una función diferenciable entre ellas, podemos definir

$$\begin{aligned} df: TM &\longrightarrow TN \\ df(p, u) &\mapsto (f(p), df_p(u)) \end{aligned}$$

y tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \tag{4.3}$$

Ejemplo 31. En la Figura 4.4 se muestra el haz tangente para $M = S^1$. Resulta ser un cilindro, en este caso, para construir el haz tangente, se puede pensar que cada recta tangente fué “rotada” 90° hasta quedar perpendicular al plano del círculo, de esta manera, todas las rectas tangentes forman el cilindro, el cual es una variedad diferenciable de dimensión 2. La proyección π , es la proyección sobre el círculo y de esta manera, la imagen inversa de un punto es precisamente su recta “tangente”.

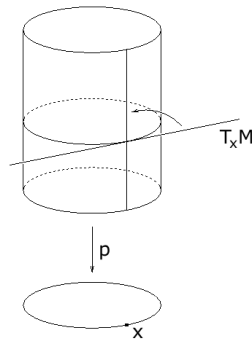


Figura 4.4: Haz tangente de S^1

Definición. Una *sección* es una aplicación (diferenciable o continua) $s: M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ s = Id_M$. Es decir, una sección asigna a cada punto p de M , un vector $s(p)$ en su espacio tangente T_pM . Por lo tanto:

Un campo vectorial es una sección del haz tangente

Definición. La *sección cero* del haz tangente es la sección que a cada $p \in M$ le asigna el vector cero en T_pM , es decir, corresponde al campo vectorial constante igual a cero.

Encontrar un campo vectorial no nulo en M equivale a encontrar una sección del haz tangente que no intersecte a la sección cero.

Esto se ilustra en la Figura 4.5, donde se muestran la sección cero, una sección con ceros y una más sin ceros.

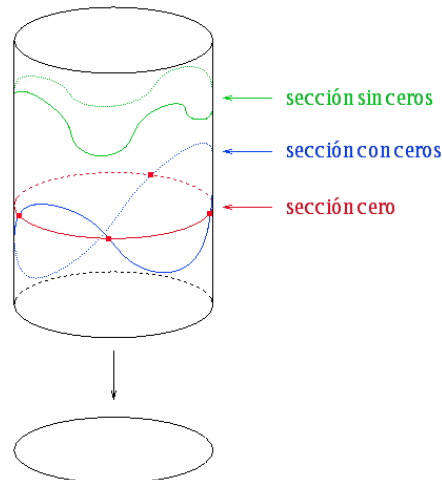


Figura 4.5: Secciones.

Desde este punto de vista, la característica de Euler-Poincaré es una **obstrucción** para tener secciones no nulas:

Si $\chi(M) \neq 0$, entonces el haz tangente TM de M no admite secciones no nulas.

Capítulo 5

Clases características

5.1. Hazes Vectoriales

El haz tangente a una variedad es un caso particular de una clase de objetos matemáticos llamados *hazes vectoriales*.

Definición. Un *haz vectorial* ζ (real o complejo) de rango n es una aplicación $\pi: E \rightarrow M$ diferenciable suprayectiva entre dos variedades, tales que para toda $p \in M$, la *fibra* sobre p dada por

$$\pi^{-1}(p) \subset E$$

es un espacio vectorial (real o complejo) de dimensión n , es decir $\pi^{-1}(p)$ es isomorfo a \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n . Además π satisface la siguiente condición de trivialidad local: para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y un difeomorfismo

$$\phi_U: U \times \mathbb{F}^n \rightarrow \pi^{-1}(U),$$

tal que $\pi \circ \phi_U(p, v) = p$, donde \mathbb{F}^n es \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , según sea ζ un haz vectorial real o complejo respectivamente.

La variedad E es llamada el *espacio total*, M el *espacio base*, \mathbb{F}^n la *fibra* y la aplicación π es llamada la *proyección*. Dado $p \in M$ denotaremos por ζ_p a la fibra sobre p .

Ejemplo 32. Sean M una variedad, $E = M \times \mathbb{R}^n$ y $p: \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ la proyección sobre el primer factor. Este es claramente un haz vectorial y es llamado el *haz producto*. Denotaremos por ε^n al haz producto de rango n .

Ejemplo 33. La banda de Möbius es también un haz vectorial. Si la consideramos a E como la banda de Möbius sin la frontera, $M = S^1$ y π la proyección sobre S^1 . La imagen inversa de cualquier punto $p \in S^1$ será un intervalo abierto, el cual es isomorfo a la recta real \mathbb{R} . Esto se ilustra en la Figura 5.1

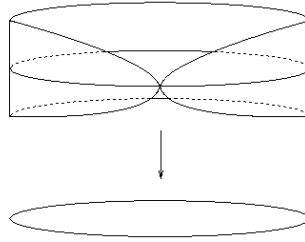


Figura 5.1: Banda de Möbius

Ejemplo 34. Denotemos por \mathbb{F} a \mathbb{R} o \mathbb{C} . Sea $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ el \mathbb{F} -espacio proyectivo de dimensión n que consiste de las \mathbb{F} -líneas en \mathbb{F}^{n+1} que pasan por el origen, es decir, de los \mathbb{F} -subespacios lineales de dimensión 1.

Existe un haz vectorial γ^n de rango 1 sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ llamado el *haz tautológico* sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$. Su espacio total está dado por

$$E(\gamma^n) = \{ (\ell, v) \in \mathbb{F}\mathbb{P}^n \times \mathbb{F}^{n+1} \mid v \in \ell \}$$

y la proyección está definida como

$$\begin{aligned} E(\gamma^n) &\xrightarrow{\pi} \mathbb{F}\mathbb{P}^n \\ (\ell, v) &\mapsto \ell. \end{aligned}$$

Es llamado haz tautológico por que dado $\ell \in \mathbb{F}\mathbb{P}^n$, es decir, ℓ corresponde a una línea en \mathbb{F}^{n+1} , tenemos que $\pi^{-1}(\ell)$, la fibra sobre ℓ , es precisamente la línea correspondiente a ℓ .

En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $n = 1$ tenemos que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ es isomorfo al círculo unitario S^1 y el haz tautológico $\gamma^1 = (E(\gamma^1) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1)$ es precisamente el haz dado por la proyección de la banda de Möbius sobre S^1 mostrado en la Figura 5.1.

Definición. Una *sección* de un haz vectorial $\pi: E \rightarrow M$ es una aplicación $s: M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$. Es decir, una sección asigna a cada punto x de M , un vector $s(x)$ en su fibra $\pi^{-1}(x)$.

La *sección cero* es la sección que a cada $p \in M$ le asigna el vector cero en $\pi^{-1}(p)$.

5.2. Morfismos de haces vectoriales

Definición. Sean $\zeta = \{\pi_\zeta: E(\zeta) \rightarrow M\}$ y $\xi = \{\pi_\xi: E(\xi) \rightarrow N\}$ dos \mathbb{F} -haces vectoriales. Un *morfismo de haces vectoriales* $h: \zeta \rightarrow \xi$ consiste de aplicaciones diferenciables $\tilde{f}: E(\zeta) \rightarrow E(\xi)$ y $f: M \rightarrow N$ que hacen conmutar el siguiente

diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(\zeta) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\xi) \\ \pi_\zeta \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

es decir, para todo $p \in M$, \tilde{f} manda a ζ_p en $\xi_{f(p)}$ y además la restricción de \tilde{f} a las fibras $\tilde{f}_p: \zeta_p \rightarrow \xi_{f(p)}$, es una transformación lineal.

Ejemplo 35. Dada una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$, su diferencial $df: TM \rightarrow TN$ es un morfismo de haces vectoriales (ver diagrama 4.3).

Definición. Sean ζ y ξ dos haces vectoriales con la misma base M . Un morfismo de haces $h: \zeta \rightarrow \xi$ dado por las aplicaciones $h: E(\zeta) \rightarrow E(\xi)$ y la identidad $Id_M: M \rightarrow M$ es un *isomorfismo* si la aplicación h es un difeomorfismo y para toda $p \in M$ la restricción $h_p: \zeta_p \rightarrow \xi_p$ es un isomorfismo lineal.

Definición. Un \mathbb{F} -haz vectorial ζ de rango n con base M es *trivial* si es isomorfo al haz producto $M \times \mathbb{F}^n$.

Dados dos haces vectoriales ζ y ξ de rangos k y n respectivamente podemos construir un nuevo haz vectorial

$$\omega: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \rightarrow M$$

llamado *haz de morfismos*. Dado $p \in M$ la fibra de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ sobre p es el espacio vectorial de dimensión kn de todas las transformaciones lineales de la fibra ζ_p a la fibra ξ_p . Por lo tanto las fibras de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ se pueden identificar con el espacio vectorial $M(n, k)$ de matrices $n \times k$.

Un morfismo de haces suave $h: \zeta \rightarrow \xi$ es equivalente a una sección suave s_h de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ la cual está dada por

$$s_h(p) = h_p$$

donde h_p es el elemento en la fibra de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ sobre p que corresponde a la restricción $h_p: \zeta_p \rightarrow \xi_p$.

$$\begin{array}{ccc} \zeta & \xrightarrow{h} & \xi \\ \pi_\zeta \searrow & & \swarrow \pi_{\xi} \\ & M & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \\ \omega \downarrow \curvearrowright s_h \\ M \end{array}$$

5.3. Subhaz, Haz inducido y suma de Whitney

Definición. Sea $\pi: E \rightarrow M$ un haz vectorial. Un haz vectorial $\pi: F \rightarrow M$ es un *subhaz* si F es una subvariedad de E tal que por cada punto $p \in M$, la fibra F_p es un sub espacio vectorial de la fibra E_p .

Ejemplo 36. Sea N una subvariedad de M . Entonces el haz tangente TN de N es una subvariedad del haz tangente TM de M .

Definición. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Consideremos un haz vectorial ζ de rango n sobre N dado por $\pi: E \rightarrow N$. Definimos el conjunto

$$f^*E = \{ (p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v) \}$$

y la proyección $\tilde{\pi}: f^*E \rightarrow M$ por $\tilde{\pi}(p, v) = p$. De esta manera obtenemos un haz vectorial $f^*\zeta$ también de rango n sobre M llamado el *haz inducido* por f , pues f^*E resulta ser una subvariedad diferenciable de $M \times E$, la proyección es diferenciable y dado $p \in M$, tenemos que la fibra de $f^*\zeta$ sobre p esta dada por

$$\tilde{\pi}^{-1}(p) = \{ (p, v) \in M \times E \mid v \in \pi^{-1}(f(p)) \},$$

la cual es isomorfa a la fibra de ζ sobre $f(p)$. Tenemos que la aplicación natural

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ (p, v) & \mapsto & v \end{array}$$

es un morfismo de haces, tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Definición. Dados dos haces vectoriales ζ y ξ con la misma base, de rangos k y n respectivamente. Su *suma de Whitney* $\zeta \oplus \xi$ es un haz vectorial con la misma base, de rango $k + n$, cuyas fibra $(\zeta \oplus \xi)_p$ sobre un punto $p \in M$ es la suma directa de las fibras correspondientes ζ_p y ξ_p , es decir, $(\zeta \oplus \xi)_p = \zeta_p \oplus \xi_p$.

5.4. Secciones linealmente independientes

En la Sección 4.3 nos preguntamos si era posible encontrar una sección no nula del haz tangente TM de una variedad M . Podemos generalizar nuestra pregunta a haces vectoriales en general.

Pregunta: Sea ζ un haz vectorial de rango n

¿Es posible encontrar una sección continua no nula?

Podemos generalizarla aún más de la siguiente manera:

Pregunta: Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n$.

¿Es posible construir r secciones de ξ que sean linealmente independientes en todo punto $p \in M$?

Ejemplo 37. En el haz vectorial del Ejemplo 33 dado por la banda de Möbius, no es posible construir una sección continua que no tenga ceros. Esto se ilustra en la Figura 5.2, recordando que la banda de Möbius se obtiene de un rectángulo al identificar dos de sus lados opuestos dándoles orientaciones contrarias.

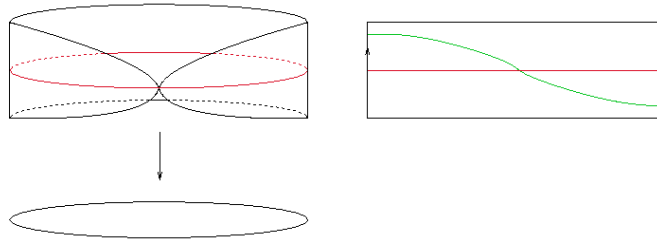


Figura 5.2: Sección en la banda de Möbius

De manera análoga a la característica de Euler-Poincaré, es posible definir invariantes, los cuales son *obstrucciones* para poder construir r secciones linealmente independientes en un haz vectorial ξ de rango $n \geq r$. Pero en este caso, a diferencia de la característica de Euler-Poincaré, dichas obstrucciones no son números, sino clases de cohomología llamadas *clases características* de ξ .

Las construcciones clásicas de las clases características se pueden encontrar en las siguientes referencias [10, 8]. Dichas construcciones son de carácter algebraico. Junto con Marcelo Aguilar y Eduardo Frías, en [2] damos una construcción geométrica de las clases características de un haz vectorial basada en el concepto de transversalidad, la cual describiremos a continuación.

Primero comencemos con algunas convenciones de notación para poder tratar los casos real y complejo al mismo tiempo:

- Para haces vectoriales *reales* definimos:

$$b = 1 \quad K_1 = \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

- Para haces vectoriales *reales* definimos:

$$b = 2 \quad K_2 = \mathbb{Z} \quad \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

Enunciemos nuevamente nuestro problema:

Sea ξ un haz vectorial de rango n dado por $\pi: E \rightarrow M$ y sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n$.

¿Es posible construir r secciones de ξ que sean linealmente independientes en todo punto $p \in M$?

La respuesta para $r = n$ está dada por la siguiente

Proposición 38. *El haz vectorial ζ admite n secciones linealmente independientes si y sólo si ζ es trivial.*

Demostración. (\Rightarrow) Sean $s_i: M \rightarrow E$, $i = 1, \dots, n$ las n secciones linealmente independientes de ζ . Sea $v \in E$ tal que $\pi(v) = p \in M$. Entonces podemos escribir de manera única a v como una combinación lineal

$$v = \alpha_1 s_1(p) + \dots + \alpha_n s_n(p).$$

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para \mathbb{F}^n , entonces la aplicación

$$E \xrightarrow{h} M \times \mathbb{F}^n$$

$$h(v) = (p, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$$

define un isomorfismo entre ζ y el haz producto y por lo tanto ζ es trivial.

(\Leftarrow) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para \mathbb{F}^n y sea $h: M \times \mathbb{F}^n \rightarrow E$ un isomorfismo entre el haz producto y ζ . Definimos las n secciones $s_i: M \rightarrow E$, $i = 1, \dots, n$ de ζ por

$$s_i(p) = h(p, e_i),$$

las cuales son claramente linealmente independientes en todo punto por ser h un isomorfismo de haces vectoriales. \square

Por la Proposición 38 tenemos que la existencia de $n - i + 1$ secciones linealmente independientes de ζ es equivalente a la existencia de un morfismo de haces $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \zeta$ del haz producto ε^{n-i+1} a ζ tal que h es inyectivo en cada fibra. Pues así tendríamos un **subhaz trivial** de rango $n - i + 1$ de ζ .

Con esta formulación, la **obstrucción** a la existencia de $n - i + 1$ secciones linealmente independientes está representada por el subconjunto de puntos $\bar{Z}(h)$ de M donde h **no** es inyectiva. En general este conjunto no es una variedad, pero si h es "genérico", es una variedad "estratificada".

5.5. Morfismos de haces genéricos

Sean ζ y ξ dos \mathbb{F} -haces vectoriales sobre una variedad diferenciable M . Consideremos el *haz de morfismos*

$$\omega: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \rightarrow M$$

Existe un *morfismo de haces tautológico* τ sobre el espacio total de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$. Es un morfismo de $\omega^* \zeta$ a $\omega^* \xi$, cuya restricción a la fibra sobre $v \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ es v misma considerada como una transformación lineal de $\zeta_{\pi(v)} \cong (\omega^* \zeta)_v$ a $\xi_{\omega(v)} \cong (\omega^* \xi)_v$.

Un morfismo de haces $h: \zeta \rightarrow \xi$ induce una partición de la variedad M dada por subconjuntos "singulares"

$$Z_j(h) = \{ p \in M \mid \dim_{\mathbb{F}} \ker h_x = j \}$$

Cuando h es el morfismo de haces tautológico, sus conjuntos singulares resultan ser variedades.

Proposición 39 (Thom, Boardman). Sean ζ y ξ haces vectoriales sobre una variedad M de rangos k y n respectivamente. Sea $\tau: \omega^*\zeta \rightarrow \omega^*\xi$ el morfismo de haces tautológico sobre el haz de morfismos $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$. Entonces $Z_j(\tau)$ es una subvariedad de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ con

$$\text{codim}_{\mathbb{R}} Z_j(\tau) = bj(n - k + j).$$

Claramente $Z_l(\tau)$, $l \geq j$ pertenece a la adherencia de $Z_j(\tau)$, entonces

$$\bar{Z}_j(\tau) = \bigcup_{l \geq j} Z_l(\tau).$$

De hecho, los subconjuntos $Z_l(\tau)$ con $l \geq j$ dan a $\bar{Z}_j(\tau)$ una *estratificación de Whitney*, es decir es una unión de variedades diferenciables $Z_l(\tau)$ llamadas *estratos*, con ciertas propiedades.

Definición. Un morfismo de haces $h: \zeta \rightarrow \xi$ se dice que es *genérico* si la sección correspondiente s_h de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ es transversal a todas las subvariedades $Z_j(\tau)$.

Los morfismos de haces genéricos forman un subconjunto **abierto denso** del espacio de todos los morfismos de haces vectoriales con la topología C^∞ de Whitney.

Proposición 40. Sean ζ y ξ haces vectoriales sobre una variedad M de rangos k y n respectivamente. Si $h: \zeta \rightarrow \xi$ es un morfismo de haces genérico sobre M , entonces $Z_j(h)$ es una subvariedad de M de codimensión **real** $bj(n - k + j)$.

Demostración. Sea s_h la sección de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ correspondiente a h . Tenemos que $Z_j(h) = s_h(Z_j(\tau))$ y como s_h es transversal a $Z_j(\tau)$, $Z_j(h)$ es una subvariedad de M de codimensión real $bj(n - k + j)$. \square

Nótese que también se tiene que

$$\bar{Z}_j(h) = \bigcup_{l \geq j} Z_l(h).$$

Por lo que $\bar{Z}_j(h)$ también tiene una *estratificación de Whitney*. Por lo tanto, el conjunto de puntos en M donde h **no** es inyectivo está dado por $\bar{Z}_1(h)$.

Sea ξ un \mathbb{F} -haz vectorial suave de rango n sobre una variedad diferenciable cerrada M de dimensión m . Supongamos también que la variedad M es K_b -orientada.

Sea $h: \varepsilon^k \rightarrow \zeta$ un morfismo de haces del haz producto ε^k de rango k a ζ . Definimos

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(h) &= \{ (p, L) \in M \times \mathbb{F}P^{k-1} \mid (p, L) \subset \ker h_p \} \\ \tilde{Z}^\circ(h) &= \{ (p, L) \in \tilde{Z}(h) \mid (p, L) = \ker h_p \}.\end{aligned}$$

Tenemos que $\tilde{Z}^\circ(h)$ es un subconjunto abierto denso de $\tilde{Z}(h)$.

Sea τ el morfismo de haces tautológico sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \zeta)$. Tenemos que

$$\tilde{Z}(\tau) = \{ (f, L) \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \zeta) \times \mathbb{F}P^{k-1} \mid (\pi(f), L) \subset \ker f_{\omega(f)} \}.$$

Proposición 41 (Ronga). Sea $\hat{\phi}: \tilde{Z}(\tau) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \zeta)$ la proyección sobre el primer factor. Entonces

1. $\hat{\phi}(\tilde{Z}(\tau)) = \tilde{Z}_1(\tau)$.
2. $\tilde{Z}(\tau)$ es una subvariedad de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \zeta) \times \mathbb{F}P^{k-1}$ de codimensión *real* bn .

Proposición 42. Sea $h: \varepsilon^k \rightarrow \zeta$ un morfismo de haces genérico. Entonces $\tilde{Z}(h)$ es una subvariedad compacta de $M \times \mathbb{F}P^{k-1}$ de dimensión $m + b(k - n - 1)$.

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \zeta) \times \mathbb{F}P^{k-1} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \zeta) \\ \tilde{s}_h \uparrow \left(\begin{array}{c} \downarrow \omega \times \text{Id} \\ \downarrow \pi \end{array} \right) \tilde{s}_h & & \\ M \times \mathbb{F}P^{k-1} & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

Nótese que $\tilde{Z}(h) = \tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau))$. Es suficiente ver que \tilde{s}_h es transversal a $\tilde{Z}(\tau)$. \square

Proposición 43. La variedad $\tilde{Z}(h)$ es K_b -orientada. Por lo tanto tiene una clase fundamental $[\tilde{Z}(h)] \in H_{m+b(k-n-1)}(\tilde{Z}(h); K_b)$.

Proposición 44. Sea $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$ la proyección sobre el primer factor. Entonces ϕ es propia y manda $\tilde{Z}^\circ(h)$ diffeomorfamente sobre $Z_1(h)$.

5.6. Clases características

Ahora ya podemos dar al definición de las clases características de un \mathbb{F} -haz vectorial ζ .

Definición. Sea ζ un \mathbb{F} -haz vectorial suave de rango n sobre una variedad diferenciable cerrada K_b -orientada M de dimensión m . Sea $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \zeta$ un morfismo de haces genérico. Definimos la i -ésima *clase característica* de ζ por

$$\text{Cl}_i(\zeta) = \phi!([\tilde{Z}(h)]) \in H^{bi}(M; K_b)$$

donde $[\tilde{Z}(h)]$ es la clase fundamental de $\tilde{Z}(h)$, y $\phi!$ es la composición del isomorfismo de dualidad de Poincaré con el homomorfismo inducido en homología por la proyección sobre el primer factor $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} H_{m-bi}(\tilde{Z}(h); K_b) & \xrightarrow{\phi_*} & H_{m-bi}(M; K_b) \\ & \searrow \phi! & \updownarrow D \\ & & H^{bi}(M; K_b). \end{array}$$

La clase de cohomología $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ es la *obstrucción* para tener $n - i + 1$ secciones de ξ linealmente independientes en todo punto. Es decir:

Si $\mathbf{Cl}_i(\xi) \neq 0$, entonces el haz vectorial ξ de no admite $n - i + 1$ secciones linealmente independientes.

- Si ξ es un haz **real** son llamadas *clases de Stiefel-Whitney* y generalmente son denotadas por $w_i(\xi) \in H^i(M; \mathbb{Z}_2)$.
- Si ξ es un haz **complejo** son llamadas *clases de Chern* y generalmente son denotadas por $c_i(\xi) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z})$.

Las clases características satisfacen los siguientes axiomas dados por Hirzebruch, los cuales las caracterizan.

Axioma A1 Para cada haz vectorial ξ de rango n corresponde una sucesión de clases de cohomología

$$\mathbf{Cl}_i(\xi) \in H^{bi}(B; K_b), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

tales que $\mathbf{Cl}_0(\xi) = 1$ y $\mathbf{Cl}_i(\xi) = 0$ si $i > n$.

Axioma A2 Si $f: B' \rightarrow B$ es una aplicación continua entonces

$$\mathbf{Cl}_i(f^*(\xi)) = f^*(\mathbf{Cl}_i(\xi)).$$

Axioma A3 Si ξ y η son haces vectoriales sobre M entonces

$$\mathbf{Cl}_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^i \mathbf{Cl}_j(\xi) \cup \mathbf{Cl}_{i-j}(\eta).$$

Axioma A4 Para el haz de líneas canónico γ_1^1 sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$, $\mathbf{Cl}_1(\gamma_1^1) = -g_1 \in H^b(\mathbb{F}\mathbb{P}^1, K_b)$.

La suma $\mathbf{Cl}(\zeta) = 1 + \mathbf{Cl}_1(\zeta) + \cdots + \mathbf{Cl}_n(\zeta) \in H^*(B; K_b)$ es la *clase característica total*.

En vez de demostrar que las clases \mathbf{Cl}_i definidas anteriormente satisfacen los axiomas A1, A2, A3 y A4, demostramos que satisfacen un conjunto equivalente de axiomas A1, A2, A3' y A4':

Axioma A3' Sea ε^k el haz producto de rango k . Entonces

$$\mathbf{Cl}_i(\zeta \oplus \varepsilon^k) = \mathbf{Cl}_i(\zeta)$$

Axioma A4' Sea $\zeta^n = \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1}_n$. Entonces

$$\mathbf{Cl}_n(\zeta^n) = (-1)^n g_n \in H^{bn}(\mathbb{F}P^n; K_b)$$

Agradecimientos

Agradezco a Haydée Aguilar Cabrera por la realización de la mayoría de las figuras en este documento. Agradezco también a Ramiro Carrillo el haberme proporcionado todas las facilidades para terminar estas notas durante la Primera Reunión Conjunta SMM-RSME en Oaxaca.

Figuras

Las fuentes de las figuras son las siguientes:

- La figura de la tierra en la Figura 1.1 es tomada de <http://www.earthdayenergyfast.org/IMAGES/earth.jpg>.
- La figura del toro (de género 1) en la Figura 1.1 de <http://www.navworld.com/navcerebrations/Toroidal.htm>.
- La figura del toro (de género 2) en la Figura 1.3 de <http://www.ehu.es/~mtwmastm/CD0506.pdf> (que a su vez da crédito a <http://www.centre-sciences.asso.fr> pero la página no existe).
- La esfera triangulada de la Figura 1.5 de <http://www.cmat.berkeley.edu/Research/AES2006/speakerarray/icosaspeakers.htm>.
- El toro triangulado de la Figura 1.5 de <http://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/geometry/torii/torii.html>.
- El simplejo estándar de la Figura 1.6 de <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Standardsimplex.svg>.

Bibliografía

- [1] Ralph Abraham, J. E. Marsden, and Tudor Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences 75. Springer-Verlag, second edition, 1988.
- [2] Marcelo Aguilar, José Luis Cisneros-Molina, and Eduardo Frías Armenta. Characteristic Classes and Transversality. *Topology and its applications*, 154:1220–1235, 2007.
- [3] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.
- [4] P. H. Doyle and D. A. Moran. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.*, 5:160–162, 1968.
- [5] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic Topology. A First Course*. Addison-Wesley, 1981.
- [6] Victor Guillemin and Allan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [7] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [8] Allen Hatcher. *Vector Bundles & K-Theory*. Unpublished book on-line available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>, January 2003.
- [9] J[ohn] [W.] Milnor. *Topology from the differentiable point of view*. The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [10] J[ohn] [W.] Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Study 76. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [11] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.
- [12] S. William Massey. *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag, 1967.